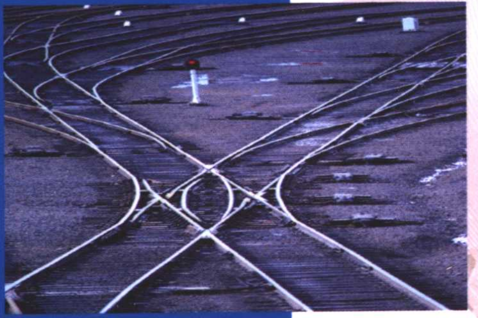
华章教育

运筹学

Operations Research



鲍祥霖 编著

（上海交通大学）

机械工业出版社

China Machine Press

运筹学

Operations Research

鲍祥霖　编著
（上海交通大学）

机械工业出版社
China Machine Press

本书主要内容包含线性规划、单纯形法、对偶理论、动态规划、图与网络分析、决策分析、对策论、存储论、排队论。本书对运筹学以上各分支的基本概念、基本理论和计算方法均做了较深入的阐述，并用较多的例题介绍了运筹学在管理、经济、金融、工业及工程中的优化设计等领域中的应用。每章均附有与内容深度配套的一定数量的习题，习题均给出了答案和提示，以方便自学。

本书可作为高等院校理科类、工科类、计算机类、经济类、管理类本科生及硕士研究生教材；也可作为从事工业和工程设计人员、计算机软件设计人员、企业管理人员、经济管理工作者的学习参考资料；对考研者来说，本书也是一本极好的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学/鲍祥霖编著. -北京：机械工业出版社，2005.8
ISBN 7-111-16431-8

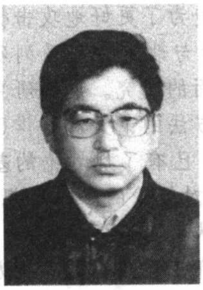
Ⅰ.运…　Ⅱ.鲍…　Ⅲ.运筹学　Ⅳ.O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 030419 号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037)
责任编辑：杨熙越　洪海山　　版式设计：刘永青
北京瑞德印刷有限公司印刷 ·新华书店北京发行所发行
2005 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
787mm×1092mm 1/16 · 12.25 印张
定价：23.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线：(010)68326294
投稿热线：(010)88379007

作者简介



鲍祥霖　浙江杭州人，大学数学系本科毕业，从教32年。现任上海交通大学系统工程研究所副教授、硕士生导师；并为中国管理科学研究院终身研究员，中国经济科技开发国际交流协会理事。

编写出版的书籍有：《概率论与数理统计》(上海交通大学出版社出版)，《定量分析基础》(上海人民出版社出版)，《经济管理数学》(上海交通大学出版社出版)。发表论文十余篇。

主要教学课程：运筹学、投资学、概率论与数理统计、随机过程、离散数学、数学分析、线性代数和复变函数论。

前 言

大部分学者认为运筹学起始于第二次世界大战，在第二次世界大战期间英美为了更好地攻击德国的飞机和潜艇，也为了自己的船队减少受到德国潜艇攻击，开展了战术评价与改进的一系列研究；后来又综合运用科学的方法开展了对作战计划、战略选择及后勤调度等方面的研究。这些研究奠定了运筹学的基础。严格地说，在第二次世界大战之前蕴涵运筹学的思想和方法的论文及著作已有出现；如1938年在康托洛维奇所著的《生产组织与管理中的数学方法》一书中已有了规划论的基本思想方法，1928年在冯·诺伊曼所著的《对策论和经营行为》一书中已蕴涵了对策论的基本思想，1909年在爱尔朗关于用概率论的方法来研究电话占线规律的论文中已给出了排队论的不少成果。

第二次世界大战以后，前苏联、英国、美国等学者将运筹学广泛运用于经济、管理和军事等方面；同时对经济、管理和军事等方面问题进行的定量分析也极大地丰富了运筹学的内容和方法。

在20世纪50年代，钱学森、许国志等学者将西方的运筹学引入我国，而后以华罗庚为首的一批中国数学家参与了运筹学的研究，使我国在运筹学的研究、教学和应用方面很快达到了当时的国际水平。

运筹学现已成为一门体系严密、应用范围广泛的新兴学科，成为一门对各类社会问题、经济问题进行定量分析并进行科学决策的基础性学科。在我国，管理类、经济类、工科各专业、信息处理等专业均已开设了运筹学课程。

笔者从事运筹学教育工作多年，本书是根据讲稿改写而成的从体系上更加适合教学应用；希望本书的出版能对读者有所帮助。

讲授本书约需108学时，如学时不足可根据专业需要选讲其中部分内容。建议本科阶段至少学完以下内容：线性规划问题及单纯形法(第1章)、运输问题(第3章)、整数线性规划(第4章)、动态规划(第6章)、图与网络分析(第7章)、决策分析(第8章)、存储论(第10章)。其余内容可供研究生阶段学习，包括：线性规划的对偶理论及优化后分析(第2章)、非线性规划(第5章)、对策论(第9章)、排队论(第11章)。本书选择了一些习题并给出了习题答案和提示，希望读者能做完其中大部分习题。由于水平所限，书中难免会有不足之处，欢迎读者批评指正。田澎教授仔细审阅了本书的初稿，并提出了一些修改意见，对田教授的支持，在此深表谢意。

鲍祥霖

2004年9月

于上海交通大学系统工程研究所

目 录

第1章

线性规划问题及单纯形法

线性规划是运筹学的重要分支。众所周知，对资金、资源进行优化配置使经济运行达到最优状态是经济学家和企业家追求的目的，这里所谓的目的一般为使成本达到最小、利润达到最大或对环境影响达到最低。同时任何资源，如劳动力、原料、设备及资金等都是有限的，即都是受到制约的。这类问题称为规划问题。

规划问题的数学模型一般由两部分组成：一部分是反映制约情况的约束条件；另一部分是反映经济学家或企业家所希望达到的目的的目标函数。若规划问题的约束条件为决策变量的若干个线性等式或线性不等式，目标函数为决策变量的线性函数，这样的问题称为线性规划问题；换言之，线性规划问题是约束条件为若干个线性等式或线性不等式，目标函数为线性函数且是决策变量的一元或多元函数的条件极值问题。

1.1 线性规划问题的数学模型及有关概念

先考虑下面两个例子。

【例 1.1】 某企业现有 A、B、C 3 种原料各 3 000 吨、4 000 吨、5 000 吨，生产甲、乙两种产品；生产 1 000 吨甲种产品需 A、B、C 原料各为 100 吨、200 吨、300 吨，生产 1 000 吨乙种产品需 A、B、C 原料各为 150 吨、250 吨、350 吨，生产 1 000 吨甲种产品可获利 15 000 元，生产 1 000 吨乙种产品可获利20 000 元。在不购买原料的前提下各生产多少甲、乙产品获利最大？

记各生产甲、乙产品 x_1、x_2 千吨，收益为 y 元，则该问题的数学模型为：

$$\text{在约束条件}\begin{cases}100x_1+150x_2\leqslant 3\,000\\200x_1+250x_2\leqslant 4\,000\\300x_1+350x_2\leqslant 5\,000\\x_i\geqslant 0\quad(i=1,2)\end{cases}$$

下求函数 $y=f(x_1,\ x_2)=15\,000x_1+20\,000x_2$ 的极大值。

【例 1.2】 某饲养场利用 n 种天然饲料来配制一批混合饲料，要求在这批混合饲料中必须含有 k 种不同的营养成分，并要求第 i 种营养成分的含量不低于 b_i；已知第 i 种营养成分在第 j 种天然饲料中每

单位的含量为a_{ij}，第j种天然饲料每单位的价格为c_j。那么在保证营养的条件下，应采用怎样的配方才能使混合饲料的总费用最小?

解 设第j种天然饲料的用量为$x_j(j=1, 2, \cdots, n)$，饲料的每单位原料价格为f，则本问题可归纳为以下的数学形式：

$$\min f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i (i = 1,2,\cdots,k) \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

从以上两例可以看出，它们都是一类优化问题，其共同特征为：

(1)每个问题都用一组决策变量$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$表示某一方案，这组决策变量的值就代表一个具体方案，一般这些变量取值是非负的。

(2)存在一定的约束条件，这些约束条件可用一组线性等式或线性不等式来表示。

(3)都有一个要求达到的目标，它可用决策变量的线性函数(称为目标函数)来表示，按问题的不同，要求目标函数实现最大化或最小化。

满足以上条件的数学模型称为线性规划模型，即有以下的定义。

【定义 1.1】 称条件极值问题：

$$\min\ (\max) z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \tag{1-1}$$

$$s.t\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n V_1 b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n V_2 b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n V_m b_m \end{cases} \tag{1-2}$$

为线性规划问题，记为(LP)(也称为线性规划一般模型)。这里符号“V_i”$(i=1, 2, \cdots, m)$表示关系符号“=”、“$\leqslant$”或“$\geqslant$”三者之一，称$x_1, \cdots, x_n$为决策变量，称式(1-1)为目标函数，式(1-2)为约束条件。

【定义 1.2】 若(LP)的决策变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的某一组取值满足全部约束条件，则称该组取值为(LP)的一个可行解，称可行解的全体，即集合：

$$T = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n V_i b_i,\ i = 1,2,\cdots,m\}$$

为(LP)的可行域。

若$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$是$(LP)$的一个可行解，且对$(LP)$的任一可行解$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in T$，均有：

$$c_1 x_1^{(0)} + c_2 x_2^{(0)} + \cdots + c_n x_n^{(0)} \leqslant (\geqslant) c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

则称$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$为$(LP)$的最优解。

前面我们通过实例归纳出了线性规划问题的一般形式，下面我们分析二维线性规划问题以便给读者对线性规划问题及有关概念从几何的角度有一个直观的感觉。

考虑两个决策变量的(LP)问题：

$$\max\ (\min) z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$s.t\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 V_1 b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 V_2 b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 V_m b_m \end{cases} \tag{1-3}$$

显然决策变量的取值(x_1, x_2)可用坐标平面$O-x_1x_2$上的动点$M(x_1, x_2)$表示，而可行域的图像是$O-x_1x_2$平面上的某一点集。

$$\begin{aligned} T &= \{(x_1, x_2) \mid a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 V_i b_i,\ i = 1,2,\cdots,m\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{m} \{(x_1, x_2) \mid a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 V_i b_i\} \end{aligned} \tag{1-4}$$

注意到：(1)当"V_i"为"="时，$\{(x_1, x_2) | a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 V_i b_i\}$即为直线$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$。

(2)当"V_i"为"≤"或"≥"时，$\{(x_1, x_2) | a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 V_i b_i\}$是以直线$a_{i1}x_1 + a_{i2} = b_2$为边界的某一闭合半平面，其中法线方向$\{a_{i1}, a_{i2}\}$所指的一侧表示$\{(x_1, x_2) | a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geqslant b_i\}$，另一侧表示$\{(x_1, x_2) | a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leqslant b_i\}$。

因此可行域 T 是由这些闭合半平面或直线的公共部分形成的点集，它们可以是空集、单点集、射线、直线段，但更一般地在多维情况下是凸多面体(有界或无界的)。以上的点集(除空集以外)均有一特点，即若任取集中两点则连结这两点的线段上的点都在该集合中，这样的点集称为凸集，下面给出凸集的定义。

【定义 1.3】 设 C 是一点集，若任取二点 $X^{(1)}$ 和 $X^{(2)}$ ($X^{(1)}$，$X^{(2)} \in C$)对任意实数 $\alpha \in [0, 1]$均有 $\alpha \cdot X^{(1)} + (1-\alpha) \cdot X^{(2)} \in C$，则称 C 为凸集。

空集可以看成凸集的特例。

求解式(1-3)可以看成是在特定的凸集(可行域)内按其坐标(x_1, x_2)对目标函数值 $z = c_1x_1 + c_2x_2$ 来寻找使目标函数值达到最大(小)值的 $X^* = (x_1^*, x_2^*)$。为此，考虑直线族：

$$L_k: c_1x_1 + c_2x_2 = z_k$$

对不同的 z_k 值直线 L_k 上的点所取目标函数值均为 z_k，故 L_k 为等值线族。显然，L_k 中的直线是平行的，垂直于同一法方向，$\{c_1, c_2\}$，($\{c_1, c_2\} \triangleq \nabla z$ 是目标函数 z 的梯度方向)，∇z 是目标函数 z 的增加方向，故沿∇z 方向滑动时，等值线对应的函数值增加；当直线平移到 T 的边界时，目标函数 z 达到最大值。

【例 1.3】

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

$$s.t\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leqslant 90 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 80 \\ x_1 + x_2 \leqslant 45 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2) \end{cases}$$

可行域 T 为图 1-1 中的五边形 $OABCD$。

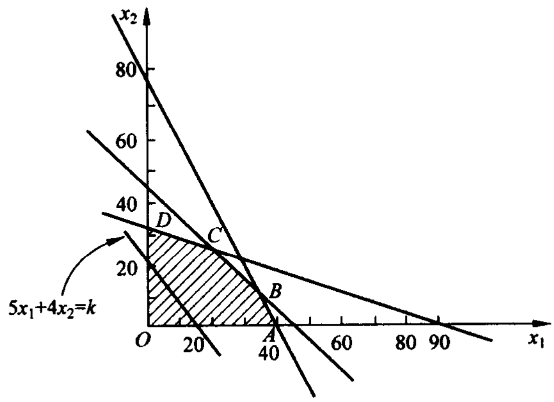


图 1-1

考虑直线族 L_k：$5x_1 + 4x_2 = k$(k 为任意常数)。

当 k 增加时，目标函数值增加，直线与 T 交点坐标均为目标函数等值可行解，当直线平移到 T 的边界时，与 T 仅有一个交点 B，这时目标函数 z 达到最大值，B 点坐标为(35，10)对应的目标函数值为 215。

【例 1.4】

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$s.t\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1 - x_2 \leqslant 2 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2) \end{cases}$$

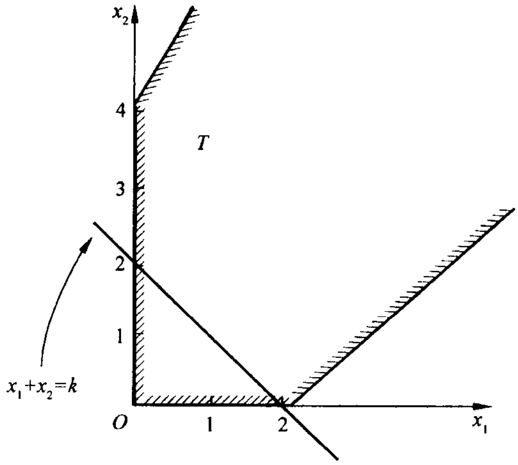


图 1-2

可行域如图 1-2 所示，这时可行域 T 无界。

考虑等值线族 L_k：$x_1+x_2=k$(k 为任意常数)。

无论 k 增加到多大均与 T 有交点，故(LP)没有有限最优解(这种情况称为无界解)。

一般来说，求解线性规划问题可能遇到以下几种情况：

(1)$T=\varnothing$，这时(LP)无可行解；

(2)$T\neq\varnothing$且为有界凸多面体，则最优解存在(可能惟一；也可能不惟一，有无穷多个，如将例 1.3 中目标函数换为 $\max z=x_1+x_2$，则线段 BC 上点的坐标均为最优解)；

(3)$T\neq\varnothing$且为无界，则最优解可能存在且惟一，也可能有无穷多个最优解(如将例 1.4 中目标函数换为 $\max z=-2x_1+x_2$，则为无穷多个最优解)也可能为无界解(没有有限最优解)。

最后我们给出线性规划标准模型如下。

【定义 1.4】 称以下形式的条件极值为线性规划(LP)的标准模型。

$$\max z = c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$
$$s.t\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \\ x_j\geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,n) \end{cases} \tag{1-5}$$

其中 $b_i\geqslant 0$($i=1$，2，…，m)；c_j，a_{ij}($i=1$，…，m，$j=1$，…，n)均为常数。

对标准模型也可用以下矩阵形式表示：

$$\max z = C\cdot X$$
$$s.t\begin{cases} AX=b \\ X\geqslant 0 \end{cases} \tag{1-6}$$

其中，$A=(a_{ij})_{m\times n}$；$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$；$C=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$；$b=(b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$。

这里 $X\geqslant 0$ 的意义为 $x_j\geqslant 0$($j=1$，2，…，n)，没有比较大小之意。为了以后讨论问题明确起见，对标准模型还规定 $\mathrm{rank}(A)=m$(显然在剔除了约束条件中的多余的线性方程后能达到 $r(A)=m$ 的规定)及 $b_i\geqslant 0$ ($i=1$，2，…，m)。称 $AX=b$ 为线性约束条件；$X\geqslant 0$ 为非负约束条件；c_j($j=1$，2，…，n)为价值系数；x_j($j=1$，2…，n)为决策变量。

一般模型可通过以下手段化为标准模型：

(1)若求 $\min z=CX$，可令 $z'=-z$，便化为 $\max z'=-CX$；

(2)若约束条件中有“$\leqslant$”关系，可加上非负松弛变量化为“$=$”关系，若约束条件中有“$\geqslant$”关系，可

减去非负剩余变量化为"="关系；

(3)若有某个 $b_k<0$，可在不等式(或等式)两边同乘以-1；

(4)若有无正负约束决策变量 x_k，可令 $x_k=x_k'-x_k''(x_k',\ x_k''\geqslant 0)$。

【例 1.5】 将以下(LP)问题化为标准型。

$$\min z=-x_1+2x_2-3x_3$$
$$s.t\begin{cases} x_1+x_2+x_3\leqslant 7\\ x_1-x_2+x_3\geqslant 2\\ -3x_1+x_2+2x_3=5\\ x_j\geqslant 0\quad (j=1,2)\end{cases}$$

解　令 $y=-z$，$x_3=x_4-x_5(x_4,\ x_5\geqslant 0)$，引入松弛变量 x_6 及剩余变量 x_7，得：

$$\max y=x_1-2x_2+3x_4-3x_5$$
$$s.t\begin{cases} x_1+x_2+x_4-x_5+x_6=7\\ x_1-x_2+x_4-x_5-x_7=2\\ -3x_1+x_2+2x_4-2x_5=5\\ x_j\geqslant 0\quad (j=1,2,4,5,6,7)\end{cases}$$

1.2　线性规划问题的基本性质及基本定理

为不失一般性，本节仅讨论标准形式的线性规划问题，即讨论问题(LP)

$$\max z=CX$$
$$s.t\begin{cases} AX=b\\ X\geqslant 0\end{cases}\tag{1-7}$$

其中，　$A\triangleq(a_{ij})_{m\times n}$；$X\triangleq(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^T$；$C\triangleq(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n)$；

$b\triangleq(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m)^T$，$b_i\geqslant 0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$；$r(A)=m\leqslant n$。

1.2.1　可行域的几何结构

在本章 1.1 节已经给出了凸集的定义(见定义 1.3)。对标准形式的线性规划问题式(1-7)的可行域有以下性质：

【定理 1.1】 线性规划问题式(1-7)的可行域是凸集。

证明　由定义可知可行域为：

$$T=\{X\,|\,AX=b,\ X\geqslant 0\}$$

任取 $X^{(1)}$，$X^{(2)}\in T$，对任意实数 $\alpha\in[0,\ 1]$，有

$$AX^{(1)}=b,\ AX^{(2)}=b,\ X^{(1)}\geqslant 0,\ X^{(2)}\geqslant 0$$
$$A[\alpha\cdot X^{(1)}+(1-\alpha)\cdot X^{(2)}]=\alpha\cdot AX^{(1)}+(1-\alpha)\cdot AX^{(2)}$$
$$=\alpha\cdot b+(1-\alpha)\cdot b=b$$
$$\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}\geqslant 0$$

则

$$\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}\in T$$

故 T 为凸集。

【定理 1.2】 有限个凸集之交是凸集。

证明　设 $T_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$为 n 个凸集，$T\triangleq\bigcap\limits_{i=1}^{n}\{T_i\}$。

不妨设 $T\neq\varnothing$。任取 $X^{(1)}$，$X^{(2)}\in T$，则 $X^{(1)}$，$X^{(2)}\in T_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。

因 T_i 是凸集，任取 $\alpha\in[0,\ 1]$，有

$$\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}\in T_i(i=1,2,\cdots,n)$$
$$\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}\in\bigcap_{i=1}^{n}\{T_i\}=T$$

因此 $T=\bigcap_{i=1}^{n}\{T_i\}$ 是凸集。

【定义 1.5】 设 X 是凸集 T 上的一点，若不存在 $X^{(1)}$，$X^{(2)}\in T$，$X^{(1)}\neq X^{(2)}$ 及实数 $\alpha\in(0,1)$ 使

$$X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}$$

则称 X 是凸集 T 的极点。

显然凸多边形、凸多面体的顶点均为极点。

1.2.2 基向量、基本可行解

记模型中线性约束方程组之系数矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的第 j 列为 $P_j(j=1,2,\cdots,n)$ 即 $P_j\triangleq(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^T$。由于假设 $r(A)=m$，故 P_1，P_2，…，P_n 中必存在 m 个线性无关的列向量，由这些列向量可构成一个满秩方阵 B。我们称该列向量组为 (LP) 的一个基底，称 B 为 (LP) 的一个基。

若 $B=(P_{j_1},P_{j_2},\cdots,P_{j_m})$ 则称决策向量 X 中的分量，称 x_{j_1}，x_{j_2}，…，x_{j_m} 为关于基 B 的基变量，而称 X 的其他分量为关于基 B 的非基变量。

设 B 为 (LP) 问题的一个基，当对应的非基变量都取零时，方程组 $AX=b$ 的解称为 (LP) 问题的一个基本解；若基本解中有一个或一个以上的基变量也等于零，则称为退化的基本解，否则为非退化的。由于基本解中的非零分量未必是非负的，所以基本解不一定是可行解。对满足非负条件的基本解称为基本可行解，基本可行解对应的基称为可行基。

【例 1.6】 设 (LP) 问题为：

$$\max z=x_1-x_2$$

$$s.t\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=-2\\x_1-2x_2+x_4=2\\x_1+x_2+x_5=5\\x_j\geqslant 0\quad(j=1,2,\cdots,5)\end{cases}$$

显然 $B_1=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ 是一个基，对应的基本解是 $X^{(1)}=(-1,0,0,3,6)^T$，由于 $X^{(1)}$ 的第一个分量为负值，故 $X^{(1)}$ 不是可行解；$B_2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 也是一个基，对应基本解为 $X^{(2)}=(0,0,2,2,5)^T$，且是可行解，故 $X^{(2)}$ 是基本可行解。

1.2.3 基本定理

【引理 1.1】 (LP) 问题的可行解 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 为基本可行解的充要条件是 X 的正分量所对应的 A 中的列向量是线性无关的。

证明 必要性：由基本可行解的定义即得。

充分性：不妨设 X 的前 k 个分量为正分量，即 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1},\cdots,x_n)^T(x_j>0,j=1,2,\cdots,k;x_j=0,j=k+1,\cdots,n)$。$x_1$，$x_2$，…，$x_k$ 对应的 A 中列向量 P_1，P_2，…，P_k 线性无关；$k\leqslant r(A)\triangleq m$，因 X 是可行解，有 $AX=b$，即 $\sum_{j=1}^{k}x_jP_j=AX=b$。

若 $k=m$，则 $B=(P_1,P_2,\cdots,P_k)$ 就是一个基，X 为对应 B 的一个基本可行解。

若 $k<m$，则可从 A 的其余 $n-k$ 个列向量中再选出 $m-k$ 个，不妨设为 P_{k+1}，…，P_m，使 $(P_1,P_2,\cdots,P_k,\cdots,P_m)=B$ 构成一个基，而 X 即为对应于这一基的基本可行解。

【定理 1.3】 X 为 (LP) 的基本可行解的充要条件是 X 为可行域 T 的一个极点。

证明 充分性：设 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots,x_n)^T$ 是可行域 T 的一个极点。不妨设 X 的前 k 个分量为正分量。由引理 1.1，只要证明 P_1，P_2，…，P_k 线性无关即可。事实上若 P_1，P_2，…，P_k 线性相关，则存在 k 个不全为零的实数 λ_1，λ_2，…，λ_k 使得

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_k P_k = 0$$

于是对任意正数 δ 有

$$\delta\lambda_1 P_1 + \delta\lambda_2 P_2 + \cdots + \delta\lambda_k P_k = 0$$

由于 $X \in T$，则

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \cdots + x_k P_k = b$$

由以上两式有

$$(x_1 \pm \delta\lambda_1)P_1 + (x_1 \pm \delta\lambda_2)P_2 + \cdots + (x_k \pm \delta\lambda_k)P_k = b$$

取 $\delta_0 = \frac{1}{2}\min\limits_{|\lambda_j| \neq 0}\left\{\frac{x_j}{|\lambda_j|}\right\}$，有

$$x_j \pm \delta_0\lambda_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2,\cdots,k)$$

令

$$X^{(1)} \triangleq (x_1 + \delta_0\lambda_1, x_2 + \delta_0\lambda_2, \cdots, x_k + \delta_0\lambda_k, 0, \cdots, 0)^T \in T$$

$$X^{(2)} \triangleq (x_1 - \delta_0\lambda_1, x_2 - \delta_0\lambda_2, \cdots, x_k - \delta_0\lambda_k, 0, \cdots, 0)^T \in T$$

则 $X^{(1)} \neq X^{(2)}$，$X = \frac{1}{2}X^{(1)} + \frac{1}{2}X^{(2)} \in T$，这与 X 是 T 的极点相矛盾。

故 P_1，P_2，…，P_k 线性无关，从而 X 是基本可行解。

必要性：若 X 是(LP)的基本可行解，则 X 是 T 的一个极点。

用反证法证明这一结论。

若 X 不是 T 的极点，不妨设 X 的前 k 个分量取正值，则存在：$X^{(1)} \in T$，$X^{(2)} \in T$，$X^{(1)} \neq X^{(2)}$ 及 $\alpha \in (0，1)$使得

$$X = \alpha \cdot X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(2)}$$

其中，$X^{(1)} = (x_1^{(1)}，x_2^{(1)}，\cdots，x_k^{(1)}，\cdots，x_n^{(1)})^T$；$X^{(2)} = (x_1^{(2)}，x_2^{(2)}，\cdots，x_k^{(2)}，\cdots，x_n^{(2)})^T$

由于当 $j \geqslant k+1$ 时，$x_j = 0$，$x_j^{(1)} \geqslant 0$，$x_j^{(2)} \geqslant 0$，故有 $x_j^{(1)} = x_j^{(2)} = 0$。

于是由 $A \cdot X^{(1)} = A \cdot X^{(2)} = b$，得 $\sum\limits_{j=1}^{k}(x_j^{(1)} - x_j^{(2)})P_j = 0$。

又由于 $X^{(1)} \neq X^{(2)}$，故至少有一个 $j(1 \leqslant j \leqslant k)$，使得 $x_j^{(1)} \neq x_j^{(2)}$。

因而 P_1，P_2，…，P_k 线性相关与引理 1.1 相矛盾，故 X 是 T 的一个极点。

【定理 1.4】（线性规划基本定理）

(1)若(LP)存在有限最优解，则某个基本可行解是最优解；

(2)若(LP)存在可行解，则必有基本可行解。

证明　(1)设 X 为(LP)的一个有限最优解，不妨设 $X = (x_1，\cdots，x_k，\cdots，x_n)^T$ 的前 k 个分量为正分量。

若 P_1，P_2，…，P_k 线性无关，则由引理 1.1 可知 X 是基本可行解，命题已成立。否则存在其中至少有一个是正数的 k 个实数，λ_1，λ_2，…，λ_k，使 $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_k P_k = 0$。

令

$$y_j \triangleq \begin{cases} \lambda_j & j = 1,2,\cdots,k \\ 0 & j = k+1, k+2, \cdots, n \end{cases}$$

$$Y \triangleq (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$$

构造 $X \pm \varepsilon Y(\varepsilon > 0)$。

当 ε 充分小时，$X \pm \varepsilon Y \in T$(因 $A(X \pm \varepsilon Y) = b$，且当 ε 充分小时 $X \pm \varepsilon Y \geqslant 0$)。

由 $CX \geqslant C(X \pm \varepsilon Y)$知 $CY = 0$，进而可知所有形如 $X \pm \varepsilon Y$ 的可行解均为最优解。

取 $\varepsilon_1 = \min\left\{\frac{x_j}{y_j} \mid y_j > 0，j = 1，2，\cdots，k\right\} \triangleq \frac{x_r}{y_r}$，令 $X^{(1)} \triangleq X - \varepsilon_1 Y$，则 $X^{(1)}$ 的分量 $x_j^{(1)} = x_j - \varepsilon_1 y_j \geqslant 0$ $(j = 1，2，\cdots，k)$，$x_j^{(1)} = 0(j = k+1，\cdots，n)$且 $x_r^{(1)} = x_r - \varepsilon_1 y_r = 0$。

故 $X^{(1)}$ 是(LP)的一个正分量个数较 X 的正分量个数少的最优解。

如此继续，经有限步可得最优解 $X^{(*)}$ 其正分量所对应的 A 的列向量线性无关，从而 X^* 是基本可行解，也是最优解。

(2)可以仿照(1)的证明，从一个可行解(如果它不是基本可行解)去构造另一个正分量较少的可行

解，直到获得基本可行解。 （证毕）

为了进一步讨论方便起见，引入以下概念和记号。

设 B 为(LP)的一个基，A 中去掉 B 后余下各列构成的矩阵记为 D；记：基变量所构成的向量为 X_B，非基变量构成的向量为 X_D；基变量对应的价值系数构成的向量为 C_B，非基变量对应的价值系数构成的向量为 C_D。

不失一般性设：

$$B=(P_1,P_2,\cdots,P_m),D=(P_{m+1},P_{m+2},\cdots,P_n),$$

对应地有：$X_B=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)^T$

$X_D=(x_{m+1},\ x_{m+2},\ \cdots,\ x_n)^T$

$C_B=(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_m)$，$C_D=(c_{m+1},\ c_{m+2},\ \cdots,\ c_n)$

若以 B 为初始可行基，记对应的基本可行解为 $X^{(0)}$。

对标准形式的(LP)问题的最优解有以下判别定理。

【定理 1.5】（最优解判别定理）设 $X^{(0)}$ 是标准(LP)问题对应于基 B 的基本可行解，则当 $C_D-C_B\cdot B^{-1}D\leqslant 0$ 时，$X^{(0)}$ 是(LP)的一个最优解。

证明 $A=(B,\ D)$ $C=(C_B,\ C_D)$ $X=\begin{pmatrix}X_B\\X_D\end{pmatrix}$

任取 $X\in T$ 有

$$z=CX=(C_B,C_D)\cdot\begin{pmatrix}X_B\\X_D\end{pmatrix}=C_BX_B+C_D\cdot X_D$$

又由 $AX=b$ 有

$$(B,D)\cdot\begin{pmatrix}X_B\\X_D\end{pmatrix}=b$$

$$BX_B+DX_D=b$$

由 $\det B\neq 0$ 得

$$X_B=B^{-1}b-B^{-1}DX_D$$

于是

$$\begin{aligned}CX&=C_B(B^{-1}b-B^{-1}DX_D)+C_DX_D\\&=C_BB^{-1}b-C_BB^{-1}DX_D+C_DX_D\\&=C_BB^{-1}b+(C_D-C_BB^{-1}D)X_D\end{aligned}$$

此外由于 $X^{(0)}=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}$且 $B^{-1}b\geqslant 0$，则

$$\begin{aligned}CX^{(0)}-CX&=(C_B,C_D)\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}-C_BB^{-1}b-(C_D-C_BB^{-1}D)X_D\\&=C_BB^{-1}b-C_BB^{-1}b-(C_D-C_BB^{-1}b)X_D\geqslant 0\end{aligned}$$

即有 $CX^{(0)}\geqslant CX$，故 $X^{(0)}$ 是最优解。

注：本定理给出了基本可行解为最优解的一个充分条件，而这一条件等价于条件 $C-C_BB^{-1}A\leqslant 0$，即条件 $C_D-C_B\cdot B^{-1}D\leqslant 0$ 等价于 $C-C_BB^{-1}A\leqslant 0$。事实上

$$\begin{aligned}C-C_BB^{-1}A&=(C_B,C_D)-C_BB^{-1}(B,D)\\&=(C_B,C_D)-(C_B,C_BB^{-1}D)=(0,C_D-C_BB^{-1}D)\end{aligned}$$

1.3 单纯形法

1.3.1 原理及例题

前两节我们给出了线性规划问题的模型和基本性质，本节要给出求解线性规划问题的有效方法，即单纯形法。

单纯形法是由美国数学家 G. B. Dantiz 于 1949 年提出的。他于 1948 年出版的《线性结构规划》一

书，提出了“线性规划”的概念，并于 1949 年给出了单纯形法。以后有些数学家也在寻求求解线性规划问题的其他方法；如前苏联数学家 L. G. Khanchian 提出的“多项式算法”，1984 年印度的 N. K. Karmarkar 提出的“投影尺度法”都是有别于单纯形法的其他算法，这些算法从理论上看有一定的优点，但都还不十分成熟，有待进一步完善。单纯形法至今仍是最常用的求解方法。

单纯形法的原理是先选定一个基，求出对应的基本可行解，判别是否为最优解；若不是最优解，则沿着目标函数增加最快的方向求出下一个基本可行解和对应的基，进一步判别是否为最优解；若不是最优解，则进一步迭代，直到获得最优解。

为了进一步说明单纯形法的算法原理，下举一例：

【例 1.7】 求解线性规划问题

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

$$s.t\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 90 & (1) \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 80 & (2) \\ x_1 + x_2 + x_5 = 45 & (3) \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2,\cdots,5) \end{cases} \tag{1-8}$$

解　在式(1-8)中 x_3，x_4，x_5 的系数列向量为：

$$P_3 = (1,0,0)^T, \quad P_4 = (0,1,0)^T, \quad P_5 = (0,0,1)^T$$

$B_1 \triangleq (P_3, P_4, P_5)$可构成一个基，以 x_3，x_4，x_5 为基变量由约束条件得：

$$s.t\begin{cases} x_3 = 90 - x_1 - 3x_2 \\ x_4 = 80 - 2x_1 - x_2 \\ x_5 = 45 - x_1 - x_2 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2,\cdots,5) \end{cases} \tag{1-9}$$

令非基变量 $x_1 = x_2 = 0$ 便得基本可行解 $X^{(0)} = (0,\ 0,\ 90,\ 80,\ 45)^T$。由于目标函数 $z = 5x_1 + 4x_2$ 是非基变量的函数且 x_1，x_2 的系数为正，增加 x_1，x_2 可增加目标函数的值，故 $X^{(0)}$ 不是最优解，一般选择增加系数大的非基变量的值以得到一个新的基本可行解，这里选择 x_1(原非基变量增加值后便成了基变量，称为换入变量)，由于受到约束条件制约，x_1 至多可增加到 $\min\left\{\frac{90}{1},\ \frac{80}{2},\ \frac{45}{1}\right\} = 40$。同时必须从 x_3，x_4，x_5 中换出一个变量，当 $x_1 = 40$，x_2 仍取零时，$x_4 = 0$，这决定了 x_4 为换出变量(原基变量变换为非基变量的变量称为换出变量)。

为了进一步运算的需要用主元素消去法对式(1-8)做换基迭代运算$\left[(2)' = \frac{1}{2} \times (2),\ (1)' = (1) - \frac{1}{2} \times (2),\ (3)' = 3 - \frac{1}{2} \times (2)\right]$；将式$(2)'$代入目标函数，交换排列顺序得：

$$\max z = 200 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_4$$

$$s.t\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 40 & (2)' \\ \frac{5}{2}x_2 + x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 50 & (1)' \\ \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 + x_5 = 5 & (3)' \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2,\cdots,5) \end{cases} \tag{1-10}$$

显然 $B_2 \triangleq (\bar{P}_1, \bar{P}_3, \bar{P}_5)$是式(1-10)的一个基。(以上变换称为基变换。)

令 $x_2 = x_4 = 0$ 得基本可行解 $X^{(1)} = (40,\ 0,\ 50,\ 0,\ 5)^T$。这时 $z = 200$，目标函数是非基变量 x_2，x_4 的函数，x_2 的系数为正，故增加 x_2 会增加 z 的值，$X^{(1)}$ 仍不是最优解。x_2 至多可增加到 $\min\left\{\frac{50}{5/2},\ \frac{40}{1/2},\ \frac{5}{1/2}\right\} = 10$。

当 $x_2=10$，$x_4=0$ 时 $x_5=0$，用主元素消去法对式(1-10)做换基迭代运算得：

$$\max z = 215 - x_4 - 3x_5$$

$$s.t\begin{cases} x_1 \quad\quad + x_4 - x_5 = 35 \\ \quad x_2 \quad - x_4 + 2x_5 = 10 \\ \quad\quad x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 25 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,5) \end{cases} \tag{1-11}$$

以 x_1，x_2，x_3 为基变量得基本可行解 $X^{(2)}=(35,\ 10,\ 25,\ 0,\ 0)^T$。这时 $z=215$，目标函数是非基变量 x_4，x_5 的函数且 x_4，x_5 的系数均非正数，增加 x_4，x_5 不会增加 z 的值。

故 $X^{(2)}$ 为最优解，即 $X^{(*)}=X^{(2)}=(35,\ 10,\ 25,\ 0,\ 0)^T$

$$\max z = 215$$

由单纯形法进行基变换运算太不方便，而施行基变换所用的实际上是消元法，故可用表格形式进行运算，这样就方便多了(用表格形式做单纯形法运算称为表格单纯形法)。在给出表格单纯形法之前，为了帮助读者理解，尚有若干问题需进一步说明。

1.3.2 需进一步说明的若干问题

这里我们首先假设(LP)问题的系数矩阵 A 中含有一个 m 阶单位子矩阵 I_m(不含 m 阶单位子矩阵 I_m 的情况将在以后进一步讨论)，不妨设(LP)问题为：

$$\left.\begin{aligned} &\max z = C\cdot X \\ &s.t\begin{cases} AX=b \\ X\geqslant 0 \end{cases} \\ &\text{其中}: A=(a_{ij})_{m\times n} \triangleq (P_1,P_2,\cdots,P_m,P_{m+1},\cdots,P_n) \\ &\text{且}(P_1,P_2,\cdots,P_m)=I_m \end{aligned}\right\} \tag{1-12}$$

即问题为：

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.t\begin{cases} x_1 \quad\quad + a_{1m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad x_2 \quad + a_{2m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \\ \quad\quad x_m + a_{m\,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{m\,n}x_n = b_m \\ x_j \geqslant 0 \quad j=1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{1-13}$$

消去目标函数中的基变量便得：

$$z = \sum_{i=1}^{m} c_ib_i + \sum_{j=m+1}^{n}\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_ia_{ij}\right)x_j$$

记：$\sigma_j \triangleq c_j - \sum\limits_{i=1}^{m} c_ia_{ij}\ (j=m+1,\cdots,n)$，

称 σ_j 为检验数(当目标函数表示为非基变量的函数时，目标函数中的非基变量系数称为检验数)。

于是，目标函数可进一步表示为：

$$-z + \sum_{j=m+1}^{n} \sigma_jx_j = -\sum_{i=1}^{m} c_ib_i \tag{1-14}$$

对应于基 I_m 的基本可行解为 $X=(b_1,\ \cdots,\ b_m,\ 0,\ \cdots,\ 0)^T$，这时 $z=\sum\limits_{i=1}^{m} c_ib_i \triangleq z_0$ 。

单纯形法运算有以下原则和判别法则。

(1)最优解的判别

若所有检验数均非正数，$\sigma_j\leqslant 0$，则基本可行解 X 是最优解。这在前面已讨论过了。

(2)换入变量的确定(最大增加原则)

选取最大的正检验数所对应的非基变量为换入变量。即若

$$\max_j\{\sigma_j \mid \sigma_j > 0\} = \sigma_k \tag{1-15}$$