

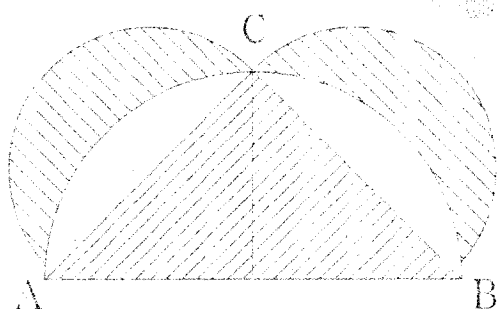
好玩的数学

张景中 主编

陈仁政 著

说不尽的 π

你想知道 π 的30多个名称、10多种符号和170多个值吗？你想到巴黎参观“ π 宫”吗？你想知道预言“世界末日”和粘黄金鼻子的 π 迷吗？你想知道“白雪公主”为什么会拒绝“白马王子”求婚吗？看看这本书，或许你会成为一个“ π 迷”。



好玩的

数学

张景中 主编

说不尽的 π

陈仁政_二著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书图文并茂,生动详尽地叙述了从古到今人类对 π 不断加深的认识和艰难曲折的探索,以及有关 π 的各种知识:定义、名称、符号、性质,林林总总的数值让人目不暇接,形形色色的算法引人拍案叫绝,多如牛毛的奇闻趣事让人心旷神怡,五花八门的名题趣题使人赏心悦目,难解难破的谜团雾障令人梦绕魂牵……

本书适合具有中学及以上文化的青少年或成人阅读,也是研究 π 的重要参考书。

徜徉在 π 那“依旧”的“涛声”之中,感受阿基米德、祖冲之、金田康正……的魅力,你会流连忘返。

“心会跟 π 一起走,说好不回头”——看了这本书,或许你也会成为一个“ π 迷”……

图书在版编目(CIP)数据

说不尽的 π /陈仁政著. —北京:科学出版社, 2005
(好玩的数学/张景中主编)

ISBN 7-03-014635-2

I. 说… II. 陈… III. 常数-通俗读物 IV. O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 122493 号

丛书策划: 李 敏

责任编辑: 李 敏 / 责任校对: 包志虹

责任印制: 钱玉芬 / 整体设计: 黄华斌

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

原创阳光印业有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005 年 1 月第 一 版 开本: 610×1000 1/16

2005 年 1 月第一次印刷 印张: 25 1/2

印数: 1—6 000 字数: 282 000

定价: 30.00 元

如有印装质量问题, 我社负责调换

《好玩的数学》编委会

主 编 张景中

成 员 (按汉语拼音字母排序)

陈仁政 孙荣恒 谈祥柏 王树禾

吴鹤龄 易南轩 郁祖权

总 序

2002年8月在北京举行国际数学家大会(ICM2002)期间,91岁高龄的数学大师陈省身先生为少年儿童题词,写下了“数学好玩”4个大字。

数学真的好玩吗?不同的人可能有不同的看法。

有人会说,陈省身先生认为数学好玩,因为他是数学大师,他懂数学的奥妙。对于我们凡夫俗子来说,数学枯燥,数学难懂,数学一点也不好玩。

其实,陈省身从十几岁就觉得数学好玩。正因为觉得数学好玩,才兴致勃勃地玩个不停,才玩成了数学大师。并不是成了大师才说好玩。

所以,小孩子也可能觉得数学好玩。

当然,中学生或小学生能够体会到的数学好玩,和数学家所感受到的数学好玩,是有所不同的。好比象棋,刚入门的棋手觉得有趣,国手大师也觉得有趣,但对于具体一步棋的奥妙和其中的趣味,理解的程度却大不相同。

世界上好玩的事物,很多要有了感受体验才能食髓知味。有酒仙之称的诗人李白写道:“但得此中味,勿为醒者传”,不喝酒的人是很难理解酒中乐趣的。

但数学与酒不同。数学无所不在。每个人或多或少地要用到数学,要接触数学,或多或少地能理解一

些数学。

早在 2000 多年前，人们就认识到数的重要。中国古代哲学家老子在《道德经》中说：“道生一，一生二，二生三，三生万物。”古希腊毕达哥拉斯学派的思想家菲洛劳斯说得更加确定有力：“庞大、万能和完美无缺是数字的力量所在，它是人类生活的开始和主宰者，是一切事物的参与者。没有数字，一切都是混乱和黑暗的。”

既然数是一切事物的参与者，数学当然就无所不在了。

在很多有趣的活动中，数学是幕后的策划者，是游戏规则的制定者。

玩七巧板，玩九连环，玩华容道，不少人玩起来乐而不倦。玩的人不一定知道，所玩的其实是数学。这套丛书里，吴鹤龄先生编著的《七巧板、九连环和华容道——中国古典智力游戏三绝》一书，讲了这些智力游戏中蕴含的数学问题和数学道理，说古论今，引人入胜。丛书编者应读者要求，还收入了吴先生的另一本备受大家欢迎的《幻方及其他——娱乐数学经典名题》，该书题材广泛、内容有趣，能使人在游戏中启迪思想、开阔视野，锻炼思维能力。丛书的其他各册，内容也时有涉及数学游戏。游戏就是玩。把数学游戏作为丛书的重要部分，是“好玩的数学”题中应有之义。

数学的好玩之处，并不限于数学游戏。数学中有些极具实用意义的内容，包含了深刻的奥妙，发人深

思，使人惊讶。比如，以数学家欧拉命名的一个公式

$$e^{2\pi i} = 1$$

这里指数中用到的 π ，就是大家熟悉的圆周率，即圆的周长和直径的比值，它是数学中最重要的一个常数。数学中第 2 个重要的常数，就是上面等式中左端出现的 e ，它也是一个无理数，是自然对数的底，近似值为 2.718281828459…。指数中用到的另一个数 i ，就是虚数单位，它的平方等于 -1 。谁能想到，这 3 个出身大不相同的数，能被这样一个简洁的等式联系在一起呢？丛书中，陈仁政老师编著的《说不尽的 π 》和《不可思议的 e 》，分别详尽地说明了这两个奇妙的数的来历、有关的轶事趣谈和人类认识它们的漫长的过程。其材料的丰富详尽，论述的清楚确切，在我所知的中外有关书籍中，无出其右者。

如果你对上面等式中的虚数 i 的来历有兴趣，不妨翻一翻王树禾教授为本丛书所写的《数学演义》的“第十五回 三次方程闹剧获得公式解 神医卡丹内疚难舍诡辩量”。这本章回体的数学史读物，可谓通而不俗、深入浅出。王树禾教授把数学史上的大事趣事憾事，像说评书一样，向我们娓娓道来，使我们时而惊讶、时而叹息、时而感奋，引来无穷怀念遐想。数学好玩，人类探索数学的曲折故事何尝不好玩呢？光看看这本书的对联形式的四十回的标题，就够过把瘾了。王教授还为丛书写了一本《数学聊斋》，把现代数学和经典数学中许多看似古怪而实则富有思想哲理的内容，像《聊斋》讲鬼说狐一样最大限度地大众化，努力使

读者不但“知其然”而且“知其所以然”。在这里，数学的好玩，已经到了相当高雅的层次了。

谈祥柏先生是几代数学爱好者都熟悉的老科普作家，大量的数学科普作品早已脍炙人口。他为丛书所写的《乐在其中的数学》，很可能是他的封笔之作。此书吸取了美国著名数学科普大师加德纳 25 年中作品的精华，结合中国国情精心改编，内容新颖、风格多变、雅俗共赏。相信读者看了必能乐在其中。

易南轩老师所写的《数学美拾趣》一书，自 2002 年初版以来，获得读者广泛好评。该书以流畅的文笔，围绕一些有趣的数学内容进行了纵横知识面的联系与扩展，足以开阔眼界、拓广思维。读者群中有理科和文科的师生，不但有数学爱好者，也有文学艺术的爱者。该书出版不久即脱销，有一些读者索书而未能如愿。这次作者在原书基础上进行了较大的修订和补充，列入丛书，希望能满足这些读者的心愿。

世界上有些事物的变化，有确定的因果关系。但也有着大量的随机现象。一局象棋的胜负得失，一步一步地分析起来，因果关系是清楚的。一盘麻将的输赢，却包含了很多难以预料的偶然因素，即随机性。有趣的是，数学不但长于表达处理确定的因果关系，而且也能表达处理被偶然因素支配的随机现象，从偶然中发现规律。孙荣恒先生的《趣味随机问题》一书，向我们展示出概率论、数理统计、随机过程这些数学分支中许多好玩的、有用的和新颖的问题。其中既有经典趣题，如赌徒输光定理，也有近年来发展的新的

方法。

中国古代数学，体现出算法化的优秀数学思想，曾一度辉煌。回顾一下中国古算中的名题趣事，有助于了解历史文化，振奋民族精神，学习逻辑分析方法，发展空间想像能力。郁祖权先生为丛书所著的《中国古算解趣》，诗、词、书、画、数五术俱有，以通俗艺术的形式介绍韩信点兵、苏武牧羊、李白沽酒等 40 余个中国古算名题；以题说法，讲解我国古代很有影响的一些数学方法；以法传知，叙述这些算法的历史背景和实际应用，并对相关的中算典籍、著名数学家的生平及其贡献做了简要介绍，的确是青少年的好读物。

读一读《好玩的数学》，玩一玩数学，是消闲娱乐，又是学习思考。有些看来已经解决的小问题，再多想想，往往有“柳暗花明又一村”的感觉。

举两个例子：

《中国古算解趣》第 37 节，讲了一个“三翁垂钓”的题目。与此题类似，有个“五猴分桃”的趣题在世界上广泛流传。著名物理学家、诺贝尔奖获得者李政道教授访问中国科学技术大学时，曾用此题考问中国科学技术大学少年班的学生，无人能答。这个问题，据说是由大物理学家狄拉克提出的，许多人尝试着做过，包括狄拉克本人在内都没有找到很简便的解法。李政道教授说，著名数理逻辑学家和哲学家怀德海曾用高阶差分方程理论中通解和特解的关系，给出一个巧妙的解法。其实，仔细想想，有一个十分简单有趣的解法，小学生都不难理解。

原题是这样的：5 只猴子一起摘了 1 堆桃子，因为太累了，它们商量决定，先睡一觉再分。

过了不知多久，来了 1 只猴子，它见别的猴子没来，便将这 1 堆桃子平均分成 5 份，结果多了 1 个，就将多的这个吃了，拿走其中的 1 堆。又过了不知多久，第 2 只猴子来了，它不知道有 1 个同伴已经来过，还以为自己是第 1 个到的呢，于是将地上的桃子堆起来，平均分成 5 份，发现也多了 1 个，同样吃了这 1 个，拿走其中的 1 堆。第 3 只、第 4 只、第 5 只猴子都是这样……问这 5 只猴子至少摘了多少个桃子？第 5 个猴子走后还剩多少个桃子？

思路和解法：题目难在每次分都多 1 个桃子，实际上可以理解为少 4 个，先借给它们 4 个再分。

好玩的是，桃子尽管多了 4 个，每个猴子得到的桃子并不会增多，当然也不会减少。这样，每次都刚好均分成 5 堆，就容易算了。

想得快的一下就看出，桃子增加 4 个以后，能够被 5 的 5 次方整除，所以至少是 3125 个。把借的 4 个桃子还了，可知 5 只猴子至少摘了 3121 个桃子。

容易算出，最后剩下至少 $1024 - 4 = 1020$ 个桃子。

细细地算，就是：

设这 1 堆桃子至少有 x 个，借给它们 4 个，成为 $x + 4$ 个。

5 个猴子分别拿了 a, b, c, d, e 个桃子（其中包括吃掉的一个），则可得

$$a = (x + 4) / 5$$

$$b = 4(x + 4)/25$$

$$c = 16(x + 4)/125$$

$$d = 64(x + 4)/625$$

$$e = 256(x + 4)/3125$$

e 应为整数，而 256 不能被 5 整除，所以 $(x + 4)$ 应是 3125 的倍数，所以

$$(x + 4) = 3125k \quad (k \text{ 取自然数})$$

当 $k = 1$ 时， $x = 3121$

答案是，这 5 个猴子至少摘了 3121 个桃子。

这种解法，其实就是动力系统研究中常用的相似变换法，也是数学方法论研究中特别看重的“映射-反演”法。小中见大，也是数学好玩之处。

在《说不尽的 π 》的 5.3 节，谈到了祖冲之的密率 $355/113$ 。这个密率的妙处，在于它的分母不大而精确度很高。在所有分母不超过 113 的分数当中，和 π 最接近的就是 $355/113$ 。不但如此，华罗庚在《数论导引》中用丢番图理论证明，在所有分母不超过 336 的分数当中，和 π 最接近的还是 $355/113$ 。后来，在夏道行教授所著《 π 和 e 》一书中，用连分数的方法证明，在所有分母不超过 8000 的分数当中，和 π 最接近的仍然是 $355/113$ ，大大改进了 336 这个界限。有趣的是，只用初中里学的不等式的知识，竟能把 8000 这个界限提高到 16500 以上！

根据 $\pi = 3.1415926535897\cdots$ ，可得 $|355/113 - \pi| < 0.00000026677$ ，如果有个分数 q/p 比 $355/113$ 更接近 π ，一定会有

$$|355/113 - q/p| < 2 \times 0.00000026677$$

也就是

$$|355p - 113q| / 113p < 2 \times 0.00000026677$$

因为 q/p 不等于 $355/113$ ，所以 $|355p - 113q|$ 不是 0。但它是正整数，大于或等于 1，所以

$$1/113p < 2 \times 0.00000026677$$

由此推出

$$p > 1 / (113 \times 2 \times 0.00000026677) > 16586$$

这表明，如果有个分数 q/p 比 $355/113$ 更接近 π ，其分母 p 一定大于 16586。

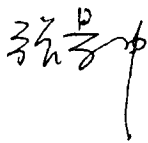
如此简单初等的推理得到这样好的成绩，可谓鸡刀宰牛。

数学问题的解决，常有“出乎意料之外，在乎情理之中”的情形。

在《数学美拾趣》的 22 章，提到了“生锈圆规”作图问题，也就是用半径固定的圆规作图的问题。这个问题出现得很早，历史上著名的画家达·芬奇也研究过这个问题。直到 20 世纪，一些基本的作图，例如已知线段的两端点求作中点的问题（线段可没有给出来），都没有答案。有些人认为用生锈圆规作中点是不可能的。到了 20 世纪 80 年代，在规尺作图问题上从来没有过贡献的中国人，不但解决了中点问题和另一个未解决问题，还意外地证明了从 2 点出发作图时生锈圆规的能力和普通规尺是等价的。那么，从 3 点出发作图时生锈圆规的能力又如何呢？这是尚未解决的问题。

开始提到，数学的好玩有不同的层次和境界。数学大师看到的好玩之处和小学生看到的好玩之处会有所不同。就这套丛书而言，不同的读者也会从其中得到不同的乐趣和益处。可以当做休闲娱乐小品随便翻翻，有助于排遣工作疲劳、俗事烦恼；可以作为教师参考资料，有助于活跃课堂气氛、启迪学生心智；可以作为学生课外读物，有助于开阔眼界、增长知识、锻炼逻辑思维能力。即使对于数学修养比较高的大学生、研究生甚至数学研究工作者，也会开卷有益。数学大师华罗庚提倡“小敌不侮”，上面提到的两个小题目都有名家做过。丛书中这类好玩的小问题比比皆是，说不定有心人还能从中挖出宝矿，有所斩获呢。

啰嗦不少了，打住吧。谨以此序祝《好玩的数学》丛书成功。

A handwritten signature in black ink, appearing to be '张中' (Zhang Zhong) with a stylized flourish at the end.

2004年9月9日

代 前 言

圆周率 π 是一个家喻户晓的数学术语。所谓圆周率，通俗地说，就是圆的周长与直径之比，它是一个常数。《墨子·大取》说“小圆之圆与大圆之圆同”，就是指的这种意思。在古代，一个文化传统对圆周率计算的精确程度，往往反映了该文化传统所达到的数学水平，因为圆周率的计算不仅要有熟练的计算技术，而且要用到代数、几何的若干知识，甚至还需要极限思想。

人类各个文化传统，不管进入文明社会的早晚，最先都使用“周三径一”，即 $\pi = 3$ ，几乎无一例外。这个值非常简约，一直到今天，木工师傅还在使用它。而对追求严密的数学家来说，它显然太粗疏。人们力图改进圆周率值。但是，在找到科学的计算方法之前，往往是采用试验的方法。刘歆为王莽制造嘉量时所使用的相当于 3.1547 的圆周率值，大约是试验的结果。随着数学水平的提高，杰出的数学家创造了求圆周率精确近似值的科学方法。就时间的先后与方法的初等、高等而言，可以分为几何的与解析的两种方法。阿基米德（公元前 3 世纪）与刘徽（公元 3 世纪）分别是古希腊和中国（也是西方和东方）这两种数学传统中计算圆周率精确近似值的几何方法的开创者。祖冲之（429~500）使用刘徽的方法，将圆周率精确到 8 位有

效数字，领先世界数坛近千年。德国鲁道夫（1540～1610）在临终前计算出 35 位数的圆周率，是用几何方法计算圆周率的最好成绩。1579 年，法国韦达（1540～1603）提出了数 π 的解析表达式，开创了用解析方法求圆周率精确值的阶段。1948 年，一位英国人和一位美国人计算出 π 的 808 位值，是人工计算取得的最高记录。1946 年，第一台电子计算机 ENIAC 诞生。计算机大大缩短了计算时间，3 年之后，人们用它计算出 2035 位的 π 值。从此，人类进入用机器计算圆周率精确近似值的新时代。使用阿基米德或刘徽的方法，或者解析的方法，从理论上讲，可以计算出任意精确的圆周率，然而，在实际上是不可能的，只能计算到几十位或几百位。而使用电子计算机，计算到多少位，人们也不会感到惊讶。到 2002 年，人们计算出 12 400 多亿位的圆周率。相信这个记录也保持不了多久。

尽管几乎人人都对圆周率耳熟能详，实际上却存在不少误解。在一次全国性的歌手比赛上，有一个知识性题目是：“谁最早发明了圆周率？”主持者给的“正确答案”是“祖冲之”。这里有两个常识性错误。首先，圆周率是不依人的意志为转移的客观规律，它是一个无理数，还是一个超越数，人们只可能“发现”它的近似值，而不可能“发明”它，题目本身就是错误的。至于发现它是大于 3 的近似值的方法，是可以“创造”或“发明”的。但是，“最早发明”的桂冠在全世界应属于阿基米德，在国内应属于刘徽，也是轮

不到祖冲之的。祖冲之只是人们认识圆周率的历史长河中的杰出人物之一。实际上，3 也是圆周率的一个近似值，我们的先民中是谁最早发现了它，是谁最早发明了发现它的方法？是谁也回答不了的一个问题。显然，在全民族中普及这类科学常识，任重而道远。陈仁政先生等积 20 多年的时间，坚忍不拔，不畏辛劳，收集、积累有关圆周率的资料，经过梳理，撰成此书，是一件十分有意义的事情。本书与同类作品相比，生动有趣，通俗易懂，资料新颖，内容更加丰富，有关中国的材料也更加详备，有的内容还有创新，相信它会发挥有益的作用。

中国科学院自然科学史研究所

郭书春

2004 年 11 月

目 录

总序

代前言

第一章 圆周率的定义——多角度给 π “照相”……………1

1.1 没褪色的“黑白照”——用圆周长和直径来定义……………1

1.2 换个角度也无妨——用圆面积和半径来定义……………3

1.3 还是“彩照”吸引眼球——各家定义“八仙过海”……………4

1.4 爱因斯坦能帮忙吗——盼着你的“三月小船”……………5

第二章 圆周率的名称——世人给 π 改“绰号”……………7

2.1 古率(周三径一之率、径一周三之率)……………7

2.2 阿基米德数(阿氏率、亚氏率、弱率)、托勒密之值……………8

2.3 歆率……………9

2.4 衡率……………10

2.5 徽率(徽术、阿利亚巴塔之值)……………11

2.6 承天率(皮延宗率)、蕃率、宗率、粗率(实用率、约率、
“疏率”、强率)、智率(陆绩率)……………12

2.7 祖率(祖冲之分数、密率、姜岌之率、奥托率、梅蒂尤斯数或
安托尼兹率)、三率……………15

2.8 约率“摇身一变”成“疏率”……………18

好玩的数学