

名师导学

高二数学巩固提高讲座

吕学礼 主编·明知白 副主编



名师导学

高二数学巩固提高讲座

主 编 吕学礼

副主编 明知白

北京工业大学出版社

内 容 简 介

本书源于课本,有些内容略高于课本.对高中二年级以上的数学基础知识,既复习巩固,又综合运用;对数学技巧方法,既说明思路,又广为例证.希望通过本书的学习能达到帮助学生拓宽知识、提高能力的目的.

本书为讲座集形式,对教材每一章分为若干讲座,每一讲座就一个讲题综合论述,并附有习题和答案.全书分为七章,共31讲.

本书主编是著名的中学数学教材专家,参加了1954年至1980年期间历届中学数学教学大纲的起草工作,参加了1954年至今人民教育出版社出版的历次中学数学通用课本、教学指导书、教学参考书、习题集的编写、校订工作.其他编著者也都是著名教师,有丰富的教学经验和写作经验.

名师导学

高二数学巩固提高讲座

主 编 吕学礼

副主编 明知白

*

北京工业大学出版社出版发行

各地新华书店经销

世界知识印刷厂印刷

*

1994年3月第1版 1995年1月第3次印刷

787×1092毫米 32开本 14.25印张 317千字

印数: 22001~43000册

ISBN 7-5639-0344-4/G·177

定价:7.80元

(京)新登字 212号

编著者简介

主 编:吕学礼

副主编:明知白

其他编著者(按笔划排序):

孙维刚 陈俊辉 张 环 贺信淳

徐望根 蒋佩锦 储瑞年

吕学礼 1919年生,上海青浦人.1942年毕业于上海交通大学数学系.

历任中学数学教员,上海交通大学数学系助教、讲师,人民教育出版社数学室编辑、编审.参加1954年至1980年期间历届中学数学教学大纲的起草工作.参加1954年以来历次中学数学通用课本、教学指导书、教学参考书、习题集的编写、校订工作.



编著有《中学数学教学一得集》、《中学数学实际问题选》、《中学数学实用题解》、《初中数学应用例解》、《平面向量和空间向量》、《代数矩阵与几何变换浅说》等;合著有《分角线相等的三角形(初等几何机器证明问题)》、《初级计算机原理和使用》、《BASIC语言——电子计算机初步知识(高中数学选用教材)》等;合译有《计算机程序设计Logo语言》等.

明知白 1938年生,湖南临澧人.1957年至1963年就读于北京大学数学系,毕业后在北京女二中任教近20年,后调北京东城区中学教研室,从事数学教学研究工作.现任东城区教研科研中心教研员,北京市特级教师,中国数学奥林匹克高级教练,中国数学会普委会《中学生数学》编委.



在负责东城区的数学教学、科研与课外活动的同时,还参与了国家教委、人民教育出版社、北京市教研部、北京市数学会的多项课题研究与教材编写工作,如国家教委组织的《初中数学教学指导书》和人教社《高中数学试验课本》的编写,北京市《高中数学总复习》与《数列与极限》、《不等式》的编写与“数学教学与思维训练”课题的研究.先后在《数学通报》等报刊上发表文章百余篇,著书(主编或合编)十余部,如《高中数学八十讲》、《数列求和》、《高中数学精要》、《数学奥林匹克解题研究》、《初等数学概论》等.

孙维刚 北京市特级教师,有突出贡献专家,是1993年荣获“北京市人民教师”奖的10位杰出教师之一.

1938年12月生.山东海阳郭城人.自1962年起在北京22中任数学教师兼班主任30年.曾获首都“五一”劳动奖章,被评为北京市劳动模范、北京市模范班主任,兼任北京市数学奥林匹克学校校务委员、北京市东城区奥林匹克数学学校校长、《中小学数学教学》常务编辑、《数学奥林匹克》系列图书编委.发表文章获奖多篇,著书多本.



自1980年起,进行从初一新生接班,带到高三毕业的大循环教学改革实验,效果突出,《人民日报》、《中日教育报》、《中国青年报》、《北京日报》、《北京晚报》、《北京教育》等及北京电视台都有报道.

陈俊辉 福建晋江人,1942年3月生.现任北师大二附中副校长.1964年毕业于北京师范大学数学系,1991年被评为特级教师.任中国教育学会数学教学研究会常务理事,北京数学教学研究会理事.1988年获北京市优秀科技园丁称号,1990年获北京市归侨、侨眷先进工作者称号.积极参与学制改革实验,代表性论著有《四年制初中数学教材》代数一、二册等.



长期致力于教学改革,重视学习心理的调整和思维能力的培养,讲究设问的“时机”和“启发性”,使学生“常有所思、渐有所得”,逐步做到“会学”、“爱学”.积极从事科普工作,参与创办数学奥林匹克学校,重视特长生培养,曾带领北京队夺得第一届“华罗庚数学邀请赛”金杯,为数学奥林匹克活动的开展做出了有益的贡献.

张环 女,1942年生,北京人.北京市高级教师,现任北京市第八中学数学组组长.多年从事高考复习工作,曾编写《高中数学解题思考方法》、《数学学习释疑》及《高中数学综合能力培养》等书.



贺信淳 1935年生,浙江镇海人,1955年毕业于北京师范学院专修班,长期在中学任教,1981年起任北京市东城区教研科研中心数学教研员,1992年被评为北京市中学特级教师.1988年起,任北京市数学教学研究会理事,北京市东城区理科学会理事长.

在中学数学的教学和科研岗位上,不断地把教学、教研和科研相结合,探索教法规律.1964年起,在《数学通报》等刊物上发表了多篇论文,近年来又著有《三角》等教学法著作,参与编写《数学教学手册》、《中学数学精要》、《代数学习辅导》、《名师启迪丛书》等十几部中学数学的教学参考读物.近年来,又积极参加了教材改革实验,参加了实验教材和教学参考资料的编写,取得了一些成果.



徐望根 1938年生,浙江上虞县人,1963年毕业于南京大学数学系,毕业后在北京景山学校一直从事数学教学工作,高级教师,现任数学课外活动顾问,编著有《直角三角形世界》、《标准化训练与能力培养》、《标准化题型研究》、《教法、学法、考法》、《错误辨析》等10本书,并发表了论文30篇。



蒋佩锦 1940年5月生,江苏省丹阳市人。1958~1963年就读于北京师范大学数学系。现任北京市第五中学数学教师,兼任北京市东城区理科学会理事,中学高级教师。

在教学实践中,进行过“优化教学结构”、“调动学生学习积极性”、“数学思想方法和数学教学”等课题的研究和探索。至今,在《数学通报》等近十种报刊上发表文章四十余篇,著书十余部,如《三角恒等式证明》、《名师授课录》、《高中数学80讲》等,还有多篇论文在北京市或东城区获奖,还参加了人民教育出版社组织的《高中数学试验课本》的编写和试教工作。



储瑞年 江苏太仓人,1941年生于上海,1963年毕业于北京师范大学数学系,同年任北京师范大学附属女子中学数学教师,1988年被评为北京市中学高级教师,现任北京师范大学附属实验中学(即原北京师范大学附属女子中学)数学教师。



参与编写的书籍有《中国中学教学百科全书·数学卷》、《中学生学科能力目标与培养·数学(高中部分)》、《高中数学总复习(教学参考书)》、《中学教师实用数学辞典》、《中学数学重点课题研究》、《高考应试能力培养丛书·数学》、《十年高考试题分类解析·数学》、《高中数学课外练习题》。他所撰写的《子集、交集、并集、补集的综合练习》一文被收入《名师授课录(中学数学)》一书中。

目 录

前言	(1)
----------	-----

代数部分

第一章 不等式	(5)
第一讲 不等式的性质和证明	(5)
第二讲 不等式的解法	(44)
第三讲 不等式的应用	(71)
第二章 数列、极限、数学归纳法	(95)
第四讲 等差数列与等比数列的定义与性质	(95)
第五讲 数列问题中的数学思想	(104)
第六讲 数列的极限	(132)
第七讲 漫谈数学归纳法	(144)
第三章 复数	(176)
第八讲 深入理解复数的概念,掌握复数的三种 表示方法	(177)
第九讲 熟练掌握复数的运算技能	(199)
第十讲 进一步扩展关于解方程的知识和技能	(212)
第十一讲 要注意复数与几何问题的联系	(220)
第十二讲 复数的应用	(240)
第四章 排列、组合与二项式定理	(249)
第十三讲 排列与组合	(249)
第十四讲 排列组合应用问题	(259)
第十五讲 二项式定理	(275)

解析几何部分

第五章 直线	(285)
--------------	-------

第十六讲	定比分点公式	(285)
第十七讲	直线的方程	(293)
第十八讲	两条直线的位置关系	(300)
第六章	圆锥曲线	(315)
第十九讲	充要条件	(315)
第二十讲	曲线和方程	(321)
第二十一讲	圆	(331)
第二十二讲	椭圆、双曲线、抛物线的定义及应用	(348)
第二十三讲	求椭圆、双曲线、抛物线方程的方法	(356)
第二十四讲	直线与椭圆、双曲线、抛物线的位置关系	(367)
第二十五讲	两条圆锥曲线的关系	(378)
第二十六讲	与圆锥曲线有关的最值问题	(386)
第七章	参数方程和极坐标	(396)
第二十七讲	参数方程与普通方程的互化	(396)
第二十八讲	直线参数方程的应用	(404)
第二十九讲	二次曲线参数方程的应用	(416)
第三十讲	极坐标	(425)
第三十一讲	轨迹问题	(436)

前 言

学生学习数学,必须首先掌握双基——基础知识、基本技能.

在掌握双基的基础上,还需要引伸触发、深入细究,了解所学的知识技能在各方面的综合运用,同时培养和提高分析问题和解决问题的能力.

数学教师对这方面进行个别指导或小组辅导,也需要有相应的参考资料.

为此,特请经验丰富的数学名师,编写本书,以适应上述需要.

本书源于课本,高于课本.对高中二年级以上数学基础知识,既复习巩固,又综合运用;对数学技巧方法,既说明思路,又广为举例,希望达到帮助学生拓宽知识、提高能力的目的.

本书为讲座集形式.对教材每一章分为若干讲座,每一讲座就一个讲题综合论述,并附有习题与答案.全书分为七章,共三十一讲.

作为第一个读者,我有幸拜读了全部初稿,真觉得精采纷呈.例如,在复数章中,扩展了关于解方程的知识与技能,并特别注意复数与几何问题的联系;又如在圆锥曲线章中,提出了充要条件,及与圆锥曲线有关的最值问题;在参数方程和极坐标章中,专门提到了轨迹问题.再如在数列、极限、数学归纳法章中,特别谈到了数列问题中的数学思想.诸如此类,这些都是单纯按照课本学习所不能获得的.

在此乐于推荐本书,供高中二年级以上学生课外阅读之用,也可供高中数学教师作为数学辅导参考资料之用.

对本书的缺点错误,敬请批评指正.

吕学礼

1993年10月

代数部分

第一章 不等式

第一讲 不等式的性质和证明

在日常生活中,我们经常会遇到如下的问题:

1. 为了实现 2000 年国民经济翻两番的目标,从现在开始,每年至少要保持百分之几的平均增长率?

2. 小明的家离学校 3 公里,如果步行速度为 4 公里/小时,为了保证上午八点钟上课不迟到,小明最晚什么时候出发?

这两个问题属于解不等式问题.

3. 为什么水桶、水管多用圆柱型呢?

这里除了力学和美学的道理之外,从数学角度说,是做成圆柱型省材料.即是说:用相同的原材料做成圆柱型的容器比做成棱柱型的容器的容积大.如果考虑到两种柱型的高度一样,那么这个问题实际是要证明不等式:在周长一定的条件下,

圆的面积 $>$ 多边形的面积.

不论是解不等式,还是证明不等式,生产和生活中,这种不等量关系比等量关系的存在更为普遍,因此,我们需要认真加以研究和解决.

请看下面关于不等式 $2\sqrt{x-1}+x>0$ 的两个解法:

$$\begin{array}{ll}\text{解法一: 移项} & 2\sqrt{x-1} > -x, \\ \text{两边同时平方} & 4x-4 > x^2, \\ \text{移项整理} & (x-2)^2 < 0.\end{array}$$

原不等式无解.

$$\begin{array}{ll}\text{解法二: 移项} & x > -2\sqrt{x-1}, \\ \text{两边同时平方} & x^2 > 4x-4, \\ \text{移项整理} & (x-2)^2 > 0.\end{array}$$

原不等式的解为 $x \neq 2$ 的一切实数.

上述两个解法得出截然不同的两个答案,那么,哪一个答案是对的呢?

事实上,两个答案都不对. 因为要使 $2\sqrt{x-1}+x > 0$ 成立,首先要保证 $\sqrt{x-1}$ 有意义,则需要 $x \geq 1$,这时, $2\sqrt{x-1}+x > 0$ 肯定成立. 那么上述解法错在什么地方呢?

再看下述的证明:

$$\because \lg \frac{1}{4} > \lg \frac{1}{5}, \text{ 又 } 2 > 1,$$

$$\therefore 2\lg \frac{1}{4} > \lg \frac{1}{5}, \text{ 即 } \lg \frac{1}{16} > \lg \frac{1}{5},$$

$$\text{则 } \frac{1}{16} > \frac{1}{5}.$$

结论显然是错误的,那么错在哪里?为什么会出现上述的错误?

上述错误说明,要正确地解决不等式问题,首先要掌握解不等式或证明不等式的理论依据——不等式的性质.

一、不等式的性质

用不等号“ $>$ ”或者“ $<$ ”连结两个解析式所成的式子叫做不等式. 不等式所表示的是数量之间的大小关系.

在课内,我们已经学习过不等式的如下性质:

1. (对称性) 如果 $a > b$, 那么 $b < a$; 反过来, 如果 $b < a$, 那么 $a > b$.
2. (传递性) 如果 $a > b, b > c$, 那么 $a > c$.
3. 如果 $a > b$, 那么 $a + c > b + c$.
4. 如果 $a > b, c > 0$, 那么 $ac > bc$;
如果 $a > b, c < 0$, 那么 $ac < bc$.
5. 如果 $a > b, c > d$, 那么 $a + c > b + d$.
6. 如果 $a > b, c < d$, 那么 $a - c > b - d$.
7. 如果 $a > b > 0, c > d > 0$, 那么 $ac > bd$.
8. 如果 $a > b > 0$, 那么 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
9. 如果 $a > b > 0, 0 < c < d$, 那么 $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.
10. 如果 $a > b > 0$, 那么 $a^n > b^n (n \in \mathbf{N})$.
11. 如果 $a > b > 0$, 那么 $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} (n \in \mathbf{N})$.

关于上述不等式的性质, 必须说明:

(1) 上述不等式性质的证明, 都是基于下述的事实——实数比较大小的法则.

如果 $a, b \in \mathbf{R}$, 那么

$$a > b \iff a - b > 0;$$

$$a = b \iff a - b = 0;$$

$$a < b \iff a - b < 0.$$

这一法则, 显示了实数的大小顺序与运算性质的等价关系, 它是证明不等式性质的基本依据.

下面以性质 7 和性质 10 为例进行证明.

性质 7 的证明:

$$\because a > b > 0, c > d > 0,$$

$$\therefore a-b>0, c-d>0.$$

$$\text{则 } c(a-b)>0, b(c-d)>0.$$

$$\begin{aligned}\therefore ac-bd &= ac-bc+bc-bd \\ &= c(a-b)+b(c-d)>0.\end{aligned}$$

故 $ac>bd$.

本讲前面所说证明的错误,就是因为 $0>\lg \frac{1}{4}>\lg \frac{1}{5} \not> 0$.

尽管有 $2>1>0$, 仍然不能保证 $2\lg \frac{1}{4}>\lg \frac{1}{5}$ 成立. 即是说, 性质7中, 要有 $a>b>0, c>d>0$ 同时成立, 才能使 $ac>bd$ 成立. 同学们对不等式性质的条件和结论, 必须充分认识, 严格掌握, 准确应用. 否则, 就容易造成解题和证题时的错误.

性质10的证明:

$$\because a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

$$\text{又 } a>b>0, \therefore a-b>0,$$

$$\text{且 } a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1} > 0.$$

$$\therefore a^n - b^n > 0, \text{ 即 } a^n > b^n.$$

这里用到了 $a>b>0$ 的条件, 本讲前面所说不等式解法之所以出错, 就是因为 $2\sqrt{x-1}>-x$ 中, $-x$ 不一定是正数, 而 $x>-2\sqrt{x-1}$ 中, $-2\sqrt{x-1}\leq 0$, 所以两边同时平方后, 不能保证 $4x-4>x^2$ 或 $x^2>4x-4$ 肯定成立. 譬如说, 尽管有 $2>-3$, $-2>-3$, 但是 $2^2 \not> (-3)^2$, $(-2)^2 \not> (-3)^2$. 如果忽略了 a, b 均为正数的条件, 结论 $a^n > b^n$ 就未必成立. 这正是前面解法中出错的原因.

(2) 不等式的性质除了对称性和传递性外, 主要都是描述不等式实施运算后所具有的特性. 理解记忆时, 可以类比等式的性质来掌握.

从联系看, 不等式和等式一样, 都具有对称性和传递性;