

SHIYAN SHUXUE  
DAOYIN

# 实验 数学导引

• 王维平 著

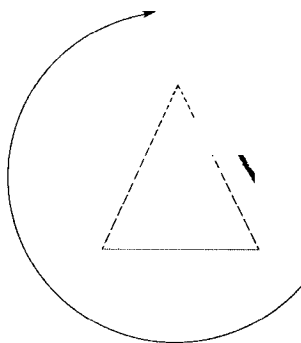


 中国科学技术出版社

# 实验数学导引

shixianshuxuedaoyin

数学原来可以这样做



王维平  
著

中国科学技术出版社  
·北京·

## 图书在版编目(CIP)数据

实验数学导引/王维平著. —北京:中国科学技术出版社.  
2004.8

ISBN 7-5046-3878-1

I. 实… II. 王… III. 数学-实验-研究 IV. 01-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 085207 号

中国科学技术出版社出版

北京市海淀区中关村南大街 16 号 邮政编码:100081

电话:010-62103210 传真:010-62183872

<http://www.kjpbooks.com.cn>

中国科学技术出版社发行部发行

北京卫顺印刷厂印刷

\*

开本: 850 毫米×1168 毫米 1/32 印张: 8.5 字数: 190 千字

2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月第 1 次印刷

印数: 1~5000 册 定价: 12.80 元

---

(凡购买本社的图书, 如有缺页、倒页、  
脱页者, 本社发行部负责调换)

## 内容简介

本书主要内容包括：实验数学的有关思想介绍，指数函数、对数函数、幂函数、复数知识的实验学习，差分观念下的数列研究，一阶线性差分方程及其在日常生活中的应用，一阶非线性差分方程的数值解、图求解，对圆周率的长达 2000 年的计算历程的回顾. 还有一些数论趣题：连分数、分数与小数的互化、循环小数中的数字排列规律等. “遭遇 Pisot 数”可看做是一篇数学作文的范文，“Mathematica 软件使用心得”是笔者在使用软件过程中的经验之谈. 另外，加了一个附录：Mathematica 软件介绍，给读者补充必需的数学软件知识. 本书还涉猎了一点混沌、分形的内容，没有单独建章，只是从上述问题中自然引出.

本书可供数学教学改革第一线的中学教师和师范院校师生阅读.

责任编辑 徐扬科 王 潜  
封面设计 耕者设计工作室  
责任校对 林 华  
责任印刷 李春利

## 序

笛卡尔曾经批评亚里士多德的三段论法则，认为这类演绎模式只能用以证明已知的事情，“却不能帮助我们发现未知的事情”。诚然，在数学研究中，如果不是说更为首要的话，发现真理至少与证明真理同等重要。相应地，全面的、正确的数学教育，不仅应该教授学生如何证明定理，而且应该启迪学生如何发现定理。发现与证明，这是创造性数学思维的两个方面，二者相辅相成，不可或缺。

数学发现的过程需要借助诸如猜测、归纳之类的思维活动，后者则往往要通过计算来完成，典型的例子如高斯、勒让德就是通过大量数值计算猜测出素数分布的公式的。在现代，这种方法的威力由于电子计算机及各种算法的出现而极大地加强了。

像上述那样研究数学的方式，与自然科学领域中的实验手段相类似，不妨称之为“实验数学”，这正是本书研讨的主题。作者王维平同志根据多年的探索积累与教学经验，精选了一系列较为典型的案例，从古老的圆周率计算到散发着现代气息的分形迭代，深入浅出地介绍、展示了实验数学的基本思想方法及其算法实现。特别值得一提的是，全书在计算机实施方面一而贯之地采用 Mathematica 软件，这是一种具有强大的作图、数值计算与符号计算功能的通用易学的数学软件。书中提供了大量取之即用的应用程序，显示出作者在这方面驾轻就熟的功底。质言之，本书对实验数学有独到的见解，在取材、软件依托等方面都有自己的特色，这一切体现了本书的学术价值。

当前,我国的数学教学改革正在向纵深发展,新的数学课程标准倡导自主性探究性学习,强调数学思维能力的培养,注重与信息技术的整合.从贯彻这些理念的角度看,本书可谓是恰时之作.就教师而言,本书提供了丰富的方便、适用的实验素材与教学实例;对学生来说,设想当他们运用书中提供的算法程序重新发现祖冲之的圆周率或亲手创作出一幅美妙的分形图案,该有何等的乐趣!书中还适当穿插有相关的数学史和数学文化方面的内容.可以相信,本书对于数学教学改革第一线的中学教师和师范院校的师生来说必将开卷有益.

本书是作者多年辛勤耕耘探索的成果,值此付梓之际,应作者之邀欣然作序,以表庆贺与期待.庆贺本书的出版,期待实验教学园地的丰收.

中国科学院数学与系统科学研究院 李文林\*

2004年5月3日

---

\* 本工作为作者在中国科学院数学与系统科学研究院访问期间完成。

# 前 言

本书旨在探索一条实验数学之路.作者选取一些较初等的知识,在 Mathematica 软件的支持下围绕某个数学问题,给读者展示自主探究、系统学习的过程.这个过程包括:观察分析数学事实,提出有意义的数学问题,猜测、探求适当的数学结论或规律,给出解释或证明.全书尽量避免定义、定理的强硬灌输,一切通过实验,水到渠成.

本书不同于一般的软件操作指南,也有别于普通的数学实验教材.同类书中往往是对已有知识的验证,比如学过微积分的人再来做有关微积分的实验.本书是想作为学习数学的一种全新的途径、手段,顺应“做数学”的世界潮流,为素质教育尝试一套具体的、可操作的、行之有效的实践方案,进而配合高中新课标的试行,为广大的中学一线教师、师范院校的师生提供取之即用的实验素材、实验方案.

本书的特点在于始终依托通用数学软件 Mathematica.利用其强大的作图、数值计算、符号运算功能,书中出现的所有图形均由 Mathematica 绘制.除去简单的可用心算得到的结果以外,稍难一些的计算问题也都用它完成,真正脱离了纸、笔和计算器.试想,免去了冗杂的推导计算,耗时费力的描点作图,我们的学习过程会多么的惬意?此间,您不用担心软件会成为“拦路虎”.无论是图形还是运算,其实现程序本书全部给出.对一个有计算机操作经历的人来说,只要具备初等数学的基础知识就能在短时间内了解本书所涉及的软件的使用方法.如果之前没有这方



面的训练，可以先学附录，再返回来通读全书。或在遇到困难时查阅附录，边学软件操作边读本书。考虑到读者对象的层次，本书少有成套的大段程序，常采用“分解动作”，多数是几个命令的组合，或干脆就是一条一条的独立命令语句。我们始终把软件作为学习的工具，而不是研究的对象。

本书力图提供抽象问题的形象表示，如表格、图形等，以求满足学生好奇，方便学生发散思维的展开，让他们早早走上一条发现、探索之路。如混沌理论本是研究复杂的非线性系统的新兴数学分支，在我们这里它从中学的抛物线开始，通过迭代的联结图、蛛网图、分叉图，让读者一步步地自己动手解剖“麻雀”，可随心所欲地更换参数设置，随之而来的变化立即显示，使混沌系统的敏感性特点得以充分暴露。如果没有计算机，那将是不可想像的事情。至于 Mathematica，就像是打算盘的口诀，计算器上的功能按键，无需知道原理和过程，其结果才是我们感兴趣的。

但愿此书的出版，能使读者扩大数学视野，逐步认识数学的科学价值、应用价值和文化价值，崇尚科学的理性精神，体会数学的美学意义。

本书提供了大量的 Mathematica 应用程序。这使得许多结果可由读者通过录入得到，这样既有了过程的体会，又避免了编程的繁难。我想，这也就是本书的学术价值所在了。这些程序包括了形式多样的图表、图形的绘制，种种特殊算法的实现。例如，我们将《数学的原理与实践》（文献 [10]）中出现过但只字未提作图方法的一类图形，通过 Mathematica 准确而优美地得到了。其中还有一些数据表格，如果手工制作，也是相当琐碎的，我们也给了程序，输入后立得，并具有普遍的适用性。这些图表对于本书是非常重要的，没有它们就谈不上形象、直观、生动的特点，也就谈不上让读者喜闻乐见的形式。又如，对于圆周率的研究，

循的是古人的旧路，但用的是现代的手段，这并不矛盾，刘徽、祖冲之“割圆”时手工计算的过程，我们用计算机来模拟，只用很短的时间，很少的投入，就学习了蕴含其中的深刻的数学思想（包括极限思想）。又如：“投针法”是蒲丰等人计算圆周率的实验方法，如果真去投掷，数千次地进行，会是极大的时间上的浪费，书中也采用计算机模拟方法。值得一提的是，本书所用程序并非惟一，但力求比同类书中的简单易懂，因此不惜增加篇幅，目的是体谅读者的软件功底，不制造过多艰涩的编程语句。

本书主要内容包括：实验数学的有关理论，指数函数与对数函数、幂函数、复数知识的实验学习，差分观念下的数列研究，一阶线性差分方程及其在日常生活中的应用，一阶非线性差分方程的数值解、图示解，线性回归，对圆周率长达 2000 年的计算历程的回顾，还有一些数论趣题：连分数、分数与小数的互化、循环小数中的数字排列规律等。“遭遇 Pisot 数”可看做是一篇数学作文的范文。当你遇到一个未知区域时，当你接触到一个新的概念时，你该怎么办？是避而不谈，绕道远行，还是兴趣盎然地去面对，去探索；当你调度平生所学对它加以研究后，又该怎样收集保存你的所获？……“Mathematica 软件使用心得”是笔者在使用软件过程中的经验之谈。另外，加了一个附录：Mathematica 软件介绍，给读者补充必需的数学软件知识。本书还涉猎了一点混沌、分形的内容，没有单独建章，只是从上述问题中自然引出。书中还贯穿了许多数学史和数学文化方面的内容，使读者能在读本书的同时，如同亲涉数学长河，追溯历史渊源。

感谢中国科学院数学与系统科学研究院的邀请，使我有机会成为该院的访问学者，那里浓厚的学术氛围和良好的工作条件，促使作者在较短的时间内完成了本书的编撰。特别需要感谢的是数学研究所的李文林研究员，如果没有李老师的支持和帮助，就

不会有本书的问世.李老师还在百忙中为本书作序,在此一并深表谢忱!感谢中国科学技术出版社的总编颜实老师和本书的责编徐扬科老师,是他们的慧眼和点拨促成了本书的付梓.

由于成书时间仓促,加上作者水平有限,错误和疏漏之处在所难免.敬请读者批评指正!如有任何意见或建议,请发 E-mail 至 [wwpxz1234@163.com](mailto:wwpxz1234@163.com).

王维平

2004 年 4 月于北京中关村



# 目 录

第一章 绪论——通向实验数学之路·····	(1)
第二章 指数函数与对数函数·····	(17)
2.1 指数函数 $a^x$ ·····	(18)
2.2 指数函数 $e^x$ ·····	(22)
2.3 指数函数 $2^x$ ·····	(28)
2.4 对数函数·····	(33)
第三章 幂函数·····	(43)
3.1 研究幂函数 $y = x^n$ 的性质, 观察幂指数 $n$ 对函数值的影响·····	(44)
3.2 幂函数与指数函数、对数函数的比较·····	(49)
3.3 动画演示·····	(55)
第四章 复数知识的实验学习·····	(57)
4.1 复数基础知识研究·····	(58)
4.2 复数不同形式间的互化·····	(61)
4.3 史海拾趣·····	(63)
4.4 复数的乘方与开方·····	(66)
4.5 复数的几何意义·····	(68)
4.6 一幅示意图的制作·····	(73)
第五章 差分观念下的数列研究·····	(77)
5.1 数列与差分·····	(78)
5.2 等差数列·····	(78)
5.3 二阶等差数列·····	(81)



5.4	通过差分算子求数列的通项公式	(83)
5.5	关于数列通项公式的一个典故	(88)
5.6	等比数列	(90)
5.7	差分方程	(92)
第六章	用线性差分方程解决实际问题	(95)
6.1	银行存款与利率	(96)
6.2	购房抵押贷款	(97)
6.3	饮料的冷却问题	(105)
第七章	一阶非线性差分方程的数值解	(111)
7.1	酵母培养物增长的简化模型	(112)
7.2	酵母培养物增长的制约模型	(115)
7.3	完全不同的几个问题	(124)
7.4	一阶非线性差分方程的解	(125)
第八章	一阶非线性差分方程的图示解	(129)
8.1	迭代的线性联结图	(130)
8.2	迭代的蛛网图	(134)
8.3	接触性传染病模型的图示解	(138)
8.4	混沌系统的分叉图	(140)
8.5	分形—混沌游戏	(147)
第九章	计算了2000年的常数——圆周率	(151)
9.1	古率	(152)
9.2	徽率	(154)
9.3	祖率	(156)
9.4	圆周率的计算方法	(165)
9.5	计算 $\pi$ 的意义	(169)
第十章	线性回归及其应用	(173)
10.1	从一道例题谈起	(174)



10.2	Fibonacci 数列 .....	(179)
10.3	线性回归 .....	(184)
第十一章	一些有趣的数字游戏 .....	(187)
11.1	关于自然数 123456789 .....	(188)
11.2	分数与小数互化 .....	(192)
11.3	循环小数中的数字排列 .....	(195)
11.4	含 10 个不同数码的 3 个数 .....	(197)
第十二章	遭遇 Pisot 数 .....	(201)
12.1	不期而遇 .....	(202)
12.2	何许人也 .....	(203)
12.3	三次多项式 $x^3 - x - 1$ .....	(207)
第十三章	Mathematica 软件使用心得 .....	(213)
13.1	Mathematica 中表达式的快捷输入 .....	(214)
13.2	Mathematica 中几个特别的符号及其用法 .....	(218)
附录:	Mathematica 软件介绍 .....	(225)
附录 1	Mathematica 4 的几个主要子菜单 .....	(226)
附录 2	Mathematica 出错信息 .....	(233)
附录 3	Mathematica 命令汇总 .....	(237)
参考文献	.....	(252)

第一章

# 绪论——通向 实验数学之路

世上本没有路，走的人多了，  
也便成了路。

——鲁迅





时至今日已经是 21 世纪的第四个头了，经过多年的教育改革，如果还有人认为只有物理、化学、生物等学科需要做实验，而数学根本不需要，那我们庆幸的是有这种观念的人已越来越少了。《数学实验》和《数学建模》这两门姊妹课程从一开始引起轩然大波，到今天登堂入室，成为高等教育阶段甚至是非数学专业的必修课，这有一个漫长的认识过程。在这个过程中，我们看到了一批“鼓吹建模不遗余力”的前辈，其中就有北京理工大学的叶其孝教授。他不辞劳苦亲临欠发达地区做学术报告，当地的老师对条件所限照顾不周深表歉意，他却率真地说：“只要是鼓吹建模，那我就不遗余力”。叶教授是把建模的推广作为自己的事业，他认为对他的最好答谢是我们能在建模方面从零开始做出成绩。正是在那时，作者暗暗下定了决心，也是在叶教授的治学理念和良苦用心激励下，又在后来的教学实践中萌生了撰写本书的念头。

当前，对大学数学实验的内容、方法等的研究，国内外已经并正在进行着大量的工作，可谓如火如荼，方兴未艾。在中学，数学教育所面临的形势和存在的问题同大学的情形是基本一致的，但由于中学生的知识面较窄，必须开发适合他们认知特点的实验材料，而这方面的工作才刚刚起步。作者认同并在本书中力行以下选材原则：①量力性：适合中学生的知识水平和年龄特点，在实验时不需要补充大量的知识就可入手；②实用性：要有一定的实际背景和意义，选择这种实际问题，可以使学生从实验过程中体会数学的价值，提高学习数学的自觉性；③趣味性：饶有趣味的问题，能引导学生思考，启迪学生的思维，开阔学生眼界，提高学生学习的兴趣；④能体现计算机的作用：实验问题的解决需要借助和通过计算机的计算和模拟功能。这是时代的要求，也是数学教育改革和发展的方向。





计算机的作用必须有与之相适应的软件的支持才能将其功效发挥得淋漓尽致.那么,我们为什么要选 Mathematica 呢? Mathematica 的精华在于符号式的运算处理与绘图.除了一般的计算外, Mathematica 还能做微分、积分、解微分方程、向量与矩阵的运算以及方程式求解、运算式的化简与展开、因式分解、数值分析等等.从前被人们认为极困难的数学问题都能在 Mathematica 的辅助之下轻易解决.它“不只是一套软件,更是一次划时代的革命”,这是美国·Macworld 杂志对 Mathematica 的评价.“世界各大学、研究所早已有计划地全面推广 Mathematica 教学. Mathematica 的独领风骚,确实让其他竞争者如 Matlab、Maple、Macsyma、Axiom 及 Derive 相形失色.”(参考文献 [3]) 它的命令大都用英语全称,好记易懂,如解方程的 Solve,作图的 Plot,求矩阵转置的 Transpose 等;它功能强大且大小适中,是一个通用数学软件,一旦掌握,终生受用,不需要零零碎碎地学习更多的小软件.与其让我们的老师和学生一会儿学这个绘图,一会儿用那个计算,还不如从中学开始主要学习与掌握一个多功能的综合性软件,以收事半功倍之效,节约时间节省开支.

这里所说的开支包括购买软件及配套图书两部分.有条件可购买正版软件,也可以从一些大学、研究机构的网站上下载.所需配套图书,向大家推荐两本:《数学运算大师 Mathematica 4》(洪维恩编著,魏宝琛改编.人民邮电出版社出版),或者美经典《Mathematica 操作指南》(尤金著.邓建松,彭冉冉译.科学出版社).通读其中任何一本就足够了.

## 中学开设实验数学课的历史背景

数学的应用范围急剧扩展,华罗庚形象地描绘道:“宇宙之