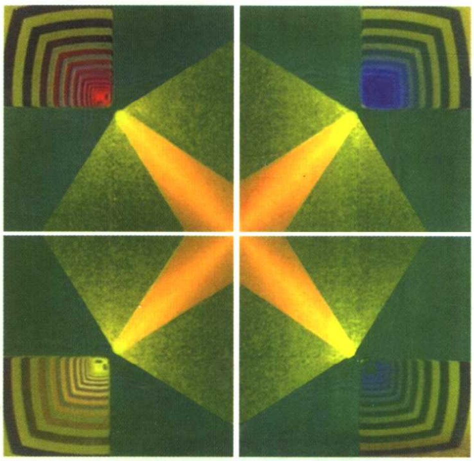
中国科学院规划教材
数学系列

南开大学数学教学丛书

实变函数

第二版

周性伟 编著



科学出版社
www.sciencep.com

中国科学院规划教材
南开大学数学教学丛书

实 变 函 数

（第二版）

周性伟 编著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书是作者在多年教学经验的基础上撰写的一部实变函数教材，第二版在第一版使用 6 年的基础上作了修订．本书内容包括：集合与实数集、Lebesgue 测度、可测函数、Lebesgue 积分、微分和积分、L^p 空间等．每章后均附习题与例题，以便于读者学习和掌握实变函数论的基础知识．

本书可供高等院校数学系学生、研究生阅读，也可供其他有关学科教师和科研人员参考．

图书在版编目（CIP）数据

实变函数／周性伟编著．-2 版．—北京：科学出版社，2004

（中国科学院规划教材·南开大学数学教学丛书）

ISBN 7-03-013005-7

Ⅰ．实… Ⅱ．周… Ⅲ．实变函数－高等学校－教材
Ⅳ．O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 015159 号

责任编辑：林鹏　李鹏奇／责任校对：陈丽珠
责任印制：安春生／封面设计：黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

1998 年 9 月第 一 版　开本：B5(720×1000)
2004 年 7 月第 二 版　印张：9 1/2
2005 年 1 月第七次印刷　字数：170 000
印数：16 801—20 300

定价：16.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉）

丛书第二版序

《南开大学数学教学丛书》自 1998 年面世以来，已经印刷了好几次，并均已售完，同时还有读者希望买到这些书. 这期间正如我们的初衷一样，得到了许多老师、同学、同行的帮助. 现在，我们的教学与当初也不尽相同，为了继续得到大家的帮助，与大家继续交流，对这些书做一些修改是很有必要的. 因此科学出版社提出再版这套丛书是很适时的，是对我们的巨大支持，我们借此机会表示感谢.

2002 年，第 24 届国际数学家大会于 8 月 20 日至 28 日在中国北京举行并取得圆满成功. 这是中国第一次主办国际数学家大会. 也是发展中国家第一次主办这一大会. 在大会期间，陈省身先生曾说，中国已经成为“数学大国”.

陈省身先生还说：“21 世纪数学的发展是很难预测的，它一定会超越 20 世纪，开辟出一片崭新的天地，希望中国未来的数学家能够成为开辟这片新天地的先锋.”

在数学已成为高科技的基础和现代文明标志之一的今天，我们不能满足于“中国数学的平等和独立”，即数学大国的地位，而是要成为开辟数学新天地的先锋，即要争取“数学强国”的地位.

我们清楚地知道“数学大国”并不等于“数学强国”. 为使今天的“数学大国”成为明天、后天以至永远的“数学强国”，当然要从多方面努力，数学教育是不可或缺的重要方面. 我们既需要高质量的、稳定的数学教育，又需要不断推陈出新、不断发展的数学教育. 这是一个艰巨的任务. 这个任务历史地落在一代又一代的年轻人的肩上.

在中国的数学教育上，也就是在争取成为“数学强国”的过程中，我们如果能够“润物”，虽然“无声”也将心满意足. 因此我们既高兴看到《南开大学数学教学丛书》今天能够生存和发展，又更高兴地期待明天它被更新、更好的教材取而代之.

我们也相信经过大家不懈的努力，中国未来的数学家一定会是开辟数学新天地的先锋.

全体编著者

2004 年 3 月于南开大学

丛书第一版序

海内外炎黄子孙都盼望中国早日成为数学大国，也就是“实现中国数学的平等和独立”[①]. 平等和独立是由中国出类拔萃的数学家及其杰出的研究工作来体现的，要有出类拔萃的数学家就要培养一批优秀的研究生、大学生. 这批人不在多，而在精，要层次高. 也就是要求他们热爱数学、基础扎实、知识面广、能力强.

20 世纪 80 年代中期，国家采纳了陈省身先生的几个建议. 建议之一是为培养高质量的数学专业的大学生，需要建立数学专业的试点班. 经过胡国定先生等的努力，1986 年在南开建立了数学专业的试点班. 这些作法取得了成功，并在基础学科的教学中有了推广. 1990 年在全国建立“国家理科基础学科研究和教学人才培养基地”. 南开数学专业成为基地之一. 从 1986 年到现在的 10 余年中南开数学专业是有成绩的，例如他们 4 次参加全国大学生数学竞赛获 3 次团体第一，一次团体第三. 在全国和国际大学生数学建模比赛中均获一等奖. 毕业生中的百分之八十继续攻读研究生，其中许多人取得了很好的成绩.

当然，取得这些成绩是与陈省身先生的指导、帮助分不开的，是与国内外同行们的支持与帮助分不开的. 如杨忠道、王叔平、许以超、虞言林、李克正等先生或参与教学计划、课程设置、课程内容的制订，或到南开任教等等. 有了这些指导、帮助与支持，南开基础数学专业得以广泛吸收国内外先进的数学教学经验，并以此为基础对数学教学进行了许多改革、创新.

这套丛书是南开大学的部分教材，编著者长期在南开数学专业任教，不断地把自己的心得体会融合到基础知识和基本理论的讲述中去，日积月累地形成了这套教材. 所以可以说这些教材不是“编”出来的，而是在长期教学中“教”出来的，“改”出来的，凝聚了我们的一点心血. 这些教材的共同点，也是我们教学所遵循的共同点是：首先要加强基础知识、基础理论和基本方法的教学；同时又要适当地开拓知识面，尤其注意反映学科前沿的成就、观点和方法；教学的目的是提高学生的能力，因此配置的习题中多数是为了巩固知识和训练基本方法，也有一些习题是为训练学生解题技巧与钻研数学的能力.

我们要感谢科学出版社主动提出将这套教材出版. 这对编著者是件大好事. 编著者虽然尽了很大努力，一则由于编著者的水平所限，二则数学的教育和所有学科的教育一样是在不断发展之中，因此这套教材中的缺欠和不足肯定存在. 我们恳

① 陈省身：在“二十一世纪中国数学展望”学术讨论会开幕式上的讲话.

请各位同行不吝指正，从而使编著者更明确了解教材及教学中的短长，进而扬长避短，改进我们的教学. 同时通过这套教材也可向同行们介绍南开的经验教训以供他们参考，或许有益于他们的工作.

我们再次感谢帮助过南开的前辈、同行们，同时也希望能继续得到他们的帮助. 办好南开的数学专业，办好所有学校的数学专业，把中国数学搞上去. 使中国成为数学大国是我们的共同愿望！这个愿望一定能实现！

全体编著者

1998 年 6 月于南开大学

第二版前言

这本实变函数书是南开大学数学基地班众多教材中的一本，是为该班第四学期实变函数课编写的. 1998 年 9 月作为丛书之一，由科学出版社出版了第一版. 到 2003 年 6 月总共印刷了 5 次，总计 13800 册，其中仅在第二次印刷时对个别字符作了修改. 应该说这确实是一本“教材”，因为该书百分之九十以上的内容就是该门课实际讲授的内容.

实变函数是数学分析的继续、深化和推广，是一门培养学生数学素质的重要课程. 事实上实变函数中那些表面上看似抽象、陌生的概念和结论，都与学生的已有知识有着密切的关系. 如果能够把学生已有的那些直观的、浅层的、特殊的知识提出来，然后和学生一起讨论，如何把那些浅层的知识深化，把那些特殊的知识一般化，那么学生不仅能把实变函数中那些新的概念和结论掌握的更好，而且可以窥见科学研究的一般方法：从特殊到一般，从具体到抽象，由表及里地从已知探寻出新的现象及其规律.

自本书第一版出版以来，作者收到众多读者，特别是兄弟院校教师的来信，对该书提出了不少评论和建议，也提出了不少问题. 下面仅就本书前 4 章中的主要概念谈谈作者的一些想法和实际教学中的一些做法.

第 1 章中“基数”是一个崭新的概念. 学生都知道有两种方法比较两个有限集中元素的多少. 一种方法是把每一有限集中的元素计算出来，然后再比较. 而另一种方法是按某种法则把这两个有限集的元素对应起来再比较. 后一种方法的一个典型例子是比较一个教室中的学生和椅子哪一个多. 对此问题，相信所有学生都会按第二种方法来回答，即鉴于学生和椅子是一一对应的，所以如果没有空椅子，说明两者一样多；有空椅子，说明椅子多！正是这种对应的方法，可以用来推广比较两个无限集中元素的多少. 此时可以完全不管学生如何理解“一个无限集中有多少元素”这个概念，而是可以直接问“直角边和斜边中的点哪个多”、“不同半径圆周上的点哪个多”、“长为 1 的线段和长为 2 的线段中的点哪个多”等等问题. 相信此时大多数学生稍加思索，都会仿照上述对应方法给出一种答案：一样多！但同时他们又会有所疑惑：区间 $[0,2]$ 中的点明显地比区间 $[0,1]$ 中的点多，怎么它们又一样“多”呢？学习的兴趣由此产生！如果再问“正方形一条边上的点与正方形内部的点哪个多？”所有学生大概都会茫然. 从而促使他们去思考，去研究. 在这种蒙蒙然、似是而非的背景下，教师可以和学生一起讨论如何合理地定义两个集合中

的元素一样多（即有相同的基数）．此时相信绝大部分学生会对“基数”有深刻的印象.

第 2 章的主题是 Lebesgue 测度．首先要强调测度是通常区间的长度、长方形面积、长方体体积等的推广．这种推广有两个不可分割的方面：一方面是期望对更大一类集族中的每一个集赋予一个“测度”；另一方面，这个赋予了测度以后的集族应满足一些法则，而这些法则同样是我们通常已认可的一些法则的推广．例如平面上一个由有限个两两不相交有面积的图形构成的集合，它也应该有面积，而且其面积就是所有单个面积的和，这通常称为“有限可加性”．这个已经认可的法则的推广无非是把“有限”变成“可数”，于是就要求测度有“可数可加性”．此外在一维情形，由于实线上的开集是至多可数个两两不相交的开区间（即构成区间）的并，所以用这些开区间的长度之和来定义该开集的测度是极其自然的．这样，假若学生对下确界有较好的掌握，那么外测度的定义也会是一件比较自然而且容易理解的事.

可测集与开集和闭集“差不多”，是本章中需要强调的另一点，也是实变函数中第一个“差不多”．如果学生对外测度的定义有较好的了解，那么对这个“差不多”的精确含义就容易理解（定理 2.5.1 ）．“差不多”这种形象的说法不仅对学生的记忆有帮助，而且通过在本章及后面章节中的多次运用，学生会对下列方法有深刻印象：一个涉及可测集的命题，经常可以先假设这个可测集是开集或闭集，看看这个命题是否成立．然后通过这个“差不多”，再研究该命题对一般可测集是否成立.

第 3 章的主题是 Lebesgue 可测函数．这里的定义是遵照传统的方法．但介绍完定义后，应特别介绍简单函数和连续函数这两类可测函数．因为一方面它们容易理解（如简单函数）或者早已熟悉（如连续函数），另一方面任何一个可测函数正恰是一列简单函数逐点收敛的极限（定理 3.2.1 ），同时也是一列连续函数几乎处处收敛的极限（定理 3.3.3 及该章习题 16 ）．这样就产生了实变函数中的第二个“差不多”，即可测函数与简单函数和连续函数是“差不多”的．与第一个“差不多”类似，通过本章及后面章节中对第二个“差不多”的多次应用，学生会对下列方法有深刻的印象：一个涉及可测函数的命题，经常可以先假设这个可测函数是简单函数或连续函数，看看命题是否成立．然后根据这第二个“差不多”，再研究该命题对一般可测函数是否成立.

第 4 章的主题是 Lebesgue (L) 积分．学生已经熟悉 Riemann (R) 积分．因此在讲授这一章的过程中，非常重要的一点是要使学生明了：两种积分是对同一事物的两种不同的处理方式！鉴于简单函数的 L 积分是整个 L 积分定义的基础，所以

容易列举一些日常生活中的例子来说明两种积分的差别．例如：有人背着一麻袋硬币到银行去兑换成纸币．假设有 10000 枚硬币，每一硬币的面值为 $\lambda_1 = 1$ 元，$\lambda_2 = 0.5$ 元，$\lambda_3 = 0.1$ 元，$\lambda_4 = 0.05$ 元，$\lambda_5 = 0.02$ 元及 $\lambda_6 = 0.01$ 元这 6 种币值中的某一个．银行工作人员需要计算它们的总币值．这里有两种方法．一种方法是把一个个硬币的币值逐个相加；另一种方法是把所有这些硬币按币值分成 6 类，用乘法计算每一类的总币值，然后相加．

解决上述例子中问题的方法一般中学生就知道．而讲授这一章，就是要使学生明了，这第一种方法就是 R 积分，第二种方法就是 L 积分．事实上若在区间 $[0, 10000]$ 上定义函数 $f(x)$ 如下：对每一整数 n，$1 \leq n \leq 10000$，$f(x)$ 在区间 $[n-1, n)$ 上是常数，该常数是上述 6 种币值中的某一个．此时求总币值就是求这个简单函数 $f(x)$ 的积分，几何上就是求 10000 个长方形的面积之和．此时上述第一种方法对应的是 R 积分中的和 $\sum_{n=1}^{10000} f(n)[(n+1)-n] = \sum_{n=1}^{10000} f(n)$，而第二种方法就是 L 积分中的和 $\sum_{i=1}^{6} \lambda_i m\{f = \lambda_i\}$，其中 $m\{f = \lambda_i\}$ 是区间 $[0, 10000]$ 中使 $f(x) = \lambda_i$ 的 x 全体的测度，其值就是币值为 λ_i 的硬币的个数．

上述问题虽然非常特殊，只需求和，不需要求极限，但由求解这个特殊问题的两种不同方法一般化后引导出的两种积分，其差别正是在求和的方法上．通常总认为 R 积分有很强的几何意义，直观，好理解．而实际上 L 积分同样直观，甚至在某些场合更便于应用．难道银行工作人员不是用 L 积分来计算总币值的吗？

上面这些想法和做法只能说是作者教学中的一些体会，不尽正确．

读者看到，与同类书相比，本书较为简明．但在实际讲授中如何再适当补充，使学生不仅看到实变函数这门课的骨架，而且看到这是一个有丰富内容，充满哲理的知识体，是一个既有趣，也值得为之付出的课题．作者希望这本教材和它众多不附解答的习题能给广大读者一个再创造的空间．作者也衷心希望与兄弟院校广大教师一起探讨，共同为不断提高实变函数课的教学效果而努力！

最后作者衷心感谢科学出版社的编辑在本书两版出版过程中认真细致的工作，衷心感谢孙文昌教授打印了本书第一版，衷心感谢杨旭博士在第一版的基础上打印了本书第二版．没有他们的辛勤劳动，本书的出版是不可能的．

周性伟

2003 年 7 月

目　录

第 1 章　集合与实数集

本章可以看成是一个预备篇，介绍集合论中一些最基本的概念和性质.

1.1　集合及其运算

设 X 是一个集合，　若 x 是 X 中一个元，则我们记

$$x \in X,$$

并称 x **属于**X 或 X **包含**x; 若 x 不是 X 中的元，则记

$$x \notin X.$$

不包含任何元素的集合称为**空集**, 记为 $\varnothing$.

以后， $\mathbf{R}$ 表示实数全体.

若一个集合只含一个元素 x, 则该集称为 **单元素集**, 并记为 $\{x\}$. 类似地, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 表示含元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的集. 为简单计，这样的集也可写成 $\{x_k\}_{1 \le k \le n}$.

若对集 X 中每一元素 x, 有一个命题 $P(x)$ 与之对应，则记号 $\{x \in X : P(x)\}$ 表示 X 中使命题 $P(x)$ 成立的一切元素 x 所构成的集.

例如对每一 $x \in \mathbf{R}$, 令 $P(x)$ 表示命题 "$0 < x < 1$", 则 $\{x \in \mathbf{R} : P(x)\}$ 就是开区间 $(0, 1)$.

设 A 和 B 是两个集. 若 A 中所有元素同时也是 B 的元素，则我们称 A 是 B 的**子集**, 记为

$$A \subset B.$$

若 $A \subset B$ 同时 $B \subset A$, 则我们称 A 和 B **相等**, 记为

$$A = B.$$

我们规定，空集 $\varnothing$是任一集合的子集.

下面的定理是显而易见的，其证明留作习题.

定理 1.1.1 (i) 对任何集合 A 有 $A \subset A$;

(ii) 若对集合 A, B 和 C 有 $A \subset B, B \subset C$, 则 $A \subset C$.

设 X 是一个集合， A 和 B 都是 X 的子集. 我们来定义下面几种运算.

并: 由 A 中所有元与 B 中所有元汇合在一起构成的集称为 A 和 B 的并，记成 $A \bigcup B$, 即

$$A \bigcup B = \{x : x \in A\text{或}x \in B\}.$$

交: 既属于 A 又属于 B 的所有元构成的集称为 A 和 B 的交，记成 $A \bigcap B$, 即

$$A \bigcap B = \{x : x \in A\text{且}x \in B.\}.$$

差: 属于 A 但不属于 B 的所有元构成的集称为 A 和 B 的差，记成 $A - B$, 即

$$A - B = \{x : x \in A\text{但}x \notin B.\}.$$

补: 特别， $X - A$ 称为 A 关于 X 的补集，记成 A^c, 即

$$A^c = X - A.$$

定理 1.1.2 设 A, B 和 C 都是 X 的子集，则:

(i) $A \bigcup B = B \bigcup A, A \bigcap B = B \bigcap A$;

(ii) $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C), (A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$;

(iii) $(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C)$,

$(A \bigcap B) \bigcup C = (A \bigcup C) \bigcap (B \bigcup C)$;

(iv) $(A \bigcup B)^c = A^c \bigcap B^c, (A \bigcap B)^c = A^c \bigcup B^c$.

上述定理中的 (iv) 称为 De Morgan 公式.

证明 我们只证 (iv). 若 $x \in (A \bigcup B)^c$, 则 $x \notin A \bigcup B$, 从而 $x \notin A$ 且 $x \notin B$, 因此 $x \in A^c$ 且 $x \in B^c$. 从而 $x \in A^c \bigcap B^c$. 这样 $(A \bigcup B)^c \subset A^c \bigcap B^c$. 反之，若 $x \in A^c \bigcap B^c$, 则 $x \in A^c$ 且 $x \in B^c$, 从而 $x \notin A$ 且 $x \notin B$. 这样， $x \notin A \bigcup B$. 于是, $x \in (A \bigcup B)^c$, 从而 $A^c \bigcap B^c \subset (A \bigcup B)^c$, 因此 $(A \bigcup B)^c = A^c \bigcap B^c$. (iv) 中第二个等式可类似来证. 定理证毕.

并和交的运算可以推广到更多个集合的情形. 设集合 $\mathcal{X}$ 的每个元都是集 X 的子集，此时也称 $\mathcal{X}$ 是 X 上的一个**集族**. 例如 $\mathbf{R}$ 中所有开区间就是 $\mathbf{R}$ 上的一个集族.

今若 $\mathcal{X}$ 是 X 上的一个集族，则我们把集

$$\{x : \text{存在}A \in \mathcal{X}\text{使}x \in A\}$$

称为**集族 $\mathcal{X}$ 的并**, 并记成 $\bigcup\{A: A\in\mathcal{X}\}$. 此外把集

$$\{x: \text{对每一}A\in\mathcal{X}\text{有}x\in A\}$$

称为**集族 $\mathcal{X}$ 的交**, 并记成 $\bigcap\{A: A\in\mathcal{X}\}$.

通常若对集 Λ 中每一元 λ 有集 X 的一个子集 A_λ 与之对应, 则我们就得到 X 上的一个集族 $\mathcal{X}=\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$, 此时该集族的并和交分别记为

$$\bigcup\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}\ \text{及}\ \bigcap\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\},$$

也可以写成 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 及 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$.

集族的并和交有和定理 1.1.2 中类似的结论. 例如我们有 (其证明留作习题)

定理 1.1.3 (De Morgan 公式) 设 $\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是集 X 上的一个集族, 则

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^c=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c,\quad \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^c=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c.$$

特别地, 若 $\Lambda=\{1,2,\cdots,n\}$, 则集族 $\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 记成 $\{A_k\}_{1\le k\le n}$, 其并和交分别记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 和 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$; 又若 Λ 为正整数全体, 则集族 $\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 记成 $\{A_n\}_{n\ge1}$, 它称为一个**集合序列**, 其并和交分别记为 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 和 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

若 A 和 B 是两个集, 则定义

$$A\triangle B=(A-B)\bigcup(B-A),$$

它称为 A 和 B 的**对称差**. 容易证明下面定理 (留作习题).

定理 1.1.4 (i) $A\triangle B=(A\bigcup B)-(A\bigcap B)$;

(ii) $A\triangle B=B\triangle A$.

下面再介绍集合直积的概念.

设 X_1 和 X_2 是两个集. 任取 $x_1\in X_1$ 和 $x_2\in X_2$, 我们就得到一个序对 (x_1,x_2). 所有这样的序对全体构成的集称为 X_1 和 X_2 的**直积**, 记为 $X_1\times X_2$, 即

$$X_1\times X_2=\{(x_1,x_2): x_1\in X_1, x_2\in X_2\}.$$

$X_1\times X_2$ 中的两个元 (x_1,x_2) 和 (y_1,y_2) 称为相等的, 若 $x_1=y_1, x_2=y_2$.

类似地, 若 $\{X_k\}_{1\le k\le n}$ 是 n 个集, 则它们的直积, 记为 $\prod\limits_{k=1}^{n}X_k$, 定义为

$$\prod_{k=1}^{n}X_k=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n): x_k\in X_k, 1\le k\le n\},$$

即 $\prod_{k=1}^{n} X_k$ 中的元是一个 "n 维向量"$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 它的第 k 个 "分量"$x_k \in X_k$, $1 \leq k \leq n$.

最后集合序列 $\{X_k\}_{k\geq 1}$ 的直积 $\prod_{k=1}^{\infty} X_k$ 定义为

$$\prod_{k=1}^{\infty} X_k = \{(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots) : x_k \in X_k, k \geq 1\},$$

即 $\prod_{k=1}^{\infty} X_k$ 中的元是一个序列 $(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots)$, 其中 $x_k \in X_k, k \geq 1$.

我们知道 $\mathbf{R}$ 表示实数全体, 即实线. 此时 $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 理解为平面; $\mathbf{R}^3$, 即三个 $\mathbf{R}$ 的直积理解为空间. 一般 n 个 $\mathbf{R}$ 的直积记为 $\mathbf{R}^n$.$\mathbf{R}^n$ 中的元的一般形状是 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 其中每一 $x_k, 1 \leq k \leq n$, 都是实数, 它们统称为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的分量. $\mathbf{R}^n$ 中分量全为 0 的元就记为 0, 称为原点.

设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中两个元, λ 是一个实数. 则 x 和 y 的加法定义为

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n),$$

x 和 λ 的数乘定义为

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n).$$

此外 x 和 y 的 Euclid 距离 (欧氏距离) 定义为

$$d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

容易证明上述距离具有如下性质:

(i) $d(x, y) \geq 0$ 并且为使 $d(x, y) = 0$, 充分必要条件是 $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$　(对称性);

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$　(三角不等式).

有了加法、数乘及欧氏距离后的 $\mathbf{R}^n$ 称为 $\boldsymbol{n}$ **维欧氏空间**.

1.2　集合序列的极限

设 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ 是一个集合序列.

若 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$, 则称该序列**单增**;

若 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$, 则称该序列**单减**.

现在任给一个集合序列 $\{A_n\}_{n\geq 1}$, 则我们可以构造两个新的集合序列 $\{B_n\}_{n\geq 1}$ 和 $\{C_n\}_{n\geq 1}$, 其中

$$B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

它们分别对应集合序列 $\{A_k\}_{k\geq n}$ 的并和交. 显然 $\{B_n\}$ 单减, $\{C_n\}$ 单增. 此时我们把 $\{B_n\}$ 的交称为 $\{A_n\}$ 的**上极限**, 记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$, 即

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k;$$

把 $\{C_n\}$ 的并称为 $\{A_n\}$ 的**下极限**, 记为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$, 即

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

若 $\{A_n\}$ 的上极限和下极限相等, 则称 $\{A_n\}$ **有极限**, 并把其上极限 (也即下极限) 称为 $\{A_n\}$ 的极限, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

例 1.2.1 令 $A_n = \{\frac{m}{n} : m \text{ 是整数 }\}, n \geq 1$. 求证:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \mathbf{Q}(\text{有理数全体}), \ \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \mathbf{Z}(\text{整数全体}).$$

证明 事实上对每一 $n \geq 1$ 有 $\mathbf{Z} \subset A_n \subset \mathbf{Q}$. 从而易知

$$\mathbf{Z} \subset \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset \mathbf{Q}.$$

现对任何 $x \in \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, 必有某 n 使 $x \in A_n \bigcap A_{n+1}$, 因此有整数 m_n 和 m_{n+1} 使 $x = \frac{m_n}{n} = \frac{m_{n+1}}{n+1}$. 由此得 $x = m_{n+1} - m_n$ 是整数. 这样 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \subset \mathbf{Z}$. 从而 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \mathbf{Z}$.

其次对每一 $\frac{q}{p} \in \mathbf{Q}$(其中 p 为正整数), 对任何 $n \geq 1$ 有 $\frac{q}{p} = \frac{nq}{np} \in \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, 因此 $\frac{q}{p} \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$. 这样 $\mathbf{Q} \subset \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$. 从而 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \mathbf{Q}$.

定理 1.2.1 设 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ 是一个集合序列.

(i) 为使 $x \in \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$, 充分必要条件是对任何 N, 存在 $n \geq N$ 使 $x \in A_n$, 即 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ 中有无穷项包含 x;

(ii) 为使 $x \in \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$, 充分必要条件是存在 N_x, 使对一切 $n \geq N_x$ 有 $x \in A_n$, 即 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ 中不含 x 的项只有有限项;

(iii) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \subset \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$;

(iv) 当 A_n 单增或单减时，$\{A_n\}$ 有极限. 此时

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \begin{cases} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n, & 若\{A_n\}单增, \\ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n, & 若\{A_n\}单减. \end{cases}$$

证明　(i) 设 $x \in \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, 则对任何 N 有 $x \in \bigcup\limits_{k=N}^{\infty} A_k$, 从而有某 $n \geq N$ 使 $x \in A_n$. 反之，若 (i) 中的条件成立，则对任何 $n \geq 1$ 有 $x \in \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, 从而我们有 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$.

(ii) 的证明与 (i) 类似，只需注意 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$.

(iii) 是 (i) 和 (ii) 的直接推论.

(iv) 先设 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ 单增. 此时易知对任何 $n \geq 1$ 有 $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, 并且 $\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$, 从而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

这样 $\{A_n\}$ 的上极限和下极限相等，而且就是 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

其次, 若 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ 单减, 则对任何 $n \geq 1$ 有 $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$, 并且 $\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. 从而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

这样 $\{A_n\}$ 的上极限和下极限也相等，而且就是 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. 定理证毕.

1.3 映　　射

设 X 和 Y 是两个集合. 若按某种对应关系或法则，使得对每一 $x \in X, Y$ 中有惟一的一个元 y 与之对应，则我们说给出了从 X 到 Y 的一个**映射**. 若用 f 表示此映射，则 f, X 和 Y 之间的关系可用

$$f : X \to Y$$

表示；此外上述 x 和 y 之间的关系表示为

$$y = f(x).$$