计算方法丛书 31

小波分析·应用算法

徐　晨　赵瑞珍　甘小冰　著

科学出版社
www.sciencep.com

内容简介

本书是将小波的数学基础、小波理论、应用及算法融汇一体，自成系统．全书共8章．第1章简述小波的数学基础——数值泛函概要；第2章给出现代数值分析(包括小波分析)的总框架，并概述小波分析的主要内容；第3章到第4章介绍小波分析的基本理论与算法；第5章到第8章是小波分析的应用，主要介绍各种信号的去噪处理算法及在语音识别、图像压缩、水印技术、故障诊断、股市分析等方面的应用、算法和算例；书末附有目前常用的小波基的介绍．读者阅读本书可以完成一个从基础到理论、从应用到算法的自我学习过程．

本书可作为应用数学系、计算机系、电子信息类高年级本科生及研究生的教材和参考书，也可供相关领域的科研人员参考．

图书在版编目(CIP)数据

小波分析·应用算法/徐晨，赵瑞珍，甘小冰著．—北京：科学出版社，2004

(计算方法丛书)

ISBN 7-03-012701-3

Ⅰ．小…　Ⅱ．①徐…　②赵…　③甘…　Ⅲ．小波分析　Ⅳ．O177

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第123958号

责任编辑：吕　虹/责任校对：朱光光

责任印制：钱玉芬/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社　出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂　印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2004年5月第　一　版　　开本：B5(720×1000)

2004年5月第一次印刷　　印张：12 1/2

印数：1—3 000　　字数：194 000

定价：30.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　　言

本书是作者们近几年来从事小波理论与科研工作的结晶.作者们结合自己在国内外讲学和科研实践,对小波理论和它的数学基础做了一些探索和归纳,在小波应用和算法方面做了一些研究和改进,并在工程实践中取得较好实效.有些算法已被工程单位所采用,取得了较好的社会效益.曾多次获得部省级科技进步奖.

小波分析是近20多年来发展起来的新兴学科,是当前数学领域中一个迅猛发展的新方向.它既具有丰富的数学理论意义,又具有广泛的工程应用价值,从数值分析的角度看,它是Fourier分析的一个突破性进展,给许多相关学科的研究领域带来了新的思想,为工程应用领域提供了一种新的更有效的分析工具.

自从1807年法国数学家Fourier从热传导理论提出Fourier分析以后,无论对数学史还是对工程科学史的发展都起到了很大的影响和推动作用,Fourier分析的关键在于通过Fourier变换引进了频率的概念,把一个函数展开为各种频率的谐波的线性组合(Fourier级数),级数中的Fourier系数可以描绘出函数的性态和特征,并由此引出了一系列频谱分析的理论,它为广泛的工程科学领域提供了有力的分析工具,使很多在时域中看不清的问题却能在频域中一目了然.近两个世纪以来,整个工程分析几乎都属于Fourier分析这个范畴.但Fourier分析只是一种纯频域的分析方法.它不能提供局部时间域上的函数特征,因此长期以来,数学家和工程师们一直在努力寻找比谐波基更好的基函数,使函数(或信号)不但能得到一种新的正交展开,而且又能同时显示出时、频域的局部特征.为此,数学家和工程师们经过长期不懈的努力,终于找到了小波基,并逐渐发展成为目前的小波分析理论.

在小波分析中,利用平移和展缩巧妙地构造了小波基,同时具有时间平移和多尺度分辨率的概念,可用来同时处理时频分析,它既具有时频局部化和多分辨功能,又具有简单、灵活、随意的特点.小波可对高频采取逐渐精细的时域步长,从而可以聚焦到分析对象的任意细节,故小波有“数学显微镜”之美称.因而它比Fourier分析更适宜于处理非平稳问题.

与Fourier分析类似,在小波分析中也存在积分小波变换、小波级数和离散小波变换.与Fourier变换相比,小波分析是一个时间和频率的局域变换,因而能有效地从信号中提取信息,通过伸缩和平移等运算功能对函数或信号进行多尺度细化分析(multiscale analysis),解决了Fourier变换不能解决的许多困难问题.小波分析与Fourier分析的本质区别在于:Fourier分析只是考虑时域和频域之间的一对一映射,它以单个变量(时间或频率)的函数表示信号;小波分析则利用联合时间-尺度

函数分析非平稳信号.小波分析从根本上克服了 Fourier 分析只能以单个变量描述信号的缺点.在小波分析中,人们以不同的尺度(或分辨率)来观察信号,信号分析的这种多尺度分析(或多分辨率)的观点是小波分析的基本点.

由于应用的目的,书中讨论的小波主要是经典小波——由一个母小波函数经过伸缩和平移构成的小波基,它可以构成 L^2 的规范正交基.先从多分辨分析构造尺度函数,再通过正交补构造小波函数,最后将 L^2 作正交分解.于是 L^2 中任一函数 $f(x)$ 可以写成小波级数的形式,为求小波级数的系数,从内积引出小波变换.每个小波基函数 $\psi_{j,k}$ 的对偶 $\bar{\psi}_{j,k}$ 就是离散小波积分变换 $W_f(\psi_{j,k}) = \int_R f(x)\bar{\psi}_{j,k}dx$ 中的积分核,而在 (j,k) 处的积分值就是 $f(x)$ 的小波级数在 (j,k) 的小波系数.$f(x)$ 的性态可以通过对应的小波系数来刻画.为快速求出小波系数,Mallat 在多分辨分析基础上提出了 Mallat 递推算法,再结合 Daubechies 构造的各种小波滤波器,大大地促进了小波在各工程领域中广泛而有效的应用.

本书是将小波的数学基础、小波理论、应用及算法融汇一体,自成系统.第 1 章简述小波的数学基础——数值泛函概要;第 2 章给出现代数值分析(包括小波分析)的总框架,概述小波分析的主要内容;第 3 章到第 4 章介绍小波分析的基本理论与算法;第 5 章到第 8 章是小波分析的应用,主要介绍各种信号的去噪处理算法及在语音识别、图像压缩、水印技术、故障诊断、股市分析等方面的应用、算法和算例,在最后的附录中归纳和介绍了目前常用的小波基.

在本书完成过程中得到石钟慈院士的指导和鼓励,在出版中得到国家自然科学基金和深圳大学学术著作出版基金的资助,在此一并表示衷心的感谢.

由于作者水平有限及时间匆促,书中错漏之处敬请读者指正.

目　　录

第 1 章　小波的数学基础

数学家们认为，有两件事情使数值分析发生了革命性的变化，这便是电子计算机的出现和泛函分析在数值分析领域中的应用．前者是计算的工具，后者是理论基础．

由于泛函分析吸取了各个数学分支中最基本的精华，具有高度的抽象性、系统性和普遍性，因此它的观点、方法和规律可以广泛地应用到各个学科．近代科学的发展趋势是各种学科的互相渗透，互相交叉，“你中有我，我中有你”，界线模糊，边缘面宽．泛函分析作为一门高度抽象的数学理论，为各个学科提供了一般的数学规律和共同的框架，已成为各个学科的重要工具，对数值分析而言，它们的关系更为密切．

小波分析作为近 20 年发展起来的一种新的数值分析方法，它与其他的数值分析有着共同的泛函背景和框架．作为小波分析的数学基础，我们安排了本章的内容，以使初学小波的读者通过学习形成系统的知识．

1.1 距离空间

1.1.1 定义和例

1．定义

定义 1.1.1 设 X 表示一个非空集合，若其中任意两元素 x,y，都按一定的规则与一个实数 $\rho(x,y)$ 相对应，且 $\rho(x,y)$ 满足以下三公理(称为距离公理)：

(i) $\rho(x,y)\geqslant 0$，当且仅当 $x=y$ 时等号成立；　　(非负性)

(ii) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$；　　(对称性)

(iii) 对 X 中任意三元素 x,y,z，有

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z),\qquad\text{(三角不等式)}$$

则称 $\rho(x,y)$ 为 x 与 y 间的距离，称 X 为距离空间，记为 (X,ρ)，有时也简记为 X，距离空间中的元素也称为“点”．

根据定义，在距离空间 X 中，任意两点之间都有一个确定的距离，它包含了通常意义下的距离概念，但又要比通常意义的距离概念更广泛，它是欧氏空间中通常距离概念的抽象和推广．

2. 例

例 1.1.1　设 $\boldsymbol{R}^1$ 为非空实数集，对其中任意两实数 x 和 y，定义距离

$$\rho(x,y)=|x-y| \tag{1.1}$$

显然满足距离公理，即为通常意义下的距离，常称为欧氏距离. 于是 $\boldsymbol{R}^1$ 按(1.1)式构成一距离空间.

另外，还可以在 $\boldsymbol{R}^1$ 用另一种方式来定义距离：

$$\rho_1(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|} \tag{1.2}$$

(1.2)式满足距离公理(i)、(ii)是显然的. 现在来验证它满足三角不等式.

由于当 $t\geqslant 0$ 时，$\varphi(t)=\dfrac{t}{1+t}$ 为单调增函数，因此有

$$\begin{aligned}
\rho(x,z)&=\frac{|x-z|}{1+|x-z|}\leqslant\frac{|x-y|+|y-z|}{1+|x-y|+|y-z|}\\
&=\frac{|x-y|}{1+|x-y|+|y-z|}+\frac{|y-z|}{1+|x-y|+|y-z|}\\
&\leqslant\frac{|x-y|}{1+|x-y|}+\frac{|y-z|}{1+|y-z|}\\
&=\rho(x,y)+\rho(y,z)
\end{aligned}$$

例 1.1.2　设 $\boldsymbol{R}^n$ 为 n 维实向量全体所构成的空间，在其中可定义距离如下：设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中任意两元素，则

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2} \tag{1.3}$$

可以证明，它满足距离公理. 当 $n=2$ 时，则由(1.3)式定义的距离即为平面上两点间的通常距离.

同样，在 $\boldsymbol{R}^n$ 中也可以定义另一种距离：

$$\rho_1(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i| \tag{1.4}$$

由上可见，在同一个集合中，可以用不同的方式定义不同距离，得到不同的距离空间. 如不作声明，在 $\boldsymbol{R}^1$ 中我们用(1.1)式规定的距离，在 $\boldsymbol{R}^n$ 中用(1.3)式规定的距离，称为欧氏距离.

例 1.1.3　用 $C_{[a,b]}$ 表示定义在 $[a,b]$ 上所有连续函数的全体，对于任意 $x(t),y(t)\in C_{[a,b]}$，可以定义距离

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)| \tag{1.5}$$

例 1.1.4　$L^2_{[a,b]}$ 表示 $[a,b]$ 上平方可积函数的全体，即对于任意 $x(t)\in L^2_{[a,b]}$

都有

$$\int_a^b |x(t)|^2 dt < +\infty$$

则可在 $L^2_{[a,b]}$ 中定义距离：任意 $x(t),y(t)\in L^2_{[a,b]}$，有

$$\rho(x(t),y(t)) = \left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^2 dt\right)^{1/2} \tag{1.6}$$

例 1.1.5 l^2 表示满足 $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2<+\infty$ 的实数列的全体，则其中任意两点

$$x=(x_1,x_2,\cdots),\quad y=(y_1,y_2,\cdots)$$

间的距离可定义如下：

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2} \tag{1.7}$$

从上面例子可以看出，我们可以在两向量间、两函数间、两数列间以及任意两个元素间引进距离，它们要比通常意义上的几何距离的含义更广泛.

1.1.2 收敛概念

极限是一切分析理论的基础.极限理论的基本点是收敛序列只能有一个极限.对于简单的直线和平面的情况，从通常的距离概念出发，这是很明显的事实.但在一般距离空间中就不那么显然、明白了.要在距离空间中建立相应的极限理论，就要从一般的距离公理出发建立收敛概念.

距离公理是从通常的距离概念中抽象出本质特征并加以一般化而形成的.实数(距离是用实数来定义的)的性质以及距离公理的作用使我们并不难在距离空间中建立起收敛的概念及以后的一系列理论.仔细考察一下经典分析中的许多定理的证明，实际上也仅仅用到了一般的距离公理，而并不需要通常几何中有关距离的全部性质.

下面，我们就在一般距离空间中来建立有关收敛的概念和理论.

1. 收敛点列

1) 定义

定义 1.1.2 设 X 为距离空间，$x_n(n=1,2,\cdots)$ 为 X 中的点列，$x\in X$，如果当 $n\to\infty$ 时，数列 $\rho(x_n,x)\to 0$，则称点列 x_n 按距离 $\rho(x,y)$ 收敛于 x，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \tag{1.8}$$

或

$$x_n \to x \qquad (n\to\infty)$$

此时，称 x_n 为收敛点列，称 x 为 x_n 的极限.

从定义可以看出，在距离空间中一般点列的收敛是通过距离的数列的收敛来定义的，而数列的收敛概念及性质等是我们在数学分析中早就熟悉了的.因此，我们不难得出一般距离空间中有关收敛点列的一些基本性质.

2) 性质

定理 1.1.1　在距离空间中，收敛点列的极限是惟一的.

证明　设 x, y 都是 x_n 的极限，则根据定义及数列收敛的性质，应有对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，

$$\rho(x_n, x) < \varepsilon, \qquad \rho(x_n, y) < \varepsilon$$

由三角不等式可得

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) < 2\varepsilon$$

由 ε 的任意性，可知 $\rho(x, y) = 0$，即 $x = y$.惟一性得证.

定理 1.1.2　在距离空间中，距离 $\rho(x, y)$ 是两个变元 x, y 的连续泛函.即在距离空间中，当 $x_n \to x_0, y_n \to y_0$ 时，

$$\rho(x_n, y_n) \to \rho(x_0, y_0) \quad (n \to \infty) \tag{1.9}$$

证明　根据数列收敛的性质，要证明(1.9)式，即要证得

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_0, y_0)| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

考虑三角不等式

$$\begin{aligned}\rho(x_n, y_n) &\leqslant \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, y_n) \\ &\leqslant \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, y_0) + \rho(y_0, y_n)\end{aligned}$$

即

$$\rho(x_n, y_n) - \rho(x_0, y_0) \leqslant \rho(x_n, x_0) + \rho(y_n, y_0) \tag{1.10}$$

又

$$\rho(x_0, y_0) \leqslant \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, y_0) \leqslant \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, y_0) \tag{1.11}$$

则

$$\rho(x_0, y_0) - \rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, x_0) + \rho(y_n, y_0)$$

由(1.10)式与(1.11)式即可得

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_0, y_0)| \leqslant \rho(x_n, x_0) + \rho(y_n, y_0)$$

令 $n \to \infty$，即得

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_0, y_0)| \to 0$$

定理 1.1.3 设 x_n 为距离空间 X 中的收敛点列，则 x_n 必有界. 即存在 $x_0 \in X$，有限数 $r > 0$，使对所有的 $x \in x_n$，都有

$$\rho(x, x_0) < r \tag{1.12}$$

事实上，因 x_n 为收敛点列，不妨设它的极限为 x_0，则取 $\varepsilon = 1$，存在自然数 N，当$n > N$ 时有

$$\rho(x, x_0) < 1$$

取

$$r = \max\{1, \rho(x_0, x_1), \rho(x_0, x_2), \cdots, \rho(x_0, x_N)\} + 1$$

即可使对所有 $x \in x_n$，(1.12)式成立.

2. Cauchy 点列

设 x_n 为距离空间 X 中的收敛点列，则存在 $x \in X$，使

$$\rho(x_n, x) \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{1.13}$$

因为

$$\rho(x_m, x_n) \leqslant \rho(x_m, x) + \rho(x_n, x)$$

所以，当 $m, n \to \infty$ 时有

$$\rho(x_m, x_n) \to 0 \tag{1.14}$$

即由(1.13)式可以推出(1.14)式，而在一般距离空间中却不能由(1.14)式反推出(1.13)式.

在实数理论中，

$$|x_n - x| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

与

$$|x_m - x_n| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

是相当的. 在一般距离空间中，则(1.13)式与(1.14)式并不相当，我们把使(1.14)式成立的点列称为 Cauchy 点列，或称基本点列.

于是，在实数空间中，按通常的欧氏距离，收敛点列与 Cauchy 点列相当. 在一般距离空间中，则收敛点列必为 Cauchy 点列，而 Cauchy 点列不一定是收敛点列.

如有理数点列

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \cdots \tag{1.15}$$

在有理数空间中，只是一个 Cauchy 点列而不是收敛点列，因它在有理数空间中没有极限. 有理数列(1.15)的极限是无理数$\sqrt{2}$. 只有在有理数空间加进无理数，扩充成为实数空间后，点列(1.15)才成为收敛点列. 因任何一个无理数，都可以找到一个有理数点列以它为极限，所以有理数空间好像到处布满了空隙，将这些空隙(无

理数)都补进来,就可以使所有的 Cauchy 点列都有了极限点,也就都成了收敛点列.

又如在 $P_{[a,b]}$(定义在$[a,b]$上的实系数多项式的全体)中,有的多项式列 $P_n(t)$满足(1.14)式而在 $P_{[a,b]}$中没有极限,因而它们在 $P_{[a,b]}$中只是 Cauchy 点列,而不是收敛点列,实际上,它们收敛于 $P_{[a,b]}$以外的连续函数.如果我们把这些连续函数都补充进来,即将 $P_{[a,b]}$扩充为 $C_{[a,b]}$,则所有的 Cauchy 点列按距离(1.5)式都成了收敛的多项式列.

正因为在一般距离空间中,收敛点列与 Cauchy 点列不相当,于是才引入了距离空间的完备性问题.

1.1.3　距离空间的完备性

前面我们建立了距离空间中的收敛概念,并且从收敛、极限的角度说明了一般距离空间和实数空间(距离空间的特例)的差别.在实数空间中存在定理:收敛点列与 Cauchy 点列等价.也就是说,任何一个实数的 Cauchy 点列必有实数的极限.我们把实数的这种特性称为完备性.这种实数的完备性给实数带来了许多很好的性质,使人们得以在此基础上建立了一系列的极限理论.一般的距离空间(如有理数空间)就没有这种性质(有理数的 Cauchy 点列不一定有有理数的极限).这种不同决定了它们之间有很多本质上的差异,也即一般的距离空间不具有完备性.

定义 1.1.3　在距离空间 X 中,若任一 Cauchy 点列都在 X 中有极限,则称距离空间 X 是完备的.

于是跟实数空间一样,在完备的距离空间中,收敛点列与 Cauchy 点列是等价的.

因为在距离空间中,收敛是用距离来定义的,而前面已经讨论过,在同一个集合中可以定义不同的距离,因此,同一个集合可以对一种距离成为完备的距离空间,而对另一种距离却成为不完备的距离空间.

按前面的规定,未作声明时,实数空间 $\boldsymbol{R}^1$ 中的距离是按(1.1)式定义的距离.它的完备性也是指按(1.1)式的距离完备.

又如 $C_{[a,b]}$,按通常的距离

$$\rho(x,y) = \max_{a\leqslant t\leqslant b} | x(t) - y(t) |$$

为完备空间.

事实上,因 $C_{[a,b]}$中的任一 Cauchy 点列 $x_n(t)$满足

$$\rho(x_m,x_n) = \max_{a\leqslant t\leqslant b} | x_m(t) - x_n(t) | \to 0 \quad (m,n \to \infty)$$

故对一切 $t\in[a,b]$,必有

$$| x_m(t) - x_n(t) | \to 0 \quad (m,n \to \infty)$$

而根据数学分析中的定理可知,有 $x(t)\in C_{[a,b]}$,使

$$|x_n(t)-x(t)|\to 0 \quad (n\to\infty)$$

对 $t\in[a,b]$都成立,故有

$$\rho(x_n,x)\to 0 \quad (n\to\infty)$$

即 $C_{[a,b]}$对距离(1.5)式完备.通常不作说明时,$C_{[a,b]}$中的距离都是指距离(1.5)式而言.

特别地,若在 $C_{[a,b]}$中定义距离

$$\rho_1(x,y)=\left\{\int_a^b |x(t)-y(t)|^2 dt\right\}^{1/2}$$

则它是一个不完备的距离空间.

$\boldsymbol{R}^n$ 按通常的欧氏距离

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2\right)^{1/2}$$

是完备的.按这种距离收敛又称为坐标收敛.

我们在 1.1.2 节中所举的距离空间例子,按那里规定的距离是完备的距离空间.

如前所述,有理数空间是不完备的典型例子.

1.1.4 距离空间的稠密性与可分性

1. 稠密性

定义 1.1.4 设 A,B 为距离空间 X 中的子集.若对任意 $x\in A$,总存在 B 中的点列 x_n 收敛于 x,则称 B 在 A 中稠密,简称 B 在 A 中稠.

注意,在稠密的定义中,并不要求 $A\supset B$ 或 $B\supset A$,甚至 B 与 A 可以没有公共点,但要求 $\bar{B}\supset A$.意即若 B 在 A 中稠,则 A 中的任一点或者是 B 的点,或者是 B 的聚点.

如有理数集和无理数集,他们互不包含,也没有公共点,但它们互在对方中稠,因为任何一个有理数都是无理数集的聚点,反之,任何一个无理数都是有理数集中的聚点.

显然,有理数集和无理数集都是在实数中稠(按 $\boldsymbol{R}^1$ 中规定的距离).

又如 $C_{[a,b]}$中任何一个连续函数 $f(x)$,必存在 $P_{[a,b]}$中的多项式列在$[a,b]$上按

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|$$

收敛于 $f(x)$,故 $P_{[a,b]}$在 $C_{[a,b]}$中稠.

若按 $L^2_{[a,b]}$中定义的距离

$$\rho(x,y) = \left\{\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt\right\}^{1/2}$$

则 $P_{[a,b]}$, $C_{[a,b]}$都在 $L^2_{[a,b]}$中稠.

关于稠密性,还有两种等价的说法:

(1) 若 B 在 A 中稠,则对任意的 $x \in A$ 及任意的 $\varepsilon > 0$,总存在 B 中的点 y,使得

$$\rho(x,y) < \varepsilon$$

反之亦然.

(2) 若 B 在 A 中稠,则对任意的 $\delta > 0$,必有

$$\bigcup_{x \in B} \delta(x) \supset A$$

(其中 $\delta(x)$表示以 x 为中心、以 δ 为半径的小球.)反之亦然.

显然,若 A 在 B 中稠,B 在 C 中稠,则 A 在 C 中稠.

利用稠密的概念可以定义距离空间中的可分性.

2. 可分性

定义 1.1.5 距离空间 X 称为可分的,是指在 X 中存在一个稠密的可列子集.

由于定义可分空间中含有稠密的可列子集,这给研究问题带来了很多方便.当我们讨论有关可分空间的某些问题时,往往可以从空间中挑选出对那个问题最合适的一个可列子集进行分析,然后再利用稠密性推广到整个空间中去.又如可在某些可分空间中适当地引进可列的维数概念,先在有限维的子空间中讨论问题,然后再用一系列的有限维子空间去逼近原来的可分空间.

例如空间 $\boldsymbol{R}^n$ 是可分的,因为坐标为有理数的点的全体在 $\boldsymbol{R}^n$ 中构成一个可列的稠密子集.特别地,当 $n = 1$ 时,意即有理数集为实数集中一个可列的稠密子集.

又如 $C_{[a,b]}$与 $L^2_{[a,b]}$是可分的,因为$[a,b]$上以有理数为系数的多项式全体构成了它们的可列稠密子集.

1.1.5 距离空间的列紧性

实数域除了前面所说的完备性、稠密性和可分性以外,还有一个很重要的性质——列紧性,即任何有界数列必有收敛的子列.但在一般的距离空间中,不一定有此性质.下面就来讨论距离空间中具有列紧性的集合.

定义 1.1.6 设 A 是距离空间 X 的子集.如果 A 的任何点列都有子列在 X 中收敛,则称 A 是列紧集.若 X 本身是列紧的,则称 X 为列紧空间.

特别地,列紧集若是闭集,则称为紧集.

定义 1.1.7 设 A,B 为距离空间 X 中的点集.如果存在 $\varepsilon>0$,使得以 B 中每一点为中心的 ε-开球 $O(x,\varepsilon)$ 的全体覆盖了 A,即

$$\bigcup_{x\in B}O(x,\varepsilon)\supset A$$

则称 B 是 A 的一个 ε-网.

定义 1.1.8 设 A 为距离空间 X 的子集,如对任意给定的 $\varepsilon>0$,A 中存在有限的 ε-网,即存在 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 使

$$\bigcup_{i=1}^{n}O(x_i,\varepsilon)\supset A$$

其中 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 依赖于 ε,则称 A 是完全有界集.

显然,完全有界集必为有界集.

可以证明,凡完全有界集都可分.

定理 1.1.4 若 A 是距离空间 X 中的列紧集,则 A 必为完全有界集;反之,当 X 是完备的距离空间时,若 A 是完全有界集,则 A 必是列紧集.

此定理说明,在完备的距离空间中,列紧集与完全有界集是等价的.但在非完备的距离空间中,集合的列紧性与完全有界性并不相当,列紧集一定完全有界,完全有界集不一定列紧.

定理 1.1.5 有限个列紧集的并仍是列紧集.

定理 1.1.6 空集是紧集,任何有限集也是紧集.

定理 1.1.7 若 f 是定义于紧集上的连续函数,则 f 的值域也是紧集.

定理 1.1.8 若 f 是定义于紧集上的连续函数,则 f 必有界,且可达到其上、下确界.

(上述定理的证明从略.)

1.1.6 距离空间上的连续映射

前面我们研究了距离空间的一些基本概念与性质.但有时常常还要遇到两个距离空间的关系问题,这就需要讨论映射及映射的连续性等概念.

定义 1.1.9 设 X,X_1 为距离空间,如果对每一个 $x\in X$,都有 X_1 的某一个点 y 按一定规律与之对应,则称这个对应关系是一个 X 到 X_1 的映射.记为

$$y = Tx$$

其中 T 为对应关系(即映射).

又若对每一个给定的 $x_0\in X$,映射 T 满足下面的性质:对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当

$$\rho(x,x_0)<\delta$$

时,有

$$\rho(Tx, Tx_0) < \varepsilon$$

则称映射 T 在 x_0 连续.如果 T 在 X 中的每一个点都连续,则称 T 为 X 到 X_1 的连续映射.

例如,设 X 是一个以 ρ 为距离的距离空间,$x_0 \in X$ 是一个定点,令

$$Tx = \rho(x, x_0)$$

则 T 就是一个由 X 到实数空间的连续映射.

事实上,对于任意的 $x, y \in X$,由三角不等式可得

$$|T(y) - T(x)| = |\rho(y, x_0) - \rho(x, x_0)| \leqslant \rho(y, x)$$

对任给的 $\varepsilon > 0$,取 $\delta = \varepsilon$,则当 $\rho(y, x) < \delta$ 时,有

$$|T(y) - T(x)| \leqslant \rho(y, x) < \varepsilon$$

成立.

通常的连续函数就是由实数空间到实数空间的连续映射.

定理 1.1.9 由距离空间 X 到距离空间 X_1 中的映射 T 连续的充要条件为:对于任一 $x \in X$,当 X 中的 x_n 收敛于 x 时,相应地,在 X_1 中有 Tx_n 收敛于 Tx.

证明 先证必要性.设 T 为 X 到 X_1 的连续映射,由定义知,对任给的 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,使对任意的 $x \in X$,当 $y \in X$ 满足

$$\rho(y, x) < \delta$$

时,相应地就有

$$\rho(Ty, Tx) < \varepsilon$$

于是,当 X 中有 $x_n \to x$ 时,对上述给定的 $\delta > 0$,存在 N,当 $n > N$,有

$$\rho(x_n, x) < \delta$$

此时,相应地有

$$\rho(Tx_n, Tx) < \varepsilon$$

也即

$$Tx_n \to Tx \qquad (n \to \infty)$$

再证充分性(用反证法).设对 X 中的每点 x 都有当 $x_n \to x$ 时,相应地,在 X_1 中有 $Tx_n \to Tx$,而 T 在 X 中某点 x_0 不连续,则必存在某个正数 ε_0,使得对于每个 $\frac{1}{n}(n = 1, 2, \cdots)$,即使有

$$\rho(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$$

但仍然有

$$\rho(Tx_n, Tx_0) \geqslant \varepsilon_0$$

与假设矛盾,定理得证.

连续映射关于紧性有两条性质:

1) 若连续映射定义于距离空间中的紧集,则它的像集也是紧集.

2) 若连续映射 T 定义于距离空间中的紧集,而 T 的像集在实数空间中,则 Tx 可以达到最大值与最小值.

由此可见,在距离空间中,定义在紧集上的连续映射,它的基本性质类似于数学分析中定义在闭区间上的连续函数.

1.2 赋范线性空间

1.2.1 定义和例

1. 线性空间的定义

定义 1.2.1 集合 E 称为实(或复)线性空间,如果:

(1) 在 E 内定义了"+"法运算,使对任意的 $x, y \in E$,都有

(i) $x+y=y+x$ 且仍在 E 中, (交换律)

(ii) $x+(y+z)=(x+y)+z$, (结合律)

(iii) 存在"零元素"$0 \in E$,有 $x+0=x$,

(iv) 存在"逆元素"$-x \in E$,有 $x+(-x)=0$;

(2) 定义了 E 中元素与实(复)数域 K 中的数之间的"数乘"运算,使对任意的 $x, y \in E, \alpha, \beta \in K$,都有

(i) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$ 且仍在 E 中,

(ii) $1 \cdot x = x, 0 \cdot x = 0$,

(iii) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$,

(iv) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

这个线性空间的定义,读者在线性代数中就已熟悉.现在我们在线性空间的基础上来定义范数,从而引出赋范线性空间.

2. 赋范线性空间的定义

定义 1.2.2 设 E 为实(复)线性空间,若对任意的 $x \in E$,都有一个非负的实数 $\|x\|$ 与之对应,且满足

(i) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$;

(ii) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$ $(\alpha \in K)$; (齐性)

(iii) $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$ $((x,y) \in E)$. (三角不等式)