北京市高等教育精品教材立项项目

北京大学数学教学系列丛书

研究生
数学基础课教材

复分析导引

李 忠 著

北京大学出版社

北京市高等教育精品教材立项项目

北京大学数学教学系列丛书

复分析导引

李 忠 著

北京大学出版社
·北 京·

图书在版编目(CIP)数据

复分析导引/李忠著. —北京:北京大学出版社,2004.11
(北京大学数学教学系列丛书)
ISBN 7-301-07798-X

Ⅰ.复…　Ⅱ.李…　Ⅲ.复分析-高等学校-教材　Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 090191 号

书　　名:复分析导引
著作责任者:李　忠 著
责 任 编 辑:刘　勇
标 准 书 号:ISBN 7-301-07798-X/O·0610
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn　电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021
印 刷 者:北京大学印刷厂
经 销 者:新华书店
890 mm×1240 mm　A5　9.5 印张　269 千字
2004 年 11 月第 1 版　2004 年 11 月第 1 次印刷
印　　数:0001—4000 册
定　　价:20.00 元

内 容 简 介

本书是为综合性大学、高等师范院校数学专业本科高年级学生和研究生编写的复分析教材，其目的是讲述现代复分析(不含多复分析)的一些基本理论及其近代重要发展。

本书共分九章，主要内容有：正规族与 Riemann 映射定理，经典几何函数论，共形模与极值长度，拟共形映射，Riemann 曲面的基本概念，Riemann-Roch 定理与单值化定理，Teichmüller 理论与模空间。这些内容与现代核心数学的许多分支领域有着深刻的联系。因此，本书不仅面向主修复分析的学生，而且也面向其他有关领域的学生。

本书是在作者多年来使用的讲义基础上编写而成，文字叙述简洁，通俗易懂，重点突出；特别注重解释重要概念和重要定理的意义以及方法的实质；部分定理的证明具有自己的明显特色。书中对一些重要理论的历史发展及其与其他领域的联系，作了必要的介绍与评述。

本书可作为高等院校高年级大学生、研究生的复分析教材，也可作为有关专业研究人员的参考书。

作 者 简 介

李忠 北京大学数学科学学院教授、博士生导师。1936年出生于河北省，1960年毕业于北京大学数学力学系，毕业后一直在北京大学从事科研与教学工作。

李忠教授的主要研究领域为复分析。他在拟共形映射和Teichmüller空间等方面有系统深入的研究，发表学术论文50余篇，并著有《拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用》等书。他的研究成果曾两次获国家自然科学三等奖和国家教委科技进步一等奖。1991年被国家人事部和国家教委评为"国家有突出贡献的中青年专家"。

李忠教授长期从事基础课教学工作并努力实践教学改革。他曾获得国家教学优秀成果一等奖，并在1993年被国家教委评为"国家优秀教师"。他主编的教材《高等数学简明教程》获2002年全国普通高等学校优秀教材一等奖。

李忠教授1987年至1991年任北京大学数学系主任。1987年至1995年任中国数学学会常务理事兼秘书长。1997年至今任北京数学学会理事长。

序　言

自 1995 年以来，在姜伯驹院士的主持下，北京大学数学科学学院根据国际数学发展的要求和北京大学数学教育的实际，创造性地贯彻教育部“加强基础，淡化专业，因材施教，分流培养”的办学方针，全面发挥我院学科门类齐全和师资力量雄厚的综合优势，在培养模式的转变、教学计划的修订、教学内容与方法的革新，以及教材建设等方面进行了全方位、大力度的改革，取得了显著的成效。2001 年，北京大学数学科学学院的这项改革成果荣获全国教学成果特等奖，在国内外产生很大反响。

在本科教育改革方面，我们按照加强基础、淡化专业的要求，对教学各主要环节进行了调整，使数学科学学院的全体学生在数学分析、高等代数、几何学、计算机等主干基础课程上，接受学时充分、强度足够的严格训练；在对学生分流培养阶段，我们在课程内容上坚决贯彻“少而精”的原则，大力压缩后续课程中多年逐步形成的过窄、过深和过繁的教学内容，为新的培养方向、实践性教学环节，以及为培养学生的创新能力所进行的基础科研训练争取到了必要的学时和空间。这样既使学生打下宽广、坚实的基础，又充分照顾到每个人的不同特长、爱好和发展取向。与上述改革相适应，积极而慎重地进行教学计划的修订，适当压缩常微、复变、偏微、实变、微分几何、抽象代数、泛函分析等后续课程的周学时。并增加了数学模型和计算机的相关课程，使学生有更大的选课余地。

在研究生教育中，在注重专题课程的同时，我们制定了 30 多门研究生普选基础课程（其中数学系 18 门），重点拓宽学生的专业基础和加强学生对数学整体发展及最新进展的了解。

教材建设是教学成果的一个重要体现。与修订的教学计划相

配合，我们进行了有组织的教材建设，计划自1999年起用8年的时间修订、编写和出版40余种教材，这就是将陆续呈现在大家面前的《北京大学数学教学系列丛书》。这套丛书凝聚了我们近十年在人才培养方面的思考，记录了我们教学实践的足迹，体现了我们教学改革的成果，反映了我们对新世纪人才培养的理念，代表了我们新时期的数学教学水平。

经过20世纪的空前发展，数学的基本理论更加深入和完善，而计算机技术的发展使得数学的应用更加直接和广泛，而且活跃于生产第一线，促进着技术和经济的发展，所有这些都正在改变着人们对数学的传统认识。同时也促使数学研究的方式发生巨大变化。作为整个科学技术基础的数学，正突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透。作为一种文化，数学科学已成为推动人类文明进化、知识创新的重要因素，将更深刻地改变着客观现实的面貌和人们对世界的认识。数学素质已成为今天培养高层次创新人才的重要基础。数学的理论和应用的巨大发展必然引起数学教育的深刻变革。我们现在的改革还是初步的。教学改革无禁区，但要十分稳重和积极；人才培养无止境，既要遵循基本规律，更要不断创新。我们现在推出这套丛书，目的是向大家学习。让我们大家携起手来，为提高中国数学教育水平和建设世界一流数学强国而共同努力。

张 继 平

2002年5月18日

于北京大学蓝旗营

前　　言

本书是为综合性大学数学专业本科生高年级学生及研究生编写的复分析教材。它不仅是面向主修复分析的学生的，而且也是面向数学专业中主修其他各有关领域的学生的。作者希望通过此书向他们介绍有关现代复分析（不含多复分析）中的某些基本概念、基本理论与重要发展。它既是一部供一学期使用的教材，也是一部供有关研究人员使用的专业参考书。

本书的主要内容有：经典几何函数论，拟共形映射，Riemann 曲面和 Teichmüller 空间。之所以选择这些内容，这自然与本书作者的研究兴趣有关，但同时也考虑到它们在现代数学中与其他分支领域有较多的联系。在本书中，几何函数论并不是我们讨论的重点。我们只介绍几何函数论中那些最基本的部分，以便为后面的讨论做必要的准备。拟共形映射的理论是著名数学家 Lavrent′yev 与 Ahlfors 从不同的出发点创立的。它在 Riemann 曲面的模问题、单值化理论和 Klein 群等研究中显示了重要作用，其应用范围在不断扩大，甚至超出了复分析的范畴。对于初学者而言，Riemann 曲面理论是本书中最要紧的部分。解析函数的许多性质只有在 Riemann 曲面上才显得更为清晰、和谐与统一。大家知道，紧 Riemann 曲面的理论与代数几何及代数数论有直接的联系。作为一维复流形，Riemann 曲面所涉及的理论与方法，对于一般复流形和复几何的研究而言，是一个最基本的参照物。Riemann 曲面的理论与方法的推广，深刻地影响着现代数学的许多其他分支。本书的最后两章介绍 Teichmüller 空间的理论。它是 Teichmüller 关于 Riemann 模问题的著名结果的深化。这一理论是在 Ahlfors 的倡导下发展起来的；后来，由于其广泛应用而备受关注。它与低维拓扑（Thurston 的工作）、复解析动力系统（Sullivan 的工作和 McMullen 的工作）和微分几何（Tromba 的工作和 Wolf 的工作）之间有着深刻的联系，并出人意外地应用于理论物

理的弦理论之中。

作者自 1983 年至 1996 年，曾先后在北京大学和其他院校多次为数学系的高年级本科生和研究生讲授复分析课程。其间大多数是讲 Riemann 曲面，有时也讲拟共形映射或 Teichmüller 空间。当时，作者编写了三部油印讲义：《黎曼曲面基础》、《拟共形映射》和《Teichmüller 空间引论》，作为讲课的教材。后来，这些讲义已多年没有重印了。去年，当作者再次为北京大学数学学院开设复分析课时，便面临着讲义的问题和讲什么的问题。这时便萌发了将上述三部分内容合写成一本书，并希望能在一学期之内讲完的想法。这一想法的主要出发点是复分析课的内容不宜过窄，并应体现学科之间的联系。于是，对于上述讲义的材料进行了筛选、修订甚至重写，并增添了经典几何函数论的章节，形成了本书的初稿。2003 年 2 月至 7 月之间，作者用该书初稿在北大数学学院为高年级学生和研究生讲授了复分析课，讲完了其主要内容，实现了作者的初衷。

为使读者容易把握事情的本质，在编写此书时作者反复斟酌了内容的组织与表述方式，以尽可能作到叙述上简单明了，突出主线。我们希望把主要篇幅用于解释重要概念和定理的意义以及方法的实质，而不是把时间花费在证明的技术细节和形式的验证上。书中许多定理的证明在过去的教学过程中逐步形成了自己的简单形式。在此次的书稿中，我们对于单值化定理的传统证明作了较大的更动。我们没有使用传统的次调和函数的 Perron 族方法，而是利用 Montel 正规定则给出了单值化定理一个简单的证明，缩减了讨论的篇幅。为了加深读者对所涉及理论的理解，在书中我们对相关理论的历史发展作了简要评述。

作为数学系高年级学生或研究生的选修课，原本没有什么规定的大纲；其材料的选取是“仁者见仁”“智者见智”。在使用这部教材授课时，主讲教师完全可以根据自己的兴趣与实际情况，对本书的内容进行增删。此外，将一部分内容留给读者自己去学习、研究，可能要比什么内容都在课堂上讲授效果更好。

书中每一章都配备了适量的习题，其中大多数题目是不难的，但也有少数题目要花费较多的时间。我希望青年学者不仅要有坚实而

广泛的专业知识，而且要有较强的独立动手能力。

在编写本书的过程中得到许多朋友的帮助。我的同事伍胜健教授参与了编写大纲的审定。郭辉教授、漆毅教授及王仙桃教授审阅了书稿，帮助作者改正了许多不当之处。此外，2004年崔贵珍教授与刘劲松博士以此书的书稿为主要参考书分别在浙江大学和北京大学为研究生讲授复分析课，他们对书稿提出了宝贵的建议。北京大学出版社的刘勇同志对此书的出版一直十分关心，并做了大量编审工作。作者在此对他们一并表示衷心的感谢！

鉴于作者水平有限，本书一定还存在不少毛病，欢迎读者批评指正。

李　忠

于北京大学

2004年6月20日

目　录

第一章　Riemann 映射定理

Riemann 映射定理在复变函数论中是一块重要的基石. 本章的主要目的是证明这一定理. 同时围绕着 Riemann 映射定理的证明与应用,来介绍解析函数的正规族理论、模函数及共形映射的边界对应等,并证明 Picard 定理等.

Riemann 映射定理在 Riemann 曲面论中的推广就是所谓单值化定理. 这将是第七章中讨论的主题.

§1　解 析 映 射

解析函数所实现的映射称为**解析映射**,或**全纯映射**.

我们知道,解析映射的基本特征是它在非临界点的局部保角性. 它的另一个特征(拓扑特征)是将开集变为开集,除非它退化为常值映射.

将开集变为开集的映射通常称为**开映射**.

定理 1　设 $f: D\to\mathbb{C}$ 是定义在区域 D 内的解析函数,且不恒等于常数,则 f 是区域 D 上的一个开映射.

证　显然,只要证明对于任意一点 $z_0\in D$, $f(z_0)$是集合 $f(D)$的内点就足够了.

由于 f 不是常数,故由幂级数展开式可知 f 在点 z_0 附近可表为

$$f(z) = f(z_0) + g(z)(z - z_0)^n,$$

其中 $z\in\Delta_r(z_0)=\{z: |z-z_0|<r\}$, n 为一自然数, r 是充分小的正数, g 在 $\overline{\Delta_r(z_0)}$上解析且不等于零. 设

$$c = \min\{|g(z)|: z \in \overline{\Delta_r(z_0)}\}.$$

那么,在圆周 $C_r(z_0)=\{z: |z-z_0|=r\}$上 $|f(z)-f(z_0)|$大于或等于 cr^n. 于是对于任意一点 w,只要

$$|w - f(z_0)| < cr^n,$$

则由 Rouche 定理推出，f 在 $\Delta_r(z_0)$ 内将取到 w 值 n 次. 可见邻域 $\{w: |w-f(z_0)|<cr^n\}\subset f(D)$，即 $f(z_0)$ 是 $f(D)$ 的一个内点. 证毕.

通常我们所说的区域是指连通的开集. 显然，解析映射保持开集的连通性. 因此，我们由定理 1 立即推出：

定理 2　非常值的解析映射总是把区域映射为区域.

若解析映射 $f: D\to G$ 是区域 D 上的单射，且到 G 是满射，则称 f 是区域 D 到 G 的**共形映射**.

若区域 D 与 G 之间存在一个 D 到 G 的共形映射，则称 D 与 G **解析同构或共形等价**，而 D 到 G 的共形映射则称为**解析同构映射**.

一个区域 D 上的全体 D 到自身的解析同构映射，在复合运算作为乘法的意义下，显然组成一个群，通常记做 $\mathrm{Aut}(D)$，并称之为 D 的**解析自同构群**.

确定一个区域或一个 Riemann 曲面的解析自同构群常常是很重要的，尤其是对一些常见的区域.

单位圆 Δ 的解析自同构群是

$$\mathrm{Aut}(\Delta)=\left\{z\longmapsto e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}:\ \alpha\in\mathbb{R},a\in\Delta\right\}.$$

证明是容易的. 可以直接验证，上述形式的分式线性变换都是 Δ 到自身的一个共形映射. 而要证明每一个 Δ 的解析自同构映射都具有上述形式也并非难事；但有趣的是，这要用到 Schwarz 引理. 详细证明留给读者.

顺便指出，Schwarz 引理虽然通常人们称之为引理，但其作用却很大. 我们将有专门的一章讨论它的推广及应用.

作为练习及复习，请读者自己证明

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C})=\{z\longmapsto az+b:\ a,b\in\mathbb{C},a\neq 0\}.$$

共形映射的概念可推广到含有点 ∞ 的区域上，这时映射函数或其逆允许有一个 1 阶极点.

$\overline{\mathbb{C}}$ 的解析自同构群 $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ 是全体形如

$$z\longmapsto\frac{az+b}{cz+d}\quad(ad-bc=1)$$