

裘宗沪 / 主编

SHU XUE

历届

# 全国高中数学 联赛试题详解

中国数学会普及工作委员会 编

开明出版社

# 历届全国高中数学联赛 试题详解

主编 裘宗沪 杜锡录  
编者 夏兴国 周春荔  
吴建平

开明出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

历届全国高中数学联赛试题详解/裘宗沪主编;中国数  
学会普及工作委员会编. —北京:开明出版社,1998  
ISBN 7-80077-755-3

I. 历… II. ①裘… ②中… III. 数学课-高中-解题  
IV. G633.605

中国牌本图书馆 CIP 数据核字(98)第 20742 号

### 历届全国高中数学联赛试题详解

裘宗沪 主编

\*

开明出版社出版发行

(北京海淀区西三环北路 19 号)

廊坊人民印刷厂印刷

新华书店北京发行所经销

开本 850×1168 1/32 印张 8.375 字数 208 千字

1999 年 1 月北京修订版 1999 年 1 月第 1 次印刷

印数:00,001-10,000

ISBN 7-80077-755-3 /G·524 定价:10.50 元

## 内 容 提 要

本书辑录了 1981~1997 年全国高中数学联赛试题,解答部分由中国数学会普及工作委员会主任裘宗沪先生,副主任杜锡录先生、夏兴国先生等在每届主办省、市、自治区数学会精心作出的试题解答的基础上执笔完成,某些试题附有精辟解答及其背景分析和评注。这是中国数学会首次公开高中联赛的试题和解答。

本书可供中学数学教师、高中学生及各类高中数学竞赛参加者使用与参考。

## 前 言

早在五十年代,以华罗庚教授为代表的我国老一辈著名数学家就十分重视培养青少年优秀人才,倡导并组织了多次数学竞赛活动,吸引了大批数学爱好者,对我国科技人才的成长和科学研究的开展作出了卓越的贡献。

由于种种客观因素,我国数学竞赛活动几经波折。到1978年才又重新开展起来。1981年中国数学会开始举办“全国高中数学联赛”,这一群众性的数学竞赛活动得到了全国广大中学师生欢迎,也得到了教育行政部门、各级科学技术协会以及社会各阶层人士的肯定和支持。“试题所涉及的知识范围不超出现行教学大纲”这一命题原则,也得到了广泛的理解和拥护。

所谓“联赛”,就是各省、市、自治区联合承办,轮流做东,大家提供试题。因此“联赛”充满着协作精神。从1981年至1994年的试题,凝聚着全国许许多多数学工作者的心血,特别是各届承办单位更是认真负责、不辞辛劳,借此机会我代表中国数学会普及工作委员会向所有为“全国高中数学联赛”作出努力和给予支持的同志致以崇高敬礼。

中国数学会所主办的全国高中数学联赛、全国初中数学联赛、全国小学数学奥林匹克都是群众性的数学课外活动,是大众化、普及型的数学竞赛。高中联赛与全国中学生数学冬令营衔接,有“选拔”的作用。

在每届承办省、市、自治区数学会精心作出的试题解答的基础上,由中国数学会普及工作委员会组织有关同志执笔整理出了这本试题集。这是中国数学会首次公开全国高中数学联赛的试题和解答,供广大中学师生、数学爱好者参考。

裴宗沪

1995年1月20日

## 修 订 说 明

由中国数学会普及工作委员会组织一批中国数学奥林匹克高级教练员编写的《全国高中数学联赛试题详解》，自 1994 年问世至今，经全国各地许多奥校以及各级各类学校的广大数学爱好者使用以后，无论在内容形式上和装祯设计上均给予好评。不少读者指名要购买此书。

为了提高本书的质量，不辜负广大读者的厚爱，应广大读者要求，我们对《全国高中数学联赛试题详解》中存在的不足进行了技术上的修订。本次修订我们除对书中存在的问题进行了纠正和调整，更主要的是对 1994 年以后的试题进行了增补，还对开本和版式做了更改和变动，并把书名更改为《历届全国高中数学联赛试题详解》，以符合数学竞赛及数学爱好者的需要。

真诚地希望广大读者继续关心和使用本书。欢迎对书中的不足批评指正，使之不断完善。

编 者

1998 年 10 月

# 目 录

## 试题部分

一九八一年 .....	3
一九八二年 .....	6
一九八三年 .....	9
一九八四年 .....	13
一九八五年 .....	17
一九八六年 .....	21
一九八七年 .....	25
一九八八年 .....	29
一九八九年 .....	33
一九九〇年 .....	37
一九九一年 .....	42
一九九二年 .....	46
一九九三年 .....	51
一九九四年 .....	55
一九九五年 .....	59
一九九六年 .....	63
一九九七年 .....	67

## 解答部分

一九八一年 .....	75
一九八二年 .....	86



一九八三年 .....	97
一九八四年 .....	112
一九八五年 .....	124
一九八六年 .....	133
一九八七年 .....	141
一九八八年 .....	150
一九八九年 .....	157
一九九〇年 .....	164
一九九一年 .....	175
一九九二年 .....	185
一九九三年 .....	198
一九九四年 .....	209
一九九五年 .....	220
一九九六年 .....	230
一九九七年 .....	239
<b>附录 1 中国数学会普及工作委员会简介 .....</b>	<b>253</b>
<b>附录 2 高中数学竞赛大纲(修订稿) .....</b>	<b>255</b>

试 题 部 分



# 一九八一年

## 一、选择题

下面 7 个题目各提出四个答案, 将你认为正确的答案的英文字母代号填写在题后的括号内.

1. 条件甲: 两个三角形的面积和二条边对应相等.

条件乙: 两个三角形全等.

- (A) 甲是乙的充分必要条件;
- (B) 甲是乙的必要条件;
- (C) 甲是乙的充分条件;
- (D) 甲不是乙的必要条件, 也不是充分条件.

答( )

2. 条件甲:  $\sqrt{1+\sin\theta}=a$ .

条件乙:  $\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=a$ .

- (A) 甲是乙的充分必要条件; (B) 甲是乙的必要条件;
- (C) 甲是乙的充分条件;
- (D) 甲不是乙的必要条件, 也不是充分条件.

答( )

3. 设  $\alpha \neq \frac{k\pi}{2} (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ .

$$T = \frac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$$

- (A)  $T$  取负值;
- (B)  $T$  取非负值;

- (C)  $T$  取正值;  
 (D)  $T$  取值可正可负.

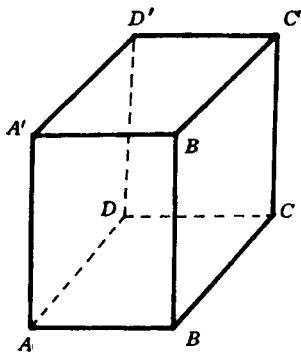
答( )

4. 下面四个图形中,哪一个面积最大?

- (A)  $\triangle ABC$ :  $\angle A=60^\circ$ ,  $\angle B=45^\circ$ ,  $AC=\sqrt{2}$ ;  
 (B) 梯形:两对角线长度分别为  $\sqrt{2}$  和  $\sqrt{3}$ , 夹角为  $75^\circ$ ;  
 (C) 圆:半径为 1;  
 (D) 正方形:对角线的长度为 2.5.

答( )

5. 给出长方体  $ABCD-A'B'C'D'$ ,  
 下列十二条直线: $AB', BA', CD', DC',$   
 $AD', DA', BC', CB', AC, BD, A'C',$   
 $B'D'$  中有多少对异面直线?



- (A) 30 对;  
 (B) 60 对;  
 (C) 24 对;  
 (D) 48 对.

答( )

6. 在坐标平面上有两个区域  $M$  和  $N$ .  $M$  是由  $y \geq 0$ ,  $y \leq x$  和  $y \leq 2-x$  这三个不等式确定的.  $N$  是随  $t$  变化的区域, 它由不等式  $t \leq x \leq t+1$  所确定的,  $t$  的取值范围是  $0 \leq t \leq 1$ . 设  $M$  和  $N$  的公共面积是函数  $f(t)$ , 则  $f(t)$  为:

- (A)  $-t^2+t+\frac{1}{2}$ ;                      (B)  $-2t^2+2t$ ;  
 (C)  $1-\frac{1}{2}t^2$ ;                        (D)  $\frac{1}{2}(t-2)^2$ .

答( )

7. 对方程  $x|x|+px+q=0$  进行讨论, 下面的结论中, 哪一

个是错误的?

- (A) 至多有三个实根;            (B) 至少有一个实根;  
(C) 仅当  $p^2 - 4q \geq 0$  时才有实根;  
(D) 当  $p < 0$  和  $q > 0$  时, 有三个实根.

答(    )

二、下列表中的对数值有两个是错误的, 请予纠正.

$x$	0.021	0.27	1.5	2.8	3	5
$\lg x$	$2a+b+c-3$	$6a-3b-2$	$3a-b+c$	$1-2a+2b-c$	$2a-b$	$a+c$
$x$	6	7	8	9	14	
$\lg x$	$1+a-b-c$	$2(b+c)$	$3-3a-3c$	$4a-2b$	$1-c+2b$	

三、在圆  $O$  内, 弦  $CD$  平行于弦  $EF$ . 且与直径  $AB$  交成  $45^\circ$  角. 若  $CD$  与  $EF$  分别交直径  $AB$  于  $P$  和  $Q$ , 且圆  $O$  的半径长为 1. 求证:

$$PC \cdot QE + PD \cdot QF < 2.$$

四、组装甲、乙、丙三种产品, 需用  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三种零件. 每件甲需用  $A$ 、 $B$  各 2 个; 每件乙需用  $B$ 、 $C$  各 1 个; 每件丙需用 2 个  $A$  和 1 个  $C$ . 用库存的  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三种零件, 如组装成  $p$  件甲产品、 $q$  件乙产品和  $r$  件丙产品, 则剩下 2 个  $A$  和 1 个  $B$ . 但  $C$  恰好用完. 试证: 无论怎样改变产品甲、乙、丙的件数, 也不能把库存的  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三种零件都恰好用完.

五、一张台球桌形状是正六边形  $ABCDEF$ . 一个球从  $AB$  的中点  $P$  击出, 击中  $BC$  边上的某点  $Q$ , 并且依次碰击  $CD$ 、 $DE$ 、 $EF$ 、 $FA$  各边, 最后击中  $AB$  边上的某一点, 设  $\angle BPQ = \theta$ , 求  $\theta$  的取值范围.

提示: 利用入射角等于反射角的原理.

## 一九八二年

### 一、选择题

本题共有 8 个小题,每一小题都有(A)、(B)、(C)、(D)四个答案供选择,其中有一个且只有一个答案是正确的,请把你认为正确的那个答案前的代号,写在题后的括号内.

1. 如果凸  $n$  边形  $F(n \geq 4)$  的所有对角线都相等,那么

- (A)  $F \in \{\text{四边形}\}$ ;
- (B)  $F \in \{\text{五边形}\}$ ;
- (C)  $F \in \{\text{四边形}\} \cup \{\text{五边形}\}$ ;
- (D)  $F \in \{\text{边相等的多边形}\} \cup \{\text{内角相等的多边形}\}$ .

答( )

2. 极坐标方程  $\rho = \frac{1}{1 - \cos\theta + \sin\theta}$  所确定的曲线是

- (A) 圆;
- (B) 椭圆;
- (C) 双曲线;
- (D) 抛物线.

答( )

3. 如果  $\log_2 [\log_{\frac{1}{2}} (\log_2 x)] = \log_3 [\log_{\frac{1}{3}} (\log_3 y)] = \log_5 [\log_{\frac{1}{5}} (\log_5 z)] = 0$ , 那么

- (A)  $z < x < y$ ;
- (B)  $x < y < z$ ;
- (C)  $y < z < x$ ;
- (D)  $z < y < x$ .

答( )

4. 由方程  $|x-1| + |y-1| = 1$  确定的曲线所围成的图形的面积是

- (A) 1; (B) 2; (C)  $\pi$ ; (D) 4.

答( )

5. 对任何  $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 都有

- (A)  $\sin \sin \varphi < \cos \varphi < \cos \cos \varphi$ ;  
(B)  $\sin \sin \varphi > \cos \varphi > \cos \cos \varphi$ ;  
(C)  $\sin \cos \varphi > \cos \varphi > \cos \sin \varphi$ ;  
(D)  $\sin \cos \varphi < \cos \varphi < \cos \sin \varphi$ .

答( )

6. 已知  $x_1, x_2$  是方程

$$x^2 - (k-2)x + (k^2 + 3k + 5) = 0 \quad (k \text{ 为实数})$$

的两个实数根,  $x_1^2 + x_2^2$  的最大值是

- (A) 19; (B) 18; (C)  $5\frac{5}{9}$ ; (D) 不存在.

答( )

7. 设  $M = \{(x, y) : |xy| = 1, x > 0\}$ ,

$N = \{(x, y) : \arctg x + \text{arcctg} y = \pi\}$ , 那么

- (A)  $M \cup N = \{(x, y) : |xy| = 1\}$ ;  
(B)  $M \cup N = M$ ;  
(C)  $M \cup N = N$ ;  
(D)  $M \cup N = \{(x, y) : |xy| = 1, \text{且 } x, y \text{ 不同时为负数}\}$ .

答( )

8. 当  $a, b$  是两个不相等的正数时, 下列三个代数式:

$$\text{甲: } (a + \frac{1}{a})(b + \frac{1}{b}),$$

$$\text{乙: } (\sqrt{ab} + \frac{1}{\sqrt{ab}})^2,$$

$$\text{丙: } (\frac{a+b}{2} + \frac{2}{a+b})^2$$



中间,值最大的一个

- (A) 必定是甲; (B) 必定是乙;  
(C) 必定是丙;  
(D) 一般并不确定,而与  $a, b$  的取值有关.

答( )

二、已知四面体  $SABC$  中,  $\angle ASB = \frac{\pi}{2}$ ,  $\angle ASC = \alpha (\theta < \alpha < \frac{\pi}{2})$ ,  $\angle BSC = \beta (0 < \beta < \frac{\pi}{2})$ , 以  $SC$  为棱的二面角的平面角为  $\theta$ .

求证:  $\theta = \pi - \arccos(\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta)$ .

三、已知: (1) 半圆的直径  $AB$  长为  $2r$ ; (2) 半圆外的直线  $L$  与  $BA$  的延长线垂直, 垂足为  $T$ ,  $|AT| = 2a (2a < \frac{r}{2})$ ; (3) 半圆上有相异两点  $M, N$ , 它们与直线  $L$  的距离  $|MP|, |NQ|$  满足条件  $\frac{|MP|}{|AM|} = \frac{|NQ|}{|AN|} = 1$ .

求证:  $|AM| + |AN| = |AB|$ .

四、已知边长为 4 的正三角形  $ABC$ .  $D, E, F$  分别是  $BC, CA, AB$  上的点, 且  $|AE| = |BF| = |CD| = 1$ , 连结  $AD, BE, CF$ , 交成  $\triangle RQS$ .  $P$  点在  $\triangle RQS$  内及其边上移动,  $P$  点到  $\triangle ABC$  三边的距离分别记作  $x, y, z$ ,

- (1) 求证当  $P$  点在  $\triangle RQS$  的顶点位置时, 乘积  $xyz$  有极小值;  
(2) 求上述乘积  $xyz$  的极小值.

五、已知圆  $x^2 + y^2 = r^2$  ( $r$  为奇数), 交  $x$  轴于  $A(r, 0), B(-r, 0)$ , 交  $y$  轴于  $C(0, -r), D(0, r)$ ,  $P(u, v)$  是圆周上的点,  $u = p^m, v = q^n$  ( $p, q$  都是质数,  $m, n$  都是自然数) 且  $u > v$ . 点  $P$  在  $x$  轴和  $y$  轴上的射影分别是  $M, N$ .

求证:  $|AM|, |BM|, |CN|, |DN|$  分别为 1, 9, 8, 2.