面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

经济管理类课程教材·金融系列

Finance

金融数学

主编 李向科 戚发全

中国人民大学出版社

向 21 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century
经济管理类课程教材 金 融 系 列

金融数学

主编 李向科 戚发全

中 国 人 民 大 学 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

金融数学/主编李向科，戚发全.
北京：中国人民大学出版社，2004
面向21世纪课程教材．经济管理类课程教材．金融系列

ISBN 7-300-05460-9/F·1720
Ⅰ．金…
Ⅱ．①李…②戚…
Ⅲ．金融-经济数学-高等学校-教材
Ⅳ．F830

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第028584号

面向21世纪课程教材
经济管理类课程教材·金融系列
金融数学
主编　李向科　戚发全

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）　010－62511239（出版部）		
	010－82501766（邮购部）　010－62514148（门市部）		
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	河北三河汇鑫印务有限公司		
开　　本	787×965毫米 1/16	**版　　次**	2004年6月第1版
印　　张	17　插页1	**印　　次**	2004年6月第1次印刷
字　　数	314 000	**定　　价**	19.00元

出版说明

改革开放以来，中国的金融走上了高速发展的快车道，获得了前所未有的发展，有关院校都设立了金融专业，以便培养我国急需的人才。

一套高质量的教材是提高教学质量的前提之一。教材规定了教学内容，是教师授课取材之源，是学生求知和复习之本，没有优秀的教材，无法提高教学质量。中国人民大学出版社推出“经济管理类课程教材·金融系列”旨在推动国内金融人才培养工作的发展。

组织编写这套教材时，我们遵照以下原则：

1. 教材实行本土化。为了更快地与国际接轨，许多人主张采用“拿来主义”原则，直接引进国外的教材。实践证明，我国与发达国家相比，国情不同，文化背景不同，思维方式不同，语言表述方式不同，广大的专家教授一致认为：

我们培养的是中国金融人才，是为中国的金融服务的，教材还是本土化为宜。在了解我国现况之后，再学习国外的知识。把中国的背景知识与国际接轨才是我们最需要的。该套教材均为本土原创作品。

2. 精选作者，保证教材质量。金融与国家的政策联系紧密，应用性强，培养的学生既要懂理论又要会应用，既要与国际接轨，又要考虑中国的国情。该套教材涵纳全国“政产学研”方面的作者，从源头上保证了这套书的质量。

3. 要始终保持教材的“精”与“新”。现代金融日新月异，课程设置不断变化。该套教材根据形势的发展，不断推出新课程教材，并不断修订、完善。

4. 形式多种多样，方便教材使用者。书中每章都设有“本章小结”、“本章要点”、“本章关键术语”和“本章练习题”等栏目，此外，各书还配有“学习指导书”，方便读者学习和使用。

总之，这套系列教材紧密结合当前国内外金融研究的最新成果与金融政策发展的实际情况，全面讲述金融基本理论和基本知识。我们相信“经济管理类课程教材·金融系列”的推出，能够为读者掌握现代金融知识，培养人才起到应有的作用。

中国人民大学出版社

2004年1月

前 言

从国际上对金融学的研究来看，对于数学工具和计算机软件的需求正日益增加。数学在经济领域中的使用越来越多，而且其趋势不减。在经济学的论文中，金融工程、计量经济学、随机分析等大量带有浓厚“数学味道”的名词出现的频率也非常高。因此，作为一种解决实际问题的工具，在经济金融领域中，一定会看到数学的影子。从诺贝尔经济学奖的颁发来看，在经济学论文中涉及数学似乎成了一条不成文的规定。这就应验了恩格斯在100多年前曾说过的：任何学科只有当数学加入了之后才能称得上完整。

从国际上对数学的应用来看，他们所使用的数学工具有的已经相当高深。比如在期权定价中，就涉及随机微分方程，在有关“周期、平衡”等方面的研究中涉及微分方程。在保险精算

中涉及的“随机”内容就更多了。而关于随机分析的内容，在我国只有数学专业的研究生才能学到。

笔者认为，数学工具在金融或经济中的使用可分为两条线路进行：

第一，以实证为主，考察某种方法在实际中的应用效果。它广泛涉及的数学学科是数理统计、计量经济、时间序列分析等。实证分析这种方式由于受到多种因素的限制，有一定的局限性。

第二，以理论分析为主。首先对研究对象进行某些假设（假设是否合理是很难说的问题），建立相应的模型，然后应用最优化技术、随机分析等比较“深”的数学知识进行分析研究。

其实，从数学本身来讲，是不区分研究对象究竟属于哪个学科的。无论是自然科学还是社会科学，是金融还是非金融，都“一视同仁”地视为研究对象。因为我们在使用数学工具之前，都要对研究对象进行某些假设，或者说在建立数学模型前必须对感兴趣的对象进行适当的“模型化”。经过“处理”的研究对象，如果能用数学方式进行表达，可以认为这两者是相同的。

本书的书名是《金融数学》。对于金融数学来说，目前没有很明确的定义。应该说，能够在金融中使用的数学知识都应该归入金融数学的范围。但是，如果真的那样做，几乎所有的数学知识都将在本书中出现，那么这本教材的篇幅就太大了。鉴于此，作者在对本教材进行构思的时候是这样考虑的：

如果从数学的应用方法来看，掌握微积分、线性代数和概率统计是最基本的数学要求。这些内容在大学的本科教学中都是作为基础课程而在公共课程中进行教学的。对于这部分内容来说，不同专业的教学安排有所不同。因此，在本教材的第一章第一节中用了很少的篇幅，简单地叙述了部分直接在本书后面将用到的数学知识。

对于那些属于数学专业的专门课程，本书将不涉及。例如，数理统计、实变函数、测度论、泛函分析、随机过程等，由于需要的“先期课程”太多，非数学专业的学生很难运用。对于本教材中所用到的“数学味”比较浓的内容，本书在介绍时只涉及基本概念。对于更深的内容，读者可以参考有关的文献。本教材仅仅提供一个工具。

有些数学内容（比如计量经济、最优化技术、时间序列等）在经济研究中已经被广泛使用，并且在大学中已经普遍被列为单独的一门课程。因此，本教材将不涉及这些内容。

本教材的出发点是为今后在金融领域继续深入应用数学知识打好一个基础，既要了解一些稍微“复杂”的数学内容，又要知道从数学的观点如何对待和处理

金融的问题。出于这样的考虑，笔者选择了有关资产定价方面的内容作为本教材的重点。这部分内容的数学知识要求相对较低，一般非数学专业的学生都可以接受。当然，在写作过程中，笔者尽可能使一些数学的证明和概念“通俗化”。

如前所述，本书所涉及的主要内容是有关资产定价方面的数学内容。在有些文献中将其称为数理金融或数理经济。全书共分为6章。第一章是一些将要在后面章节中使用的数学内容，包括线性代数、简单的最优化方法和模型建立，以及效用函数的数学解释。对于那些对数学的掌握不是很充分的财经类专业的学生，这一章是很有必要的。因为按照我国大学正常的教学安排，目前财经类的学生有很多数学内容是教学中没有的。

第二章是关于风险偏好和随机占优的问题。这是定价理论的基础。后面所用数学模型的假设条件多出于此。但是涉及的内容不多，主要是对风险偏好的一些描述。这样能让读者从数学角度上对风险偏好等概念有一个初步的认识。

第三章至第五章是3个20世纪50年代出现的最具有代表性的现代投资理论模型——马克维茨均值方差模型、资本资产定价模型（CAPM）和套利定价理论(APT)。文中详细地对这些模型的过程和相关定理进行了说明。这是本书的重点。这里采用了“半数学化”的写法。不像一般的数学书那样一板一眼地按照数学的定义→定理→条件→结论→证明的严格“套路”进行，而是在其中加入了大量的文字方面的说明，因为笔者认为这毕竟不是数学专业的书籍。

第六章所涉及的是连续时间的金融问题。前面介绍的3个模型，如果从时间上讲，都有一点“过时”。第六章的内容是比较“现代”的，数学方面的内容高深一些。显然，从数学的角度看，“连续”比“离散”的“难度”要高一些。笔者试图在这部分中让读者简单触及一些“令人头疼”的高深数学知识，同时，接触一些“前沿”的问题。这对于读者今后的进一步“深造”是有益处的。

有一点需要说明，在本教材中，笔者使用了“资产组合”和“证券组合”两个名词。读者会看到，在书中有时用“资产”有时用“证券”。一般来说，资产(asset）的概念范围要大一些，证券（securities）的概念范围要小一些。从数学角度看，这两个概念没有什么区别，因此在阅读本教材的时候，可以认为这两个概念是相同的。

笔者在中国人民大学多年的数学教学中，深深地体会到，财经专业的学生对于数学知识的态度普遍不严谨。只像背天书一样“背”定理的结果，不注意结果所必须满足的条件。这是因为，他们不习惯数学的严谨表达方式（多数人在心里甚至认为这样的表达方式是奇怪的，甚至对此有抵触感）。如果读者在阅读完本书后，对于经济或金融中经常“令人头疼”的数学模型的使用，能有一个初步的

认识，并对数学的学习有所帮助，将是笔者最大的满足。

本书的写作分工如下：戚发全（第一章）、汪勇祥（第二章）、李向科（第三、四、五章）、吴卫星和汪勇祥（第六章）。李向科最后从整体上对全书进行了校阅。在本书构思初期的“收集资料”过程中，戚发全做了大量的资料归纳总结工作。林清泉、龙永红两位教授对本教材的部分内容也提供了有益的建议。此外，王宇、金明哲、金阳、王舜尧、崔兆明、王正栋等同志，对于本书中的图形画法、公式写法和部分文字的编辑做了大量的工作。当然，本教材还少不了编辑同志的功劳。对于所有对本教材的出版做出过有益贡献的人，作者在此表示感谢。

作 者

2004年2月于中国人民大学

目　录

第一章

数学预备知识

本章的内容主要是在金融的相关模型中需要使用的数学知识，大部分将在本书的后面用到。本章的主要内容包括：线性代数的基础知识、数学模型的建立、极大值和极小值的求解、效用函数等。

第一节　线性代数基础

在本节中，我们将要给出在随后的学习中经常要用的关于线性代数方面的一些基本概念和结论。其中一部分是一般经济类数学中介绍过的线性代数的内容，另一部分是一般经济类线性代数所不涉及的内容。

一、线性方程组与矩阵

（一）*n* 维实向量空间（vector space）

1．n 维向量。实数域上的 n 个数组成的有序数组（a_1，a_2，…，a_n）称为 n 维实向量，其中 a_i 称为向量的第 i 个分量。n 维向量一般用希腊字母 α，β，γ 等来表示，n 维向量写成列，叫 n 维列向量，写成行，叫 n 维行向量。分量全为 0 的向量称为零向量。

（1）两个向量相等。如果两个 n 维向量的各个分量都相等，则称两个向量相等。即，如果 $\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\beta=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$，则用公式表示为

$$\alpha=\beta \Leftrightarrow a_i=b_i \qquad i=1, 2, \cdots, n$$

（2）向量的加法运算。$\alpha+\beta=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)$

（3）向量的数乘运算。如果 $\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$k\in R$，则向量与数的乘积定义为

$$k\alpha=(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$$

2．向量空间。n 维实向量的全体连同在其上定义的加法和数乘构成 n 维实向量空间，简称 n 维向量空间。

（1）线性表示。如果存在实数 k_1，k_2，…，k_s，使得 $\alpha=k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s$，则向量 α 为 β_1，β_2，…，β_s 的一个线性组合（linear combination），或称向量 α 可由 β_1，β_2，…，β_s 线性表示。

（2）向量组等价。如果向量组 α_1，α_2，…，α_s 中每个向量都可以由向量组 β_1，β_2，…，β_s 线性表示，则称 α_1，α_2，…，α_s 可由 β_1，β_2，…，β_s 线性表示；如果两个向量组可以互相线性表示，则称这两个向量组等价。

（3）线性无关和线性相关（linearly independent and linearly dependent）。如果有不全为 0 的实数 k_1，k_2，…，k_s，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

则称向量组 α_1，α_2，…，α_s 线性相关；否则称为线性无关。即

向量组 α_1，α_2，…，α_s，线性相关（无关）

$\Leftrightarrow$方程组 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 有非零解（只有零解）

(4) 极大线性无关组（maximal linearly dependent set of vectors)。如果向量组 α_1，α_2，…，α_s 的一个部分组 α_1，α_2，…，α_γ 线性无关，并且从 α_1，α_2，…，α_s 中任意添加一个向量后的 $\gamma+1$ 个向量线性相关，则 α_1，α_2，…，α_γ 称为向量组 α_1，α_2，…，α_s 的极大无关组。

(5) 向量组的秩。如果一个向量组的任意两个极大无关组是等价的且极大无关组所含向量个数相同，则极大无关组所含向量的个数称为向量组的秩（rank)，记为 $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$。

（二）矩阵（matrix)

1. 矩阵的定义及其运算。由 $m\times n$ 个数组成的 m 行 n 列的数的矩形排列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵。用大写英文字母 A、B、C 等表示，也可记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，在不引起混淆的情况下记为 $A=(a_{ij})$。

(1) 矩阵的加法运算。如果两个矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，则两个矩阵的加法定义为

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

(2) 矩阵的数乘运算。实数 k 与矩阵 A 的乘法（简称数乘）定义为

$$kA=(ka_{ij})_{m\times n}$$

(3) 矩阵的乘法运算。$m\times n$ 矩阵 A 和 $n\times s$ 矩阵 B 的乘积 C 是 $m\times s$ 矩阵，其第 i 行第 j 列元素是矩阵 A 的第 i 行和矩阵 B 的第 j 列的对应元素的乘积之和。乘法运算满足结合律以及对加法的分配律，但不满足交换律和消去律。

(4) 矩阵的转置。矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的转置记为 A^τ，表示矩阵 A 的行列互换后所得的 $n\times m$ 矩阵。转置的性质：

$$(A^\tau)^\tau=A$$
$$(A+B)^\tau=A^\tau+B^\tau$$
$$(AB)^\tau=B^\tau A^\tau$$

2. 矩阵的秩。矩阵 A 的行向量组的秩称为行秩（row rank)，列向量组的秩

称为列秩(column rank)。因为行秩等于列秩统称为矩阵的秩,记为 $r(A)$,可见,

$$r(A)\leqslant min(\text{行数},\text{列数})$$

矩阵经过运算之后,秩满足

$$r(A^{\tau})=r(A)$$
$$r(A+B)\leqslant r(A)+r(B)$$
$$r(AB)\leqslant r(A)r(B)$$

特别地

$$r(A^{\tau})=r(A)=r(AA^{\tau})=r(A^{\tau}A)$$

3. 方阵和三角矩阵。行数和列数相等的矩阵称为方阵;主对角线下(上)边元素均为 0 的矩阵称为上(下)三角矩阵;主对角线上元素都相等,而其余元素均为 0 的矩阵称为数量矩阵。

主对角线上元素都是 1 的数量矩阵称为单位矩阵,记为 E;对称方阵是指满足 $A^{\tau}=A$,也就是 $a_{ij}=a_{ji}$(i,$j=1$,2,…,n)的矩阵;反对称方阵是指满足$A^{\tau}=-A$,也就是 $a_{ij}=-a_{ji}$(i,$j=1$,2,…,n)的矩阵。

方阵 A 称为可逆的,如果存在方阵 B 满足

$$AB=BA=E;$$
$$n\text{ 阶方阵}A\text{ 可逆}\Leftrightarrow r(A)=n$$
$$\Leftrightarrow(A)\text{的行列式}|A|\neq 0,\text{且 }A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}$$

其中,A^{*}是 A 的伴随矩阵。

4. 矩阵的特征值(eigenvalue)。设 A 是一个方阵,方程$|A-\lambda E|=0$ 的解称为方阵 A 的特征值(或特征根)。对于给定的特征值 λ,方程组

$$|A-\lambda E|X=0$$

的非零解称为属于特征值 λ 的特征向量。

5. 矩阵的迹(trace)。方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$对角线上元素之和称为矩阵的迹,记为 $\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$。矩阵的迹有如下性质:

$$\mathrm{tr}(kA)=k\,\mathrm{tr}(A)$$
$$\mathrm{tr}(A^{\tau})=\mathrm{tr}(A)$$

$$\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$$
$$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$$
$$\mathrm{tr}(A^{\tau}A)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{2}$$
$$\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i$$

其中 λ_1，λ_2，…，λ_m 是A 的全部特征值。

6. 矩阵的相似。对矩阵 A 和B，如果有可逆矩阵 Q 使得$B=Q^{\tau}AQ$，则称矩阵 A 和B 相似（similar）。

可见，相似矩阵有相同的行列式、相同的秩、相同的特征值、相同的迹。

7. 正交矩阵（orthogonal matrix）。如果方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$满足

$$A^{\tau}A=E$$

则矩阵 A 称为正交矩阵。

正交矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$的性质：

$$|A|=\pm 1$$
$$A^{-1}=A^{\tau}$$
$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

正交矩阵的逆仍然是正交矩阵，两个正交矩阵的乘积也是正交矩阵。

（三）线性方程组（linear equation system ）

n 个未知量的线性方程组的一般形式如下：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \quad\cdots\qquad\cdots\qquad\quad\cdots\qquad\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{1.1}$$

其中，a_{ij}（$i=1$，2，…，m，$j=1$，2，…，n）为方程组（1.1）的系数，b_i（$i=1$，2，…，m）为常数项；常数项均为 0 的方程组称为齐次线性方程组。在方程组（1.1）中令 $b_i=0$（$i=1$，2，…，m）所得的齐次线性方程组称为方程组（1.1）的导出组。

若记 $\alpha_i=$（a_{1i}，a_{2i}，…，a_{mi}）$^{\tau}$（$i=1$，2，…，n），$\beta=$（b_1，b_2，…，

b_m)，则线性方程组（1.1）的向量形式为

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$$

若 $A=(a_{ij})_{m\times n}, X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则方程组(1.1)的矩阵形式为 $AX=\beta$。

线性方程组（1.1）有解的充要条件是$r(A)=r(A\mid\beta)$,其中$(A\mid\beta)$是方程组的增广矩阵。

导出组 $AX=0$ 有非 0 解$\Leftrightarrow r(A)<n\Leftrightarrow$列向量组线性相关。

导出组 $AX=0$ 没有非 0 解$\Leftrightarrow r(A)=n$(列满秩)$\Leftrightarrow A^{\tau}A$ 可逆。

二、二次型（quadratic form）

$A=(a_{ij})_{m\times n}$是实对称方阵,$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\tau}$ 是列向量,n 元函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^{\tau}AX=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

称为 n 元二次型。它与对称矩阵是一一对应的。

1. 非退化线性替换。设 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\tau}$，$Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\tau}$，$C=(c_{ij})_{n\times n}$，并且 C 为可逆矩阵。表达式

$$X=CY$$

称为从 x_1，x_2，…，x_n 到y_1，y_2，…，y_n 的一个非退化的线性替换。

2. 矩阵的合同。非退化线性替换 $X=CY$ 将二次型$f(X)=X^{\tau}AX$ 替换为新二次型$g(Y)=Y^{\tau}BY$，式中 $B=C^{\tau}AC$ 称为矩阵A 与B 是合同的。

3. 矩阵的规范形。可以证明，任意实二次型可通过非退化线性替换化为只有平方项的标准形，也可以化为平方项的系数为±1 的规范形：

$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$$

其中,$p,r,p-(r-p)=2p-r$ 分别称为二次型的正惯性指数、秩和符号差。

对应于对称矩阵有:任意对称方阵合同于一个对角形矩阵,也可以合同于形如

$$\begin{pmatrix}E_p & 0 & 0\\ 0 & -E_{r-p} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

的矩阵。