大学数学名师导学丛书

高等数学
名师导学
（下）

《大学数学名师导学丛书》编写组　编

6

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

大学数学名师导学丛书

高等数学

名师导学

下册

《大学数学名师导学丛书》编写组 编

本册编写 董玉才

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是以大学理工科的《高等数学》的教学大纲为依据，结合大学数学教学大纲并参考最主流教材编写而成。内容简练明确，解决问题透彻明了，易学易用。本书的结构特点是，在每章的开头，首先列出本章的知识要点，然后扼要论述知识要点分析和学习要求，随后通过丰富的典型例题，详细讲述解析方法和答案，最后附有极具针对性的习题与自测。

本丛书具有三“导”合一的特点：集中知识要点“导”学，典型例题与习题“导”讲，知识点学习和自测紧密“导”练。

本书适合学习《高等数学》的大学理工科学生使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学名师导学. 下册/《大学数学名师导学丛书》编写组 编. —北京：中国水利水电出版社，2005
(大学数学名师导学丛书)
ISBN 7-5084-2578-2

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 大…　Ⅲ. 高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 129472 号

书　　名	大学数学名师导学丛书 **高等数学名师导学(下)**
作　　者	《大学数学名师导学丛书》编写组　编　本册编写　董玉才
出版发行	中国水利水电出版社(北京市三里河路 6 号 100044) 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：(010)63202266(总机)、68331835(营销中心)
经　　销	全国各地新华书店和相关出版销售网点
排　　版	雪光科技发展有限公司
印　　刷	北京市优美印刷有限责任公司
规　　格	787mm×1092mm　16 开本　11.5 印张　206 千字
版　　次	2005 年 1 月第 1 版　2005 年 1 月第 1 次印刷
印　　数	0001—6000 册
定　　价	**15.00** 元

《大学数学名师导学丛书》编写组

主　　编： 牛庆银

副 主 编： 董玉才

编写人员： 牛庆银　董玉才　杨万利
郑素文　刘文学　陈建华

前言

大学数学是高等院校的重要基础课程。在教学改革后，由于授课时间的减少，很多学生陷入了“上课能听懂，课后解题却不知如何下手，考试更无所适从”的困境。为帮助学生摆脱困境，我们对辅导方式进行了积极创新，希望以有效的名师指导式辅导，使学生轻松学数学，牢固并灵活地掌握知识，从而取得优异的考试成绩。

本丛书根据目前大学数学教学大纲并参考最主流教材编写而成，由数位工作在教学一线的、教授级的中青年教师编写。内容简练明确，解决问题透彻明了，易学易用。本套丛书的结构特点是，在每章的开头，首先列出本章的知识要点，然后扼要论述知识要点分析和提出学习要求，随后通过丰富的典型例题，详细讲述解析方法和答案，最后附有极具针对性的习题与自测，供学生灵活运用所学知识进行实践，使学生“知其然，更知其所以然”，巩固所学知识，从而协助学生顺利通过相应的日常学习和严格的考核。

本丛书具有三“导”合一的特点：

1）**集中知识要点“导”学**。通过把知识要点串联在一起，将大纲和知识要点分层讲解，方便学生查找，有的放矢地学习，避免遗漏。

2）**典型例题与习题“导”讲**。针对典型例题和习题，结合知识点进行精讲，给出多种解题思路、方法，使学生能触类旁通，从而轻松学习、解题和通过考试。

3）**知识点学习和自测紧密“导”练**。结合老师课堂练习必考和可能考的知识点以及考试要求，给出极具针对性的习题与自测，方便学生自我测试和掌握学习情况。

由于编者水平有限，时间仓促，不妥之处在所难免，书中如有错漏之处，敬请广大读者批评、指正。

编　者

2004年6月

正文设计：孙长福
责任印制：孙长福
王国珍

目录

第八章 多元函数微分法及其应用

一、知识要点

多元函数的概念　二元函数的极限和连续的概念　有界闭域上连续函数的性质　偏导数的概念　全微分的概念　全微分存在的必要条件和充分条件　复合函数、隐函数的求导法　二阶偏导数　方向导数和梯度的概念及其计算　空间曲线的切线和法平面　平面曲面的切平面和法线　多元函数极值和条件极值的概念　多元函数极值存在的必要条件　二元函数极值的充分条件　极值的求法　拉格朗日乘数法　多元函数的最大值、最小值及其简单应用

二、知识要点分析

1. 二元函数的基本概念

(1)函数．

二元函数:设 D 是平面上的一个点集,如果对于每个点 $P(x,y)\in D$,变量 z 按照一定法则总有确定的值和它对应,则称 z 是变量 x、y 的二元函数(或点 P 的函数),记为:

$$z=f(x,y)\quad (\text{或 } z=f(P))$$

点集 D 称为该函数的**定义域**,x,y 称为**自变量**,z 也称为**因变量**,数集

$$\{z\mid z=f(x,y),\quad (x,y)\in D\}$$

称为该函数的**值域**.

称 R^n 上的非空集合 Ω 到集合 R 的某种对应规则 f 为 **n 元函数**,即

$$f:(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto u,((x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega)$$

记作 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),((x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega)$.

(2)邻域.

平面上的开圆:

ACX 15/07

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$$

称为点 $P_0(x_0,y_0)$的 δ **邻域**($\delta>0$),记作 $U_\delta(P_0)$,即

$$U_\delta(P_0)=\{(x,y)\in R^2 \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\},$$

称

$$U_\delta(P_0)=\{(x,y)\in R^2 \mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

为点 $P_0(x_0,y_0)$的 δ **去心邻域**($\delta>0$).

(3)二元函数的极限和连续.

设函数 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$的某个去心邻域 $U_\delta(P_0)$内有定义,极限

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \forall \delta>0$,当

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

恒有

$$|f(x,y)-A|<\delta.$$

称常数 A 为函数$f(x,y)$当 $x\to x_0, y\to y_0$ 时的极限.

设函数 $f(x,y)$在开区域(或闭区域)D 内有定义,$P_0(x_0,y_0)$是 D 的内点或边界点且$P_0\in D$,如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$**连续**.

2. 偏导数

(1)定义.

设函数 $z=f(x,y)$在 $U_\delta(P_0)$内有定义,

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

$$\Delta_y z=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

分别称作函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)关于 x,y 的**偏增量**.

如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$存在,称函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)关于变量 x 的可偏导,称极限值为函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)关于 x 的**偏导数**,记作$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$或 $f'_x(x_0,y_0)$,即

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},$$

同理

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

(2)偏导数的几何意义．

$$f'_x(x_0,y_0)=\tan\alpha\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f'_y(x_0,y_0)=\tan\beta\left(\beta\neq\frac{\pi}{2}\right),$$

其中 α 是平面曲线 $\begin{cases}z=f(x,y),\\ y=y_0\end{cases}$ 在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 的切线与 x 轴正向间的夹角，β 是平面曲线 $\begin{cases}z=f(x,y),\\ x=x_0\end{cases}$ 在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 的切线与 y 轴正向间的夹角.

(3)二阶偏导数．

对二元函数 $z=f(x,y)$，若它在区域 D 上关于 x 和 y 的偏倒数存在，则定义 $f(x,y)$ 的二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

同样，可以定义二元函数的更高阶偏导数及一般多元函数的高阶偏导数．

(4)性质．

设函数 $f(x,y)$ 在 $U_\delta(P_0)$ 内二阶可偏导，且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续，则

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{P_0}=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{P_0}.$$

设 $f(x,y)$ 在域 D 内二阶可偏导，如果 $f(x,y)\in C^2(D)$，且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\in C(D)$，则

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},(x,y)\in D.$$

3．全微分

(1)定义．

设函数 $z=f(x,y)$ 在 $U_\delta(P_0)$ 内定义，$P_0(x_0,y_0)$ 为 $U_\delta(P_0)$ 内一点，记

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0),$$

称 Δz 为 f 在点 (x_0,y_0) 的一个**全增量**.

如果函数 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$的全增量可以表示成如下形式：

$$\Delta z = a\Delta x + b\Delta y + \gamma(\Delta x,\Delta y),$$

其中 a,b 为与 $\Delta x,\Delta y$ 无关的量，若

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\gamma(\Delta x,\Delta y)}{\rho}=0 \quad (\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}),$$

则称函数 $f(x,y)$在点 P_0 可微，称 $a\Delta x+b\Delta y$ 为函数f 在点P_0 的**全微分**，记作 $\mathrm{d}z|_{P_0}$，即

$$\mathrm{d}z|_{P_0}=a\Delta x+b\Delta y.$$

(2)全微分计算．

如果函数 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$可微，则 $f(x,y)$在点 P_0 处可偏导，且

$$\mathrm{d}z|_{P_0}=f'_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x+f'_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y \quad (\mathrm{d}x\equiv\Delta x,\mathrm{d}y\equiv\Delta y).$$

如果函数 $f(x,y)$的两个偏导数 $f'_x(x,y),f'_y(x,y)$在点(x_0,y_0)存在且连续，则称 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微．

如果函数 $f(x,y)\in C^1(D)$，则 $f(x,y)$在域上每一点处可微，且对 $\forall(x,y)\in D$，有

$$\mathrm{d}z=f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y.$$

4．多元复合函数微分法

(1)设函数 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(x)$，$v=\psi(x)$构成复合函数 $z=f[\varphi(x),\psi(x)]$（属 $z\begin{matrix} u \\ v\end{matrix}x$ 型）．如果 $f\in C^1$，φ,ψ 可导，则 z 对 x 可导，且

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},\mathrm{d}z=z'_x\mathrm{d}x=\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}v.$$

(2)设函数 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$构成复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$（属 $z\begin{matrix} u & x \\ v & y\end{matrix}$ 型）．如果 $f\in C^1$，φ,ψ 可偏导，则 z 对 x，y 可偏导，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

如果 $\varphi,\psi\in C^1$ 则 $z\in C^1$，复合函数 $z(x,y)$可微，

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v$$

称为微分形式的不变性，其中 $\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y$．

5. 隐函数求导

(1)一个方程确定的隐函数.

设由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$,且 $F\in C^1$,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial y}\quad(\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0).$$

设函数 $z=z(x,y)$是由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定的隐函数,且 $F\in C^1$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}\quad(\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0)$$

(2)方程组确定的隐函数.

设方程组

$\{F(x,y,u,v)=0,Q(x,y,u,v)=0$

确定隐函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$,记

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}Fu' & Fv'\\ Gu' & Gv'\end{vmatrix}\neq 0,$$

则对方程组关于 x 和 y 求偏导可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)};\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}.$$

特别地,对方程组

$$\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\end{cases}$$

若其确定的隐函数(即反函数)为 $u=u(x,y),v=v(x,y)$,则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial v},\quad\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial u};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial v},\quad\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial u}.$$

其中 $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0.$

6. 微分法在几何上的应用

(1)空间曲面的切平面和法线.

如果曲面方程为 $S:z=f(x,y),(x,y)\in D$,设$(x_0,y_0)\in D$,则曲面 S 在点$M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$的切平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=f'_x(x_0,y_0)\boldsymbol{i}+f'_y(x_0,y_0)\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},$$

切平面的方程为

$$\Pi:f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

法线方程为

$$L: \frac{x-x_0}{f'_0(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_0(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

(2)空间曲线的切线和法平面．

如果空间曲线 C 的方程为$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\ t\in I.\\ z=z(t),\end{cases}$点 $M_0\in C$ 对应参数 $t_0(t\in I)$，且 $x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)$不同时为零，则曲线 C 在点 M_0 的切线的方向向量 $\boldsymbol{s}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$，切线方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)},$$

法平面方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

7. 极值

(1)定义．

设函数 $f(x,y)$在 $U_\delta(P_0)$内定义，在点 $P_0(x_0,y_0)$连续.

如果对于该邻域内异于 $P_0(x_0,y_0)$的点(x,y)，有

$$f(x,y)<f(x_0,y_0),$$

则称函数在点 $P_0(x_0,y_0)$处有**极大值** $f(x_0,y_0)$，称 $P_0(x_0,y_0)$为 $f(x,y)$的**极大值点**.

如果对于该邻域内异于 $P_0(x_0,y_0)$的点(x,y)，有

$$f(x,y)>f(x_0,y_0),$$

则称函数在点 $P_0(x_0,y_0)$处有**极小值** $f(x_0,y_0)$，称 $P_0(x_0,y_0)$为 $f(x,y)$的**极小值点**.

极大值、极小值统称为**极值**，使函数取得极值的点统称为**极值点**.

(2)驻点．

设函数 $f(x,y)$在域 D 内定义. 如果点$(x_0,y_0)\in D$ 是$f(x,y)$的极值点，又$f(x,y)$在点(x_0,y_0)可偏导，则 $f'_x(x_0,y_0)=0,f'_y(x_0,y_0)=0$(极值点的必要条件). 满足

$$\begin{cases}f'_x(x_0,y_0)=0,\\ f'_y(x_0,y_0)=0\end{cases}$$

的点$(x_0,y_0)\in D$(内部)称作 $f(x,y)$的**驻点**.

(3)无条件极值的计算．

设 $P_0(x_0,y_0)$是函数 $f(x,y)$的驻点，$f(x,y)\in C^2(U_\delta(P_0))$，记

$$A=f''_{x^2}(x_0,y_0),$$
$$B=f''_{xy}(x_0,y_0),$$
$$C=f''_{y^2}(x_0,y_0).$$

如果 $AC-B^2>0$,则(x_0,y_0)是 $f(x,y)$的极值点,当 $A>0$ 时,(x_0,y_0)是极小值点,当 $A<0$ 时,(x_0,y_0)是极大值点;

如果 $AC-B^2<0$,则(x_0,y_0)不是 $f(x,y)$的极值点;

如果 $AC-B^2=0$,则(x_0,y_0)是否是 $f(x,y)$的极值点不能确定.

(4)条件极值的拉格朗日乘数法.

称求函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的最值问题为条件极值问题,称 $z=f(x,y)$为目标函数,称 $\varphi(x,y)=0$ 为约束方程.求解方法为拉格朗日乘数法.引入拉格朗日函数

$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),(x,y)\in D,$$

其中 λ 称为**拉格朗日乘数**,原条件极值问题转化为求拉格朗日函数 $F(x,y)$在域 D 内的无条件极值问题,如果方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\\ \varphi(x,y)=0\end{cases}$$

有唯一解(x_0,y_0,λ_0),其中$(x_0,y_0)\in D$(内部),则点(x_0,y_0)即是原条件极值问题的解.此求条件极值的方法称为**拉格朗日乘数法**.

8. 方向导数

(1)定义.

设函数 $u=u(x,y,z),(x,y,z)\in\Omega$,点 $P_0(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$.从点 P_0 出发引一条射线 l,记其上的单位向量为 $\mathbf{e}^0$,在 l 上点P_0 的邻近取一点 $P(x,y,z)$,记 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$.如果极限

$$\lim_{\rho\to0}\frac{u(x,y,z)-u(x_0,y_0,z_0)}{\rho}$$

存在,称此极限为 $u(x,y,z)$在点 P_0 沿方向 e^0 的**方向导数**,记作$\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}$,即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=\lim_{\rho\to0}\frac{u(x,y,z)-u(x_0,y_0,z_0)}{\rho}.$$

如果函数 $u(x,y,z)$在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$可微,则 $\mathbf{e}^0=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}$,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_{P_0}.$$

(2)方向导数的计算．

如果函数 $u(x,y,z)$在域 Ω 上处处可微,则$\forall(x,y,z)\in\Omega$,

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

9．梯度

(1)定义．

设函数 $u=u(x,y,z)$在域 Ω 上处处可微,对于每一点 $P(x,y,z)\in\Omega$,都可以定义一个向量

$$\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

称该向量为函数 $u=u(x,y,z)$在点 $P(x,y,z)$的梯度,记作 $\mathrm{grad}u$．数量场 u 在点P 处的梯度 $\left.\mathrm{grad}u\right|_P$ 是一个向量,其方向是使得方向导数$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}$取得大值的方向,其模为

$$\left|\mathrm{grad}u\right|_P=\max\left(\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}\right).$$

(2)计算公式．

$$\mathrm{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

(3)梯度的性质．

1)$\frac{\partial u}{\partial l}=(\mathrm{grad}u)_{e^0}$;

2)$\left.\mathrm{grad}u\right|_{P_0}$垂直于过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$的等值面

$$u(x,y,z)=c_0\quad(c_0=u(x_0,y_0,z_0))$$

且指向 u 增大的一侧.

三、学习要求

(1)理解邻域、多元函数的概念.

(2)了解二元函数的极限与连续性的概念,理解有界闭域上连续函数的性质.

(3)理解偏导数和全微分的概念,了解全微分存在的必要条件和充分条件.

(4)理解方向导数与梯度的概念并掌握其计算方法.

(5)掌握复合函数一阶、二阶偏导数的求法.

(6)掌握隐函数(包括由方程组确定的隐函数)的偏导数求法.

(7)掌握曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念及方程的求法.

(8)了解二元函数极值存在的充分条件,掌握二元函数极值的求法,掌握拉格朗日乘数法求条件极值的方法,掌握简单多元函数的最大值和最小值的求法并会解决一些简单的应用问题.

四、典型例题与方法解析

1. 多元函数的微分

例 1　求函数 $z=\arcsin(2x)+\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域,并画出其图形 .

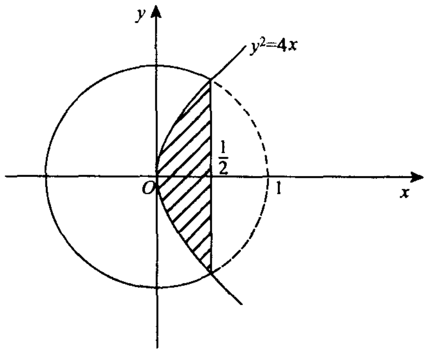

图 8-1

解　由初等函数的定义域知,该函数的定义域为下面不等式组的解

$$\begin{cases}|zx|\leqslant 1,\\ Qx-y^2\geqslant 0,\\ 1-x^2-y^2>0,\\ 1-x^2-y^2\neq 1,\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2},\\ y^2\leqslant 4x,\\ 0<x^2+y^2<1.\end{cases}$$

例 2　设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$,求 $f\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$.

解　$f(u,v)=\dfrac{uv}{u^2+v^2}$, $u=\dfrac{x}{x^2+y}$, $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$,

故 $$f\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{\dfrac{x}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{y}{x^2+y^2}}{\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)^2}=\frac{xy}{x^2+y^2}.$$

例 3　已知 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{y}{x}$,求 $f(tx,ty)$.

解　$$\begin{aligned}f(tx,ty)&=(tx)^2+(ty)^2-(tx)(ty)\tan\frac{ty}{tx}\\&=t^2\left(x^2+y^2-xy\tan\frac{y}{x}\right)\\&=t^2f(x,y).\end{aligned}$$