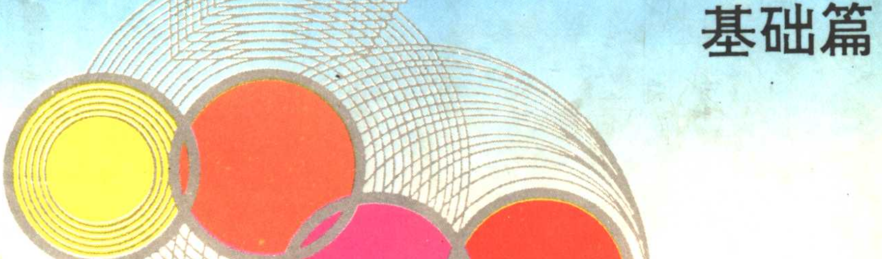
# 数学奥林匹克

单墫 主编

初中版新版

基础篇



北京大学出版社

# 数学奥林匹克

初中版新版·基础篇

单墫 主编

孙瑞清 傅敬良 编撰

北京大学出版社

# 数学奥林匹克

初中版新版·基础篇

单 墫 主编

孙瑞清 傅敬良 编撰

责任编辑：王明舟

*

北京大学出版社出版发行

（北京大学校内）

唐山市兴卫装璜印刷厂印刷

新华书店经售

*

787×1092毫米 32开本 13.25印张 290千字

1992年12月第一版 1998年2月第8次印刷

ISBN 7-301-02050-3/G·141

定价：15.00元

# 序

数学竞赛在我国普遍开展，成绩斐然。不少出版社出版了与竞赛有关的图书，起到良好的推动作用。北京大学出版社出版的这套《数学奥林匹克系列图书》就是其中的一种，它能受到广大读者的欢迎我们非常高兴。

这是我国出版的第一套数学竞赛的系列图书。系列中有高中册，也有初中册与小学册；有普及，也有提高；有最新的资料，也有经过系统整理的题解辞典。目前已出 16 册，近两年内还将推出 10 多种。各地奥林匹克学校采用，普遍反映效果很好。一个突出的例子是国家教委所办的理科实验班使用这套图书，每年都为参加国际数学奥林匹克的我国国家集训队、国家代表队输送约 2/3 的队员。

根据各地提出的意见与建议，这套图书作了不少改进，小学册与初中册均出了新版，并编写了高中版。新版致力于“浅”(即深入浅出)、“趣”(生动有趣)。注意普及，面向广大中小学生，避免过深、过难；注意教学原则的运用，循序渐进，适当重复；注意数学思想的启蒙与打好扎实的基础。我们相信这对于发展智力，对于参加竞赛，对于升学考试均有益处。

系列的另一个特点是“新”。有不少新鲜的资料，如《第 31 届国家集训队资料》、《第 31 届国际数学竞赛预选题》、《苏联数学奥林匹克试题汇编》、《美国数学奥林匹克试题汇编》等都及时整理推出。这套系列中，有关国际竞赛的若干册，可以说代表了当前竞赛的最高水平。这些属于提高的分册，已成为我

国集训队人人必备的材料。

除“浅”、“趣”、“新”等特点外，我们还尽力做到“准”，即科学性方面没有错误。各册作者与编者为此付出不少心血，但由于水平与时间等原因，错误与不妥之处仍难完全避免，敬请广大读者不吝指正。

参加编写工作的有教育家，高级教练及有丰富实践经验的中学教师，更有著名数学家丁石孙、王元、王梓坤、龚升诸位先生担任顾问，保证了这套系列图书的质量。

北京大学出版社，重视社会效益，以最快的速度出版这套系列图书，我们表示衷心的感谢。

单 墫

1992年9月

# 编辑说明

数学奥林匹克事业在中国大地迅猛发展，并得到了党和政府的大力扶持，各级教育行政部门及社会各界也都积极支持这项事业，为中国在国际竞赛中取得优异成绩提供了强有力的保证。

但是，我国正式参加国际竞赛的时间较短，与长期普遍开展这一活动的国家相比，在一些方面还有差距，特别是高水平的基层教练人员不多，可供培训使用的科学性、系统性、针对性都较强的材料贫乏，这些已成为阻碍我国数学竞赛向更高层次、更广范围发展的重要因素。基于此，北京大学出版社从1988年开始，着手组织编写了一套供小学学生到高中学生使用的《数学奥林匹克》系列图书，著名数学家丁石孙、王元、王梓坤、龚升诸先生任顾问，在国内外享有盛誉的数学奥林匹克专家、前国家教练组组长、第31届国际数学竞赛中国国家队领队兼主教练单墫教授任主编，编委及主要作者均为在国内外有一定影响的数学奥林匹克专家。

《数学奥林匹克》系列图书包括三个部分：从小学到高中的培训教材、国内外高水平竞赛材料、国家集训队集训资料；在近期内还将出版竞赛题解辞典。本系列图书自正式出版发行以来，行销全国各地，普遍反映效果很好。国家教委理科实验班及国家集训队、国家代表队都将本系列中的部分图书作为主要培训材料之一。在此，北京大学出版社及系列图书编委会向广大新老读者表示衷心的感谢！

根据各地读者提供的意见与建议，我们在继续及时出版有关国内外竞赛材料的同时，重新组织编写了小学版、初中版、高中版。新版广泛吸取了读者的建议，熔入了国内外各级竞赛的最新材料，特别参照国家教委新颁教学大纲，有层次，有梯度，有特点，旨在使程度不同的学生都可以学有所获。

初中版新版由单墫教授主编，写作提纲由编委会讨论并征求了部分专家、中小学教师及学生的意见。《基础篇》由北京市奥林匹克学校副校长孙瑞清副教授及傅敬良撰写，《知识篇》由北京市数学奥林匹克学校主教练、高级教练员、中国数学会理事胡大同及陈娴撰写，《提高篇》由华东师大数学系讲师、高级教练员、多届国家集训队教练熊斌撰写。全书由主编单墫教授审定。

为了使这套图书更好地发挥作用，热忱希望读者朋友及社会各界人士提出改进意见。

北京大学出版社将一如既往地为数学奥林匹克事业服务，为振兴中国的数学尽我们的力量。

最后，再次向读者朋友表示衷心的感谢！

1992 年 12 月

# 目　录

# 第一讲　从算术到代数

在小学算术课程中，同学们已经学习了整数、小数、分数的运算，并学会了初步地运用四则运算去解答一些简单的数量问题——通常称为四则应用问题。

到了中学，同学们开始学习代数。代数学的基本课题是着眼于利用运算来讨论各种数量问题。从发展的角度看，代数学是在“数”与“运算”的基础上有系统地发展起来的。为此，首先扩大了数的范围，从正整数、正分数和零发展到有理数、实数；其次，在用字母表示数的基础上，应用“运算律”解代数方程和研究代数式。同学们要学好初中代数，必须学会应用运算律解方程和进行代数式的运算。

交换律：$a+b=b+a, a\times b=b\times a$。

结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$，

$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$。

分配律：$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$。

## 1．用字母代表数

我们在算术中都是对具体的数进行计算。例如，

$$3\times5-6\div2+3=?\tag{1}$$

但是在代数中是以字母表示数来进行计算的。如果我在(1)式中，用 $a$ 代替 3，用 $b$ 代替 5，用 $c$ 代替 6，$d$ 代替 2，于是就得到：

$$a\times b-c\div d+a=?\tag{2}$$

(2)式就是个代数式。

利用代数式计算有什么优点呢？下面我们举几个例子。

例1　计算 $102\times98=?$

解　$$\begin{aligned}102\times98&=(100+2)(100-2)\\&=100^2+2\times100-2\times100-2^2\\&=10^2-2^2=9996.\end{aligned}$$

这是算术的解法。由这个解法中，我们发现：

$$(100+2)(100-2)=100^2-2^2.$$

如果用 $a$ 代替 100，用 $b$ 代替 2，上式仍然成立吗？

为此，我们计算：

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b)&=a^2+ab-ab-b^2 &&（分配律）\\&=a^2-b^2. &&（结合律）\end{aligned}$$

于是我们就得到了一个代数式计算公式：

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2. \qquad (3)$$

例 1 的计算实际上是利用了这个公式，不过在计算中重复了这个公式的证明过程，这就显得不够简捷。实际上，我们可以利用公式(3)直接进行计算。

例2　$3001\times2999=?$

解　$$\begin{aligned}3001\times2999&=(3000+1)(3000-1)\\&=3000^2-1^2=8999999.\end{aligned}$$

例3　$103\times97\times10009=?$

解　$$\begin{aligned}原式&=(100+3)(100-3)(100^2+9)\\&=(100^2-9)(100^2+9)\\&=100^4-9^2\\&=99999919.\end{aligned}$$

任何一个代数式，都是由已知数和未知数用加、减、乘、除等运算连结起来的一个式子。如果代数式中，只有一个未

知数，且用加、减、乘、乘方运算连结起来，就称这个代数式是**一元多项式**。例如，一元四次多项式 $5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$，就是由已知数 5,4,3,2,1 和未知数 $x$ 的方幂用加、乘连结起来的一个式子。

我们可以用一个符号 $f(x)$ 来表示这个多项式：

$$f(x)=5x^4+4x^3+3x^2+2x+1。\tag{4}$$

特别注意，这里的 $f$ 是指一种关系，如上式中的 $f$ 表示的关系是：

$$5\cdot(\quad)^4+4\cdot(\quad)^3+3\cdot(\quad)^2+2\cdot(\quad)+1。$$

$x$ 是未知数，符号 $f(x)$ 就是关于未知数 $x$ 的一种关系式的符号，不能把这个符号认为是 $f$ 与 $x$ 的乘积。

由于多项式 $f(x)$ 中，$x$ 可以取任意数值，那么当 $x$ 取某一个数值时，就可以通过计算，得到 $f(x)$ 相应的一个数值。例如在(4)式中，我们取 $x=2$，代入(4)式，则

$$f(2)=5\times2^4+4\times2^3+3\times2^2+2\times2+1=129。$$

我们把 $f(2)=129$ 就称作当 $x=2$ 时，

$$f(x)=5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$$

的值。

**例4** 已知

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+\frac{2}{3}x^3+3x^2+5x+7-4x,$$

求 $f(-2)$。

**解** 如果把 $x=-2$ 直接代入 $f(x)$ 进行计算是比较麻烦的，因此，我们先把 $f(x)$ 的表达式化简，然后再求值。

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+\frac{2}{3}x^3+3x^2+5x+7-4x$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^3\right)+(3x^2-2x^2)+(5x-4x)+7$$

$$=x^3+x^2+x+7,$$

所以

$$f(-2)=(-2)^3+(-2)^2+(-2)+7$$
$$=-8+4-2+7=1.$$

**例5** 已知 $f(x)=ax-1$，并且 $f(2)=1$，求 $f(1991)$的值.

**解** 因为 $f(2)=1$,所以

$$2a-1=1,$$
$$a=1.$$

因此

$$f(x)=x-1,$$
$$f(1991)=1991-1=1990.$$

## 2．应用题的算术解法与代数解法

在常见的数量关系问题中，应用问题可以说是最基本的问题了．下面我们用几个典型的实例，来对应用问题的“算术解法”与“代数解法”作个比较．

**例6** 某农场计划播种小麦与大豆共 138 公顷，要求种小麦的面积是种大豆面积的 4 倍；试问该农场应种小麦与大豆各多少公顷？

**算术解法** 由本题所给条件可知，播种总面积等于种大豆面积的(4+1)倍．因此，

种大豆的公顷数 = 总公顷数 ÷ (4 + 1),

种小麦的公顷数 = 总公顷数 − 种大豆的公顷数,

即

$$138\div(4+1)=27.6(\text{公顷}),$$

$$138-27.6=110.4（公顷）。$$

**答** 该农场应种大豆27.6公顷，应种小麦110.4公顷。

**代数解法** 用一个字母$x$表示我们要求的一个数量，例如在此题中，可设种大豆为$x$公顷；再由题目所给的条件，可知：种小麦为$4x$公顷，因此，只要根据：

总公顷数＝种小麦的公顷数＋种大豆的公顷数

的关系式，和题目给出的"总公顷数＝138"的条件，就可直截了当地得到一个等式：

$$4x+x=138。\tag{1}$$

由于$x$虽是个未知数，但它终归是一个数，所以可以对它应用运算律。为此，我们对(1)式作如下变形：

$$(4+1)x=138,$$

即

$$5x=138。$$

两边同除以5，得

$$x=138\div5,$$

即

$$x=27.6（公顷）。$$

$$4x=4\times27.6=110.4（公顷）。$$

即种大豆27.6公顷，种小麦110.4公顷。

**比较分析** 算术解法中，要求对题意进行思考，先求得解决问题的公式，然后再逐步地对公式中的计算找出解释的理由，从而作出解答。而代数解法只要求用字母$x$表示所求的数量，再考虑$x$与已知数量之间的关系，最后直截了当地列出一个等式，然后应用运算律求出这个未知数$x$应取的数值，使问题得到解决。

**例7** 设有5元和10元的人民币共12张，共计85元，问其中5元、10元的人民币各几张？

**算术解法** 假如全部是5元的人民币，则共计

$$5\times12=60(\text{元})，$$

与总和85(元)相差：

$$85-60=25(\text{元})。$$

现在让我们逐次用一张10元的票子去换一张5元的票子，使得总张数12保持不变，每换一次总值将增加：

$$10-5=5(\text{元})。$$

那么，“换几次”才能补足总差额25呢？这只要做一次除法就行了，即

$$25\div5=5。$$

所以答案是：

$$\begin{aligned}10\text{元人民币的张数}&=(85-60)\div(10-5)\\&=25\div5=5。\end{aligned}\qquad(1)$$

$$5\text{元人民币的张数}=12-5=7。$$

**代数解法** 设10元人民币的张数是$x$，则5元人民币的张数是$(12-x)$，其中$x$是一个待求的“未知数”，在这里它只是“10元人民币张数”的简写，利用上述未知数符号，“总值是85元”这个事实即可用下述等式来表示：

$$10x+5(12-x)=85。\qquad(2)$$

这种含有未知数的等式叫做**代数方程**。

代数解法的步骤是：设未知数，建立代数方程，解出方程中未知数$x$所应取的值。

怎样解代数方程呢？由于交换律、结合律、分配律等运算律对任何数都成立，所以对那些我们暂且不知的“未知数”，这些“运算律”当然也成立。由此，我们来探讨方程(2)：

$$10x+5(12-x)=85。$$

由分配律得

$$10x+5\times12-5x=85。$$

由交换律、分配律得

$$(10-5)x+60=85.$$

等式两边同减 60，得

$$(10-5)x=85-60.$$

等式两边同除以$(10-5)$得

$$x=(85-60)\div(10-5)=5. \qquad (3)$$

比较分析

在代数解法中，我们先引进一个未知数 $x$ 表示问题中待求的量(如 10 元人民币的张数)，然后把未知数代入问题中，列出代数方程，再运用“运算律”，就可以求得方程中的未知数 $x$ 所应有的值。本例中，方程(2)的解就是(3)式：

$$x=(85-60)\div(10-5)=5.$$

容易看出，算术解法其实就是上面由代数方程(2)所得的求值公式(3)。然后对于公式(3)中的每一步计算：$60=5\times12$，$85-60$，$10-5$，$(85-60)\div(10-5)$ 找出适当的理由加以解释就是了。

同学们可能会问：老师怎么会想到上面的求值公式(1)的呢？对于这个问题的回答，大体有两种可能：

第一种可能是老师先用代数解法，由(2)求得公式(1)，但是因为小学生还没有学到代数，所以只好耐心地对(1)式中的每一步计算，结合题意加以解释，使同学了解算术解法的合理性。

第二种可能是对上述实际问题，做了一番归纳的工夫，这就是：

假如 12 张都是 5 元的，则 $12\times5=60$；假如 11 张为 5 元，1 张 10 元，则 $11\times5+10=65$；假如 10 张 5 元，2 张 10 元，则 $10\times5+2\times10=70$；以此类推，不难发现当 10 元人

民币的张数由 0 逐次加 1 时，总额由 60 开始逐次加一个 5。(1)式就是这个意思。

把两种解法加以比较，可以看出，算术解法的准备工作对于给定类型的问题，先来做一番实践归纳工作，从而求得解决该问题的公式（或合理的有程序的计算步骤)，然后还要逐步对公式中的计算找出理由加以解释。显然，这样做是缺乏普遍性的。

而代数解法的准备工作是代入未知数符号，把问题中的数量关系平铺直叙地用代数方程表示出来，然后再运用“运算律”，求出方程中未知数所应有的值，所以代数解法是简捷的，是具有高度普遍性的。

一般说来，算术解法的公式和理由是随着问题的类型而定的，但代数解法的基本原理就是有效地运用“运算律”，这种解法具有普遍性和统一性。

**例8** 有两个图书馆，自建馆以来，每年各进图书 5 千册，如果今年甲馆藏书 23 万册，乙馆藏书 11 万册，今后仍然是每年各进图书 5 千册，试问由今年起，什么时候，甲馆所藏图书是乙馆的 3 倍？

下面用代数解法，从中进一步领会它的普遍性。

**解** 设由今年起 $x$ 年后甲馆藏书册数是乙馆的 3 倍。由于 $x$ 年后，甲馆所藏图书册数是乙馆的 3 倍，所以有如下代数方程：

$$(23+0.5x)=3(11+0.5x).$$

利用分配律得

$$23+0.5x=33+1.5x.$$

两边同减 $0.5x$，得

$$23=33+1.5-0.5x.$$