

核反应堆物理数值计算

谢仲生 等 编著

61143

原子能出版社

封面设计：崔彤

ISBN 7-5022-1629-4



9 787502 216290 >

ISBN 7-5022-1629-4/TL375.1 定价：27.00元

核反应堆物理数值计算

谢仲生
张育曼
张建民
吴宏春

编著

罗经宇

审校

原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

核反应堆物理数值计算/谢仲生等编. —北京:原子能出版社,1997. 10
ISBN 7-5022-1629-4

I. 核… II. 谢… III. 反应堆-物理常数-数值计算 IV. TL375.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 19407 号

内 容 简 介

本书以中子输运理论为基础,系统深入地介绍核反应堆物理设计中常用的数值方法。内容包括:中子输运方程、多群扩散方程的数值解法及加速收敛的方法、离散坐标方法、积分输运(碰撞概率)方法、节块(粗网格式)方法、反应堆动力学方程的数值解法和蒙特卡罗方法等。

本书可供核反应堆工程专业的研究和工程技术人员参考,也可作为高等学校核反应堆工程专业选修课和硕士及博士研究生课程的教材。

©原子能出版社,1996

原子能出版社出版发行

责任编辑:侯凤旺

社址:北京市海淀区阜成路 43 号 邮政编码:100037

原子能出版社印刷厂印刷 新华书店经销

开本:787×1092mm 1/16 印张 12.625 字数 315 千字

1997 年 10 月北京第一版 1997 年 10 月北京第一次印刷

印数:1—800

定价:27.00 元

前 言

核反应堆物理设计(或核设计)是核反应堆工程设计的核心。近年来,科学技术,特别是电子计算机和计算方法的蓬勃发展,对核反应堆物理计算方法带来了巨大的影响与变化。传统的数学计算方法已难于解决核设计、燃料管理以及安全分析方面的复杂问题。从本世纪70年代初以来,反应堆物理数值方法逐步发展成为核设计的主要手段。近20年来发展了许多有效和高精度的数值方法并已在工程核设计中获得广泛的应用,反应堆物理设计在方法精度和计算速度上都达到相当完善的程度。因而从事反应堆物理设计、燃料管理或安全分析的专业人员迫切需要一本系统反映反应堆物理设计方面新发展的一些工程中实用的数值方法的参考书。本书除可供研究和工程技术人员参考外,也可作为有关专业研究生课程的教材。

阅读本书的读者应具备反应堆物理分析、数理方程和数值方法等方面的知识。本书对有关反应堆物理方面的基本原理与方法一般不作阐述,而着重于介绍物理设计中各种数值方法与技巧;对各种数值方法,则着重于阐述它的基本原理、算法思想及其共性的分析方法,尽量避免艰深的数学理论与繁杂的公式推导过程;力求深入浅出,避繁就简,做到概念清晰,结合实际,使读者便于掌握方法的实质与应用。

在内容安排上,按照各种数值方法独立成章。这样,读者可以自由选择所需内容。本书第一章介绍中子输运基本方程,第二章至第五章逐章分别介绍离散坐标方法、积分输运理论(碰撞概率)方法、中子扩散方程的有限差分方法和节块(粗网格)方法,第六、七章两章则分别对中子动力学方程数值解法及蒙特卡罗方法作简要概论性的介绍。

本书中第一、二、三、四、六章由谢仲生编写;第五章由清华大学张育曼编写;第七章由西安交通大学张建民编写,谢仲生修改。第二章第4节中(5)以及第6节由西安交通大学吴宏春编写,最后由西安交通大学谢仲生定稿。本书于1990年完稿,由于种种原因未能及早出版。

本书由清华大学罗经宇审校。在本书的编著过程中曾得到中国核动力研究设计院和上海核工程研究设计院等单位的支持和帮助。章宗耀、徐及明、程平东、单文志、陈仁济、童舜坤和杨修周等教授和专家们参加了本书初稿的讨论,并提出许多有益的意见,苗强参加了第六章初稿的编写与讨论。在此编者表示衷心感谢。

鉴于本书涉及内容广泛,各种数值方法都在不断发展,同时限于编者的知识及实际经验,谬误及不妥之处在所难免,望学者、专家和读者们批评指正。

编者

1994年10月于西安交通大学

目 录

第一章 中子输运方程	(1)
1. 坐标系统与基本定义	(1)
1.1 坐标系统	(2)
1.2 中子密度、中子通量密度和中子流密度	(3)
2. 中子输运方程	(5)
2.1 中子输运方程的建立	(5)
2.2 不同坐标系中散度算子 $\Omega \cdot \nabla \Phi$ 的表达式	(7)
2.3 边界条件	(10)
3. 中子输运方程的积分形式	(12)
4. 特征值(临界)问题和源迭代法	(14)
5. 中子输运方程近似解法概述	(15)
6. 分群扩散方程	(19)
7. 共轭中子输运方程	(24)
7.1 共轭算子	(24)
7.2 共轭中子输运方程	(25)
7.3 中子价值	(26)
参考文献	(28)
第二章 多群扩散方程的数值解法	(29)
1. 源迭代法	(29)
2. 一维扩散方程的数值解法	(31)
2.1 差分方程组的推导	(32)
2.2 差分方程组的解法	(34)
3. 多维扩散方程的差分方法	(35)
3.1 二维差分方程组	(35)
3.2 差分方程组的矩阵形式	(38)
3.3 三维问题的数值解法	(38)
4. 差分方程的迭代解法	(40)
5. 幂迭代的加速收敛方法	(44)
5.1 粗网格再平衡方法	(44)
5.2 契比雪夫多项式外推方法	(47)
6. 多群中子扩散方程的有限元解法	(51)
6.1 中子扩散方程的变分方程	(51)
6.2 几何剖分和基函数的选取	(54)
6.3 有限元方程组的建立与求解	(56)
参考文献	(57)
第三章 离散坐标方法	(58)

1. 中子输运方程的守恒形式	(59)
2. 角度变量的离散	(61)
3. 离散求积组的选取	(64)
3.1 一维平面及球几何情况	(65)
3.2 一维圆柱几何及二维以上问题	(68)
4. 空间变量的离散	(73)
4.1 空间变量的离散	(73)
4.2 菱形差分近似	(76)
4.3 差分方程的解	(77)
5. 加速收敛方法	(78)
5.1 粗网格再平衡方法	(78)
5.2 扩散综合加速收敛 (DSA) 方法	(81)
5.3 契比雪夫加速收敛方法	(84)
6. 数值计算中的一些问题	(84)
6.1 负通量密度及其修正	(84)
6.2 射线效应	(85)
7. 离散坐标方法应用程序	(86)
参考文献	(87)
第四章 积分输运方法	(88)
1. 积分输运方法的基本原理	(88)
1.1 基本方程	(88)
1.2 输运近似	(91)
2. 中子飞行首次碰撞概率的计算	(93)
2.1 二维多柱系统的中子首次碰撞概率	(93)
2.2 同心圆柱系统的中子首次碰撞概率	(97)
2.3 互易关系式	(98)
3. 一维圆柱栅元中子空间-能量分布的计算	(100)
3.1 基本方程	(100)
3.2 等效栅元的边界条件	(101)
3.3 中子首次碰撞概率的计算	(102)
3.4 方程的求解	(103)
4. 面流法——燃料组件内中子通量密度分布的计算	(104)
4.1 基本方程	(104)
4.2 首次泄漏和穿透概率的计算	(106)
5. 组合法	(110)
参考文献	(111)
附录 Bickley 函数	(112)
第五章 节块 (粗网格) 方法	(114)
1. 引言	(114)
2. FLARE 物理模型	(115)
3. 节块展开法 (NEM)	(118)

3. 1	横向积分及横向泄漏	(119)
3. 2	中子流空间耦合方程、积分中子平衡方程及其解法	(120)
3. 3	横向泄漏的处理	(126)
4.	格林函数节块法	(128)
4. 1	格林函数节块法	(128)
4. 2	格林函数节块法的改进	(132)
5.	解析节块 (AM) 法	(134)
5. 1	一维中子扩散方程	(134)
5. 2	系数矩阵的推导	(136)
5. 3	解析节块法求解多维中子扩散方程	(138)
6.	节块内精细中子通量密度分布的计算	(141)
	参考文献	(146)
第六章	反应堆动力学方程的数值解法	(147)
1.	点堆动力学方程的数值解法	(147)
1. 1	模型的刚性	(148)
1. 2	Gear 方法	(150)
2.	刚性限制方法 (SCM)	(153)
2. 1	基本思想	(153)
2. 2	SCM 方法	(154)
3.	时-空多群中子扩散方程的时间离散方法	(155)
3. 1	显式差分方法	(157)
3. 2	隐式差分方法	(158)
3. 3	时间积分方法	(160)
4.	时-空多群中子扩散方程的节块方法	(161)
4. 1	节块平衡方程	(161)
4. 2	横向中子注量的积分方程	(162)
4. 3	空间变量的离散逼近	(164)
4. 4	时间变量的逼近	(164)
	参考文献	(166)
第七章	蒙特卡罗方法	(167)
1.	蒙特卡罗方法的基本原理	(167)
1. 1	蒙特卡罗方法示例	(167)
1. 2	蒙特卡罗方法解题的一般过程	(169)
2.	蒙特卡罗方法的收敛性和误差估计	(171)
3.	随机数与伪随机数	(173)
3. 1	随机数与伪随机数	(173)
3. 2	伪随机数的产生方法	(174)
3. 3	伪随机数的统计检验	(174)
4.	由已知分布的随机数抽样	(175)
4. 1	随机变数的抽样方法	(175)
4. 2	粒子游动过程中一些常用分布的抽样	(180)

5. 用蒙特卡罗方法求解中子输运问题	(183)
5.1 中子输运方程蒙特卡罗方法求解	(183)
5.2 中子输运问题的直接模拟	(185)
5.3 中子通量密度的计算	(188)
6. 降低方差的技巧	(189)
6.1 加权抽样法	(190)
6.2 赌和分裂技巧	(191)
7. 蒙特卡罗方法应用软件	(191)
7.1 蒙特卡罗方法的特点	(191)
7.2 蒙特卡罗方法计算机软件	(192)
参考文献	(193)

第一章 中子输运方程

反应堆内的物理过程以及它的许多核的和工程方面的特性,都和中子群体在系统内的运动以及系统内中子的空间-能量分布有关。反应堆物理分析就是研究中子群体在反应堆内的运动过程,它的主要课题之一就是研究为求得中子密度分布函数所采用的各种模型和分析方法。为此,首先必须求出描述中子在介质内输运过程中的中子密度分布函数所满足的基本方程式——中子输运方程。

1. 坐标系统与基本定义

在输运理论中,中子被看作一个点粒子^①。这意味着,中子运动状态可以用确定的位置和速度来描述。中子在空间的位置可以通过向径 r 来表示。速度向量通常表示成

$$v = v\Omega$$

其中 $v = |v|$ 是速率,即速度的大小,它与中子动能 E 的关系为 $E = mv^2/2$, 其中 m 为中子的质量。 Ω 是运动方向的单位向量,它的模等于 1,它的方向采用极坐标系统通过极角 θ 及方位角 φ

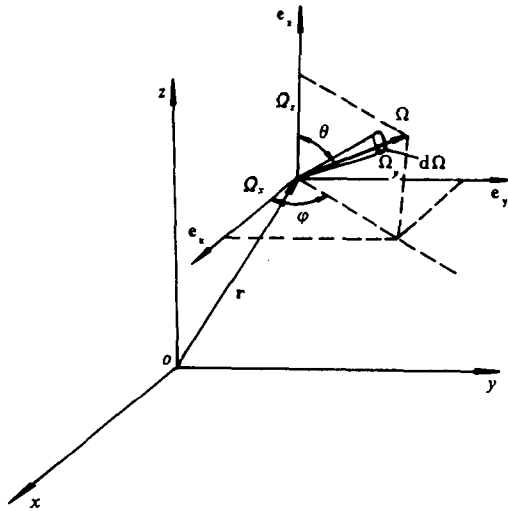


图 1-1 向量 r 和 Ω 的表示

来表示是很方便的(图 1-1)。因而,任一时刻 t ,中子运动的状态由其位置矢量 $r(x, y, z)$, 能量 E 和运动的方向 $\Omega(\theta, \varphi)$ 等六个自变量来描述,对于不同的坐标系统, r 和 Ω 的表示方式是不同的。

① 对于能量非常低的中子,波长变得很长,可以和核间距离相比较,则需用量子力学来阐述。

1. 1 坐标系统

(1) 直角坐标系 (x, y, z)

直角坐标系是最常用的坐标系。图 1-2 表示三维直角坐标系以及 Ω 在直角坐标系中的

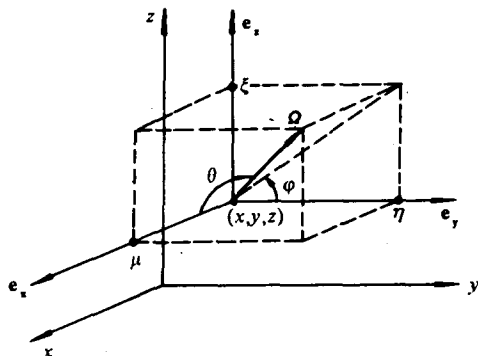


图 1-2 直角坐标系

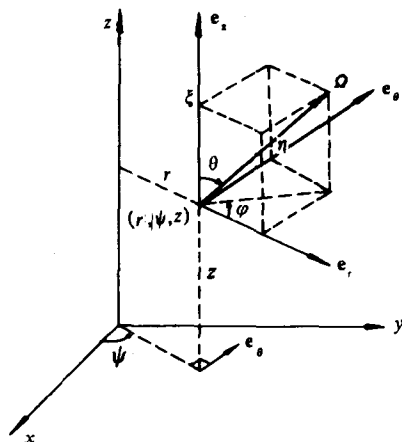


图 1-3 圆柱坐标系

表示。空间点位置由坐标 (x, y, z) 确定, 体积微元 $dV = dx dy dz$, 而

$$\Omega = \Omega_x e_x + \Omega_y e_y + \Omega_z e_z \quad (1-1)$$

其中 e_x, e_y 和 e_z 分别是三个坐标轴方向的单位向量, 而

$$\Omega_x = \Omega \cdot e_x = \cos\theta \equiv \mu \quad (1-2a)$$

$$\Omega_y = \Omega \cdot e_y = \sin\theta \cos\varphi \equiv \sqrt{1 - \mu^2} \cos\varphi = \eta \quad (1-2b)$$

$$\Omega_z = \Omega \cdot e_z = \sin\theta \sin\varphi \equiv \sqrt{1 - \mu^2} \sin\varphi = \xi \quad (1-2c)$$

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi = d\mu d\varphi$$

注意, 这里与图 1-1 不同, 极角 θ 是选取 Ω 与 e_x 的夹角(图 1-2)。

(2) 圆柱坐标 (r, ψ, z)

图 1-3 表示圆柱坐标系以及 Ω 在该坐标系中的表示。空间点的位置坐标由 r, z 和辐角 ψ 表示, 体积微元 $dV = r dr d\psi dz$, 而

$$\Omega = \Omega_r e_r + \Omega_\psi e_\psi + \Omega_z e_z \quad (1-3)$$

其中 e_z 为 z 方向的单位向量, e_r 为 r 方向的单位向量, 而 e_ψ 为垂直于 (e_z, e_r) 平面的单位向量

$$\Omega_r = \Omega \cdot e_r = \sqrt{1 - \xi^2} \cos\varphi \equiv \mu \quad (1-4a)$$

$$\Omega_\psi = \Omega \cdot e_\psi = \sqrt{1 - \xi^2} \sin\varphi \equiv \eta \quad (1-4b)$$

$$\Omega_z = \Omega \cdot e_z = \cos\theta = \xi \quad (1-4c)$$

$$d\Omega = d\xi d\varphi$$

可以看到当空间坐标 r 或 ψ 改变时 e_r 和 e_ψ 的方向亦随之发生改变。

(3) 球坐标系 (r, θ, φ)

图 1-4 表示球坐标系以及 Ω 在该系统中的表示, 空间点坐标由 (r, θ, φ) 表示。中子运动

方向由 Ω 与 r 的夹角 θ' (或其余弦 $\mu = \cos\theta'$) 和角 ω 确定。 ω 是向量 r 和 Ω 形成的平面与向量 r 和 z 形成的平面间夹角。

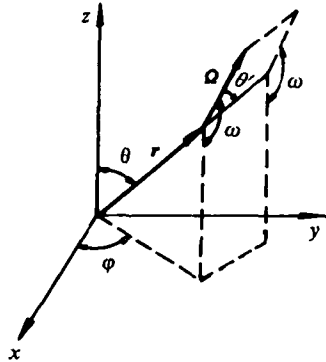


图 1-4 球坐标系

在实际问题中,中子输运方程的求解很少用到三维球坐标系。比较多遇到的是用到一球对称坐标系,由于对称性,这时空间点仅由坐标 r 确定, $dV = 4\pi r^2 dr$ 。运动方向 Ω 则仅由 $\Omega = \mu = \cos\theta'$ 确定而与 ω 无关。

1. 2 中子密度、中子通量密度和中子流密度

中子密度

为完整描述中子群体在介质内的分布情况,必须给出中子群体按空间坐标 r (三个坐标参数)、能量 E 、运动方向 Ω (二个坐标参数) 随时间 t 的分布。为此,我们引进中子密度分布函数——中子角密度 $n(r, E, \Omega, t)$ 。它的定义是:在 t 时刻,在 r 处的单位体积内、能量等于 E 的单位能量间隔内,运动方向为 Ω 的单位立体角内的中子数目。因而,

$$n(r, E, \Omega, t) dr dE d\Omega \equiv [t \text{ 时刻在 } r \text{ 处 } dr \text{ 体积内, 能量在 } E \text{ 与 } E + dE \text{ 之间而运动方向在 } \Omega \text{ 方向上的 } d\Omega \text{ 立体角元内的中子数目}] \quad (1-5)$$

把中子角密度对所有立体角方向积分之,便得到与能量相关的中子角密度 $n(r, E, t)$, 有时叫做中子总密度

$$n(r, E, t) = \int_{4\pi} n(r, E, \Omega, t) d\Omega \quad (1-6)$$

$n(r, E, t) dr dE$ 便是 t 时刻在 r 处 dr 体积内, 能量在 E 与 $E + dE$ 之间的中子总数目 (包括所有运动方向在内)。

中子通量密度

根据中子通量密度的定义,对应于中子角密度可以定义角通量密度 $\Phi(r, E, \Omega, t)$ 为

$$\Phi(r, E, \Omega, t) = v n(r, E, \Omega, t) \quad (1-7)$$

同样地对应于(1-6)式,可以定义与能量相关的中子通量密度 $\Phi(r, E, t)$ 为

$$\Phi(\mathbf{r}, E, t) = v n(\mathbf{r}, E, t) = \int_{4\pi} \Phi(\mathbf{r}, E, \Omega, t) d\Omega \quad (1-8)$$

因而中子通量密度 $\Phi(\mathbf{r}, E, t)$ 可以看作无限多个微分中子束 $\Phi(\mathbf{r}, E, \Omega, t)$ 的强度的总和; 有时我们把与 Ω 无关的 $\Phi(\mathbf{r}, E, t)$ 叫做总通量密度。

中子流密度

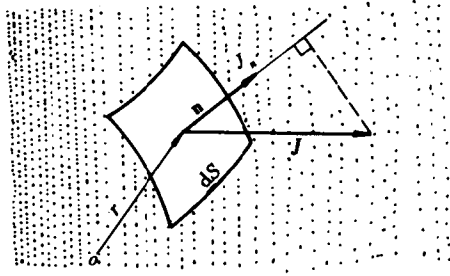


图 1-5 中子流 J

设 \mathbf{n} 表示垂直于 \mathbf{r} 处 dS 表面的单位法线向量(图 1-5)。因而在稳态时, 单位时间内穿过 dS , 运动方向为 Ω 且能量为 E 的中子数目等于 $n(\mathbf{r}, E, \Omega) v |\Omega \cdot \mathbf{n}| dS$ 。我们规定 \mathbf{n} 的正方向一边为“+”侧, 另一边为“-”侧, 同时假定每秒自“-”侧沿各个方向穿过 dS 流向“+”侧的中子总数为 $J_n^+ dS$, 反之为 $J_n^- dS$, 那么有

$$\begin{aligned} J_n^+ dS &= dS \int_{(\Omega \cdot \mathbf{n}) > 0} |\Omega \cdot \mathbf{n}| n(\mathbf{r}, E, \Omega) v d\Omega \\ &= dS \int_{(\Omega \cdot \mathbf{n}) > 0} |\Omega \cdot \mathbf{n}| \Phi(\mathbf{r}, E, \Omega) d\Omega \end{aligned} \quad (1-9)$$

$$J_n^- dS = dS \int_{(\Omega \cdot \mathbf{n}) < 0} |\Omega \cdot \mathbf{n}| \Phi(\mathbf{r}, E, \Omega) d\Omega \quad (1-10)$$

式中积分域 $(\Omega \cdot \mathbf{n}) > 0$ (或 < 0) 表示只对 $(\Omega \cdot \mathbf{n}) > 0$ (或 < 0) 的那些 Ω (即半个球) 进行积分。 J_n^+ 和 J_n^- 分别称为 \mathbf{r} 处沿 \mathbf{n} 的正的和负的方向的分中子流密度。如果中子角通量密度是各向同性的, 那么 $J_n^+ = J_n^-$, 也就是说每秒穿过 dS 的净中子数或净中子流等于零。在一般情况下, $J_n^+ \neq J_n^-$, 则每秒穿过 dS 的净中子数或净中子流 $J_n(\mathbf{r}, E) dS$ 便等于

$$J_n(\mathbf{r}, E) dS = (J_n^+ - J_n^-) dS = dS \int_{4\pi} \Omega \cdot \mathbf{n} \Phi(\mathbf{r}, E, \Omega) d\Omega$$

上式可以改写成

$$\begin{aligned} J_n(\mathbf{r}, E) dS &= dS \mathbf{n} \cdot \int_{4\pi} \Omega \Phi(\mathbf{r}, E, \Omega) d\Omega \\ &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E) dS \end{aligned} \quad (1-11)$$

其中

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, E) = \int_{4\pi} \Omega \Phi(\mathbf{r}, E, \Omega) d\Omega \quad (1-12)$$

因而

$$J_n(\mathbf{r}, E) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, E) \cdot \mathbf{n} \quad (1-13)$$

向量 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E)$ 定义为中子流密度。它在 \mathbf{n} 方向的投影(或分量) $J_n(\mathbf{r}, E)$ 就等于单位时间内

穿过垂直于 n 的单位面积的净中子数(净流量)。若 $J_n > 0$, 则说明 $J_n^+ > J_n^-$, 说明净中子流的方向与法线 n 的方向一致。反之若 $J_n < 0$, 则说明净中子流的方向与 n 的方向相反。

由(1-11)式可以看到, 每秒穿过 dS 的净中子流大小不仅和 $\Phi(r, E, \Omega)$ 的分布有关, 而且还和面积元 dS 的方向 n 有关。显然, 若 n 的方向恰巧与 J 的方向一致时净中子流的数值最大。

2. 中子输运方程

2. 1 中子输运方程的建立

通常, 在反应堆内中子密度比介质的原子核密度要小得多。例如, 即使在 $\Phi \approx 10^{20}$ 中子/(米²·秒)的热中子反应堆内, 中子密度也不超过约 10^{17} (中子/米³)的数量级, 而原子核的密度, 例如对于固体, 则约为 10^{28} (核/米³)的数量级。因而, 中子在介质内的运动主要是中子和介质原子核的碰撞结果, 而中子间的相互碰撞可以略去不计^①。由于中子运动及其与原子核的散射碰撞, 原来在某一位置具有某一能量和运动方向的中子, 经过一些时间将在另一位置以另一能量和运动方向出现, 这种过程叫做输运过程, 研究中子输运过程的理论便叫做中子输运理论。

对单个中子来讲, 它是以杂乱无章的折线轨迹在介质内进行随机运动的, 直到它被吸收或从反应堆表面逸出为止, 这是一个随机的过程。但是, 在实际上, 我们感兴趣的并不是个别中子的行径或所处的地点问题, 而是在空间不同点处中子密度的宏观期望分布问题。因而可以像气体分子动力学一样, 用一种处理大量中子行径的宏观理论来推导出和气体分子输运方程相类似的中子输运方程, 或称作玻尔兹曼输运方程。

下面就来推导这个方程。

研究中子输运过程所应用的一条基本原则, 就是所谓中子数目守恒或中子平衡, 即给定微元内, 中子密度随时间的变化率应等于它的产生率减去泄漏率和移出率, 亦即

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \text{产生率}(Q) - \text{泄漏率}(L) - \text{移出率}(R) \quad (1-14)$$

这里 $\partial n / \partial t$ 是中子密度随时间的变化率。当系统处于平衡状态(稳态)时, 它便等于零。

现在讨论在 t 时刻, 在相空间 (r, E, Ω) 上的中子平衡。设空间某点 M , 它的位置矢量为 r_0 , 在沿运动方向 Ω 的方向上距离 M 点为 s 的 r 处, 我们选择一个长度为 ds , 横断面为 dA 的体积元 dV , 它的体积等于 $dV = dsdA$ (参阅图 1-6), 我们讨论 r 处柱体积分元 dV 内, 中子能量在 E 和 $E+dE$ 之间且运动方向为 Ω 附近的立体角元 $d\Omega$ 内的中子数目的平衡问题, 同时求出(1-14)式中各项的具体表达式。

(1)泄漏率 根据角通量密度的定义可知, 在 t 时刻每秒空过 dA 进入体积元 dV , 能量在 E 到 $E+dE$ 间隔内而运动方向在 Ω 附近 $d\Omega$ 内的中子数等于

$$\Phi(r_0 + s\Omega, E, \Omega, t)dAdE\Omega$$

^① 这样所得到的中子输运方程是线性的, 而在气体分子输运理论中, 气体分子之间的碰撞是主要的, 因而在气体输运方程中含有非线性的碰撞项。

而每秒由体积之另外一个端面穿出之中子数

$$\Phi[r_0 + (s + ds)\Omega, E, \Omega, t]dAdEd\Omega$$

因而每秒泄漏出柱体积元 dV 的中子数便等于

$$\begin{aligned} L &= [\Phi(r_0 + (s + ds)\Omega, E, \Omega, t) \\ &\quad - \Phi(r_0 + s\Omega, E, \Omega, t)]dAdEd\Omega \\ &= \frac{d\Phi(r_0 + s\Omega, E, \Omega, t)}{ds}dVdEd\Omega \end{aligned} \quad (1-15)$$

注意到 $r = r_0 + s\Omega$, 并且全导数 $\frac{d\Phi}{ds}$, 可以用下面的公式表示

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{ds} &= \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} \\ &= \Omega_x \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \Omega \cdot \nabla\Phi \end{aligned} \quad (1-16)$$

这里算符 ∇ 在形式上可以理解为一个向量, 即

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-17)$$

$$\nabla\Phi = \text{grad}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}i + \frac{\partial\Phi}{\partial y}j + \frac{\partial\Phi}{\partial z}k \quad (1-18)$$

因而泄漏率

$$L = \Omega \cdot \nabla\Phi dVdEd\Omega \quad (1-19)$$

(2)移出率 每单位时间移出相空间基元 $dVdEd\Omega$ 而损失掉的中子数目是由两个方面的原因造成的: (I) 中子在 dV 内被吸收; (II) 中子在 dV 内与原子核发生散射, 因为无论是弹性或非弹性散射都将使中子的能量 E 或运动方向 Ω 发生变化而从相空间基元中损失掉。因而单位时间移出基元 $dVdEd\Omega$ 的中子数为

$$\begin{aligned} R &= (\Sigma_s + \Sigma_m + \Sigma_a)\Phi(r, E, \Omega, t)dVdEd\Omega \\ &= \Sigma_a\Phi dVdEd\Omega \end{aligned} \quad (1-20)$$

(3)产生率 在基元 $dVdEd\Omega$ 内中子的产生有三个来源。第一来源是, 在 dV 体积内原来能量为 E' , 运动方向为 Ω' 的中子经过散射而能量变成为 E 且运动方向变为 Ω 的中子。根据散射函数的定义可知, 单位时间内在 dV 体积元原来能量为 E' 至 $E' + dE'$, 运动方向为 Ω' 在 $d\Omega'$ 立体角元内的中子经过散射而能量变为 E 运动方向为 Ω 的中子数为

$$\Sigma_s(r, E')f(r, E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega)\Phi(r, E', \Omega', t)dVdE'd\Omega'$$

这里 f 是散射函数, 它的定义是: 碰撞前中子的能量为 E' , 运动方向 Ω' , 碰撞后中子能量变为 E 而运动方向为 Ω 的概率^[1]。将上式对所有 E' 和 Ω' 积分之, 则便求得在 dV 体积元内单位时间各种不同能量和运动方向散射到 $dEd\Omega$ 基元内的中子数为

$$Q_s = dVdEd\Omega \int_0^\infty dE' \int_{\Omega'} \Sigma_s(r, E')f(r, E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega)\Phi(r, E', \Omega', t)d\Omega' \quad (1-21)$$

产生率的第二个来源, 对反应堆来讲, 是由于核裂变反应所产生的中子。设 $\nu(E')$ 为能量等于 E' 的中子每次裂变所产生的平均中子数, $\chi(E)$ 为裂变中子谱分布, 假定裂变中子均为瞬发中子且系各向同性, 那么, 由于裂变核反应引起的产生率为

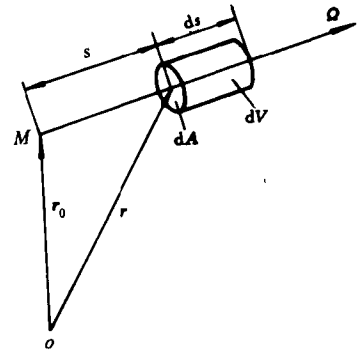


图 1-6 中子泄漏的计算

$$Q_i = dVdEd\Omega \left[\frac{\chi(E)}{4\pi} \int_0^\infty dE' \int_\Omega \nu(E') \Sigma_i(r, E') \Phi(r, E', \Omega, t) d\Omega \right] \quad (1-22)$$

产生率的第三个来源是来自独立的外中子源^①, 设中子源强为 $S(r, E, \Omega, t)$, 那么, 它的贡献为

$$S = S(r, E, \Omega, t) dVdEd\Omega \quad (1-23)$$

于是总的产生率 Q 便等于

$$Q(r, E, \Omega, t) = Q_s + Q_f + S \quad (1-24)$$

最后, 中子密度随时间的变化率为

$$\frac{\partial}{\partial t} n(r, E, \Omega, t) = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(r, E, \Omega, t) \quad (1-25)$$

将(1-15)到(1-25)式的各种结果代入文字表达式(1-14)内并消去 $dVdEd\Omega$ 便得到任一刻 t 在相空间 (r, E, Ω) 上的中子平衡方程

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Omega \cdot \nabla \Phi + \Sigma_i(r, E) \Phi \\ &= \int_0^\infty \int_\Omega \Sigma_s(r, E') f(r, E' \rightarrow E, \Omega \rightarrow \Omega) \Phi(r, E', \Omega, t) dE' d\Omega \\ & \quad + Q_f(r, E, \Omega, t) + S(r, E, \Omega, t) \end{aligned} \quad (1-26)$$

式中 $\Phi = \Phi(r, E, \Omega, t)$ 。这便是非稳态情况下的中子输运方程或玻尔兹曼方程, 它构成了反应堆物理分析及中子输运理论的基础。

稳态时, $\partial n / \partial t = 0$, 便得到稳态中子输运方程

$$\begin{aligned} \Omega \cdot \nabla \Phi + \Sigma_i(r, E) \Phi &= \int_0^\infty \int_{4\pi} \Sigma_s(r, E') f(r, E' \rightarrow E, \Omega \rightarrow \Omega) \Phi(r, E', \Omega) dE' d\Omega \\ & \quad + Q_f(r, E, \Omega) + S(r, E, \Omega) \end{aligned} \quad (1-27)$$

由此可见, 中子输运方程是一个线性的微分-积分方程, 在一般情况下稳态时它包含有 $r(x, y, z)$, E 和 $\Omega(\theta, \varphi)$ 六个自变量。这样方程的求解在数学上是很困难的, 即使应用电子计算机数值求解仍然是非常复杂和困难的事情, 并且并不是对所有复杂问题都能求出其解的。因而, 反应堆物理分析的主要任务也就在于建立一些简单的近似模型和分析方法, 并把它应用于反应堆的一些具体问题求解。

2. 2 不同坐标系中散度算子 $\Omega \cdot \nabla \Phi$ 的表达式

前面我们求得稳态中子输运方程为(1-27)式, 在具体计算时, 对于不同的问题为了计算上的方便往往采用不同的坐标系。(1-27)式中的散度算子 $\Omega \cdot \nabla \Phi = \Omega \cdot \text{grad} \Phi$ 项对不同的坐标系具有不同的形式。根据场论的知识知道, $\Omega \cdot \text{grad} \Phi$ 就是函数 Φ 在 Ω 方向上的方向导数。因而设射线 s , 其方向与 Ω 重合, ds 即为 Ω 方向的增量(见图 1-7), 则

$$\Omega \cdot \nabla \Phi = \Omega \text{grad} \Phi = \frac{d\Phi}{ds}$$

下面我们来导出在反应堆计算中常用的几种坐标系内 $\Omega \cdot \nabla \Phi$ 及中子输运方程的表达式。

^① 此处独立中子源一词指不依赖于系统内中子密度而独立存在且强度也与系统无关的源, 例如自发裂变源、天然放射性源以及其他中子源。

2. 2. 1 直角坐标系

前面在导出中子输运方程的时候,已知求得在三维直角坐标系内 $\Omega \cdot \nabla \Phi$ 的表达式(参阅(1-16)式),如果 Ω 按图 1-1 所示表示则有

$$\begin{aligned}\Omega \cdot \nabla \Phi &= \Omega_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ \Omega \cdot \nabla \Phi &= \sqrt{1 - \mu^2} (\cos \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial y}) + \mu \frac{\partial \Phi}{\partial z}\end{aligned}\quad (1-28)$$

式中 $\mu = \cos \theta$ 。或且 Ω 按图 1-2 所示表示,则有

$$\Omega \cdot \nabla \Phi = \mu \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \xi \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (1-29)$$

在反应堆设计中经常遇到对 z 轴对称的二维 (x, y) 情况,这时

$$\Omega \cdot \nabla \Phi = \mu \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (1-30)$$

一维平面问题是直角坐标系的最简单情况,这时中子通量密度等仅仅是一维坐标 z 及 Ω 与 Z 轴夹角 θ (或 $\mu = \cos \theta$) 的函数(参阅图 1-8),因而

$$\Omega \cdot \nabla \Phi = \mu \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (1-31)$$

式中 $\Phi(z, E, \mu) = \Phi(z, E, \Omega)$, 由于中子通量密度对辐角 φ 的对称性,对一维平面问题我们通常这样定义 $\Phi(z, E, \mu)$, 即

$$\Phi(z, E, \mu) d\mu = d\mu \int_0^{2\pi} \Phi(z, E, \Omega) d\varphi$$

或

$$\Phi(z, E, \mu) = 2\pi \Phi(z, E, \Omega) \quad (1-32)$$

同样方法规定 $S(z, E, \mu)$ 为

$$S(z, E, \mu) = 2\pi S(z, E, \Omega) \quad (1-33)$$

如果假定散射函数 $f(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega)$ 仅仅是散射前后运动方向 Ω 和 Ω' 间夹角(即散射角 θ_0) 的函数,若令 $\mu_0 = \cos(\Omega', \Omega) = \cos \theta_0$, 那么同样可以规定:

$$f(E' \rightarrow E; \mu_0) = 2\pi f(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) \quad (1-34)$$

考虑(1-31)~(1-34)式,便得到一维稳态中子输运方程为

$$\begin{aligned}& \mu \frac{\partial \Phi(z, E, \mu)}{\partial z} + \Sigma_s \Phi(z, E, \mu) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dE' \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \Sigma_s f(E' \rightarrow E; \mu_0) \Phi(z, E', \mu') d\mu' d\varphi + S(z, E, \mu)\end{aligned}\quad (1-35)$$

2. 2. 2 柱坐标系

在反应堆计算中经常遇到圆柱状域的情况,例如反应堆芯部,燃料棒等等。这时采用圆柱

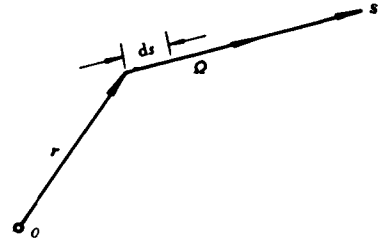


图 1-7 方向导数的计算

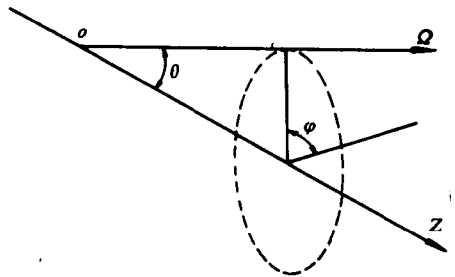


图 1-8 一维平面坐标系