21世纪高等职业教育主干课程辅导丛书

高等数学知识点与典型例题解析

张吉慧 主审
汪志宏 吴建国 主编
刘志高 倪志强 副主编

注重基础，答疑解惑
精选例题，分析透彻

清华大学出版社

21

高等数学知识点与典型例题解析

21 世纪高等职业教育主干课程辅导丛书

高等数学知识点与典型例题解析

张吉慧　主　审

汪志宏　吴建国　主　编

刘志高　倪志强　副主编

清华大学出版社

北　京

内容简介

本书参照教育部最新制定的高等职业教育数学基础课程教学基本要求和专升本考试基本要求及教学大纲编写而成。全书分为 11 章，包括函数的极限与连续、函数的导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、无穷级数。每章 4 个板块：基本知识点、典型题分析、同步练习题和同步练习题参考答案。本书通过对知识点的全面概括和对典型例题的分析解答，指导读者课程学习，帮助读者理解基本概念和理论，开拓解题思路，提高分析问题和解决问题的能力。另外，本书附有期中、期末和专升本试题及参考答案。

本书内容深浅适宜，知识点剖析透彻，典型例题分析详尽，可作为读者学习高等数学的辅导用书，也可作为相应教师用作高等数学教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学知识点与典型例题解析/张吉慧主审；汪志宏，吴建国主编；刘志高，倪志强副主编；
—北京：清华大学出版社，2005.6
(21 世纪高等职业教育主干课程辅导丛书)
ISBN 7-302-11084-0

Ⅰ. 高…　Ⅱ.①张…　②汪…　③吴…　④刘…　⑤倪…　Ⅲ.高等数学—高等学校：技术学校—教学参考资料　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 050984 号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969
组稿编辑：章忆文
文稿编辑：桑任松
封面设计：陈刘源
排版人员：房利萍
印 刷 者：北京国马印刷厂
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：185×260　**印张**：15.5　**字数**：364 千字
版　　次：2005 年 6 月第 1 版　2005 年 6 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-302-11084-0/O・463
印　　数：1～5000
定　　价：21.00 元

丛 书 序

随着高等教育大众化的推进，高等职业教育在我国的高等教育领域内已占有半壁江山。与高等职业教育相配套的教材建设也迅猛发展，各大出版社均推出一套或几套高等职业教育教材。相比之下，高等职业教育类的辅导丛书并不多见。而在实际教学过程中，学生们常常反映没有适合的参考书。为了辅导广大应用型本科类、高职专科类学生更好地学好相关课程，清华大学出版社策划、组织编写了《21 世纪高等职业教育主干课程辅导丛书》。

本丛书作为学生正规教材的辅导用书，对课程的各方面知识不作细致复述，而是突出基本理论、基本概念、基本方法，配以典型例题解析，有助于读者理解和掌握本课程的主要内容，并且每章都附有对应的同步练习题和解答(或给出答案与提示)，附录中还提供了几套试题及其参考答案。

1. 丛书书目

本套丛书首批出版 6 本，书目如下：

(1) C 语言知识点与典型例题解析

(2) 数据结构知识点与典型例题解析

(3) 操作系统知识点与典型例题解析

(4) 高等数学知识点与典型例题解析

(5) 线性代数知识点与典型例题解析

(6) 概率论与数理统计知识点与典型例题解析

2. 特色提示

(1) 本丛书针对应用型本科类、高职专科类课时少的实际情况，定位于：讲清课本基本知识点，教会学生分析典型题，帮助理解、巩固所学知识。

(2) 丛书编写以“知识点讲解、典型题分析”为主线贯穿，以“辅导与训练并重，习题与分析结合”为原则。

(3) 注重基础，答疑解惑。突出“双基”(基础知识、基本能力)，对重点、难点、易混淆和易忽略的内容进行诠释与剖析，加强培养读者基本功，帮助读者掌握该课程的核心知识。

(4) 以典型题分析带动能力培养。本丛书以典型题目分析为突破口，强化各知识点的运用，培养读者应用能力。精心选取的例题具有典型性和针对性。所有例题均给出了详尽的分析，大部分例题还给出了点评，便于读者掌握完整的解题思路，以达举一反三、触类旁通之功效。

(5) 丛书基本按照正规教材顺序安排章节。每节包括四个板块，即基本知识点、典型题分析、同步练习题、同步练习题参考答案。各板块内容安排为：

- 基本知识点：列出本章的基本理论、基本概念、基本方法，便于学生记忆、复习。
- 典型题分析：精选出基本题与经典题进行解析，增强学生解题能力。
- 同步练习题：设计出一部分习题，便于学生自测与检查。
- 同步练习题参考解答：给出习题的解答(或答案)，便于考生复习与检查。

(6) 附录中提供一套期中、期末考试试卷以及专升本考试样卷，所有试卷均给出解答，方便读者自学使用。

3. 作者与读者

丛书聘请具有较高理论水平和丰富教学经验的一线骨干教师编写。他们长期从事相关课程的教学、命题和研究等工作，积累了丰富的经验，对相应课程有较深的体会与独到的见解，本丛书凝聚了他们多年的教学经验和心血。

本套丛书特别适合参加课程学习、考试的学生读者群阅读，同时可供参加专升本的考生参考使用。

4. 交流与致谢

读者的进步是我们的心愿。如果发现书中有任何疑惑之处，或有建议和意见，请与我们交流。联系信箱：Reader_Service@126.com。

在此，对丛书所选用的参考文献的著作者，及丛书所精选的习题、试题的命题老师表示真诚的感谢。感谢为本丛书出版提供帮助的各界人士。

丛书编委会

前　　言

高等职业教育是 21 世纪高等教育的重要组成部分。为适应我国高等职业教育发展需要，我们参照教育部最新制定的高等职业教育数学基础课程教学基本要求和专升本考试基本要求及教学大纲，结合编者多年从事高等数学教学经验，编写了本书。

本书有以下特色：

1．基本知识点全面、重点内容解析清楚、易懂，特别注意前后知识点的连贯性，突出读者容易混淆和忽略的问题。

2．注重解题思路及解题技巧的训练。本书对典型例题的解题思路及技巧进行重点分析，对每一类型题目进行总结与点评，注意一题多种解法，举一反三，有利于学习者扩大知识面和增强解决问题的能力，更全面地掌握所学知识。

3．着眼于学习者的实际需要，同步练习题给出详细的解答，方便学习者更快更好地了解自己学习情况及解决解题中遇到的问题。为方便学习者检测自己的学习及复习成果，本书最后还给出了期中考试题和期末考试题以及专升本试题。

4．本书收集的例题、习题均是选自近几年高等职业教育的通用教材和流行辅导书中的例题、习题以及最新专升本试题，时效性强。

本书紧密围绕高等职业教育的培养目标和特点，着重对高等数学的基本知识点进行全面的解释说明，重点讲述和分析典型题的解题方法及技巧，以培养读者解题能力，该书是学习高等数学的辅导用书，也可作为教师的教学参考书。

本书由张吉慧教授主审，汪志宏、吴建国主编，刘志高、倪志强副主编。全书由汪志宏统稿汇总而成。另外，参与本书工作的还有石雪梅、田玉敏、杨明、杨萍、张凌云、谢波、王国全、赵传申、何光明、陈智等，在此一并表示感谢。

由于水平有限，书中难免出现疏漏及不妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

目 录

第 1 章　函数的极限与连续

要点导读：

- 理解函数的概念，了解函数的二要素，会求函数的定义域及函数值.
- 了解函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性.
- 熟练掌握基本初等函数的解析表达式、定义域、主要性质和图形.
- 熟练掌握数列极限的计算.
- 熟练掌握函数极限的计算方法：包括极限的四则运算法则，消去极限式中的不定因子，利用无穷小量的运算性质，有理化根式，两个重要极限，函数的连续性等方法.
- 理解无穷小量的概念，了解无穷小量的运算性质及其与无穷大量的关系，知道无穷小量的比较.
- 会判断函数在一点的连续性，会求函数的连续区间，了解函数间断点的概念，会对函数的间断点进行分类.
- 理解初等函数在其定义域内连续的结论，知道闭区间上连续函数的几个结论.

1.1　集合函数与数列极限

1.1.1　基本知识点

1.1.1.1　集合

1. 集合的概念

(1) 集合：集合是指具有某种特定性质的事物的总体. 用 A，B，M 等表示.

(2) 元素：组成集合的事物称为集合的元素. a 是集合 M 的元素表示为 $a \in M$.

(3) 集合的表示有两种方法.

① 列举法：把集合的全体元素一一列举出来. 例如 $A=\{a, b, c, d, e, f, g\}$.

② 描述法：若集合 M 是由元素具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成，则 M 可表示为 $M=\{x \mid x\text{ 具有性质 }P\}$. 例如方程 $|x-1|<1$ 的解集 $M=\{x \mid 0<x<2\}$，单位圆周用集合表示为 $M=\{(x, y) \mid x，y\text{ 为实数}，x^2+y^2=1\}$.

(4) 常见的几个数集：自然数集 $\mathbf{N}$，$\mathbf{N}=\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$；整数集 $\mathbf{Z}$；有理数集 $\mathbf{Q}$；实数集 $\mathbf{R}$.

(5) 子集：若 $x \in A$，则必有 $x \in B$，则称 A 是 B 的子集，记为 $A \subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B \supset A$.

如果集合 A 与集合 B 互为子集，$A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$. 若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subsetneq B$. 例如，$\mathrm{N}\subsetneq\mathrm{Z}\subsetneq\mathrm{Q}\subsetneq\mathrm{R}$.

(6) 不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$. 规定空集是任何集合的子集.

2. 集合的运算

(1) 设 A、B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的并集(简称并)，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

(2) 设 A、B 是两个集合，由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的交集(简称交)，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$.

(3) 设 A、B 是两个集合，由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集(简称差)，记作 $A\backslash B$，即 $A\backslash B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$.

(4) 如果我们研究某个问题限定在一个大的集合 I 中进行，所研究的其他集合 A 都是 I 的子集. 称集合 I 为全集. 称 $I\backslash A$ 为 A 的补集，记作 A^C.

(5) 直积(笛卡儿乘积):

设 A、B 是任意两个集合，在集合 A 中任意取一个元素 x，在集合 B 中任意取一个元素 y，组成一个有序对(x, y)，把这样的有序对作为新元素，它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的直积，记为 $A\times B$，即 $A\times B=\{(x, y)|x\in A$ 且 $y\in B\}$. 例如，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x, y)|\ x\in\mathbf{R}$ 且 $y\in\mathbf{R}\}$ 即为 xOy 面上全体点的集合，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

3. 集合运算的法则

设 A、B、C 为任意三个集合，则

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4) 对偶律 $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$，$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

4. 区间和邻域

(1) 有限区间：设 $a<b$，称数集$\{x|a<x<b\}$为开区间，记为(a, b)，即$(a, b)=\{x|a<x<b\}$.

$[a, b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$称为闭区间，$[a, b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$、$(a, b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$称为半开区间.

其中 a 和 b 称为区间≤(a, b)、$[a, b]$、$[a, b]$、(a, b)的端点，$b-a$ 称为区间的长度.

(2) 无限区间：$[a, +\infty]=\{x\mid a\leqslant x\}$，$(-\infty, b)=\{x\mid x<b\}$，$(-\infty, +\infty)=\{x\mid |x|<+\infty\}$.

(3) 邻域：以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$.

设 δ 是一正数，则称开区间$(a-\delta, a+\delta)$为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a, \delta)$，即

$$U(a, \delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

其中点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

点 a 的去心邻域 $\mathring{U}(a, \delta)$：$\mathring{U}(a, \delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$

1.1.1.2 函数

1. 函数的概念

(1) 函数的定义：设有实数集 D 及两个变量 x 和 y，对每个 $x\in D$，如果变量 y 按某

种对应法则 f，总有确定的 y 值与之对应，则称 y 为 x 的定义在 D 上的函数，通常简记为 $y=f(x)$，$x\in D$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$. 当变量 x 取遍实数集 D 的每个数值时，对应的函数值全体组成的集合称为函数的值域.

函数的定义域通常有两种情形：

① 对有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义确定. 如在匀加速直线运动中，设物体运动的时间为 t，位移为 s，则 s 与 t 之间的函数关系是 $s=\frac{1}{2}at^2$，这个函数的定义域一般就是 $\{t\mid t\geqslant 0\}$.

② 对抽象地用算式表达的函数，也就是高等数学里常用的函数，通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为函数的自然定义域. 在这种约定之下，一般的用算式表达的函数可用"$y=f(x)$"表达. 自然定义域就是定义提到的定义域. 如函数 $y=\frac{1}{x}$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$. 自然定义域简称定义域.

(2) 注意事项如下：

① 记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的，前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而后者表示与自变量 x 对应的函数值. 但为了叙述方便，习惯上常用记号"$y=f(x)$，$x\in D$"来表示定义在 D 上的函数，这时应理解为由它所确定的函数 f.

② 函数的记号可以是任意的英文或希腊字母，如 f, g, h, φ 等.

(3) 构成函数的两要素：构成函数的要素是定义域 D_f 及对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

(4) 函数的表示：函数的主要表示方法有三种，即表格法、图形法、解析法(公式法).

坐标平面上的点集 $\{P(x,y)|y=f(x), x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的图形. 其中的 R_f 表示函数 $y=f(x)$ 的值域.

(5) 分段函数：在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数称为分段函数. 如符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$ 取整函数 $y=[x]$ 等.

2. 函数的几种特性

(1) 函数的有界性：如果存在正数 M，使对任一 $x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 其图形特点是，函数 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间. 如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界. 函数 $f(x)$ 无界，就是说对任何 M，总存在 $x_1\in X$，使 $|f(x)|>M$.

注意： 必须说明函数 $f(x)$ 是"在数集 X 上"是有界还是无界；若单纯说函数有界或无界，则指的是函数在它的定义域内有界还是无界.

(2) 函数的单调性：设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

(3) 函数的奇偶性：设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称(即若$x\in D$，则$-x\in D$). 如果对于任一$x\in D$，有$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数；如果对于任一$x\in D$，有$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为奇函数.

偶函数的图形关于y轴对称，奇函数的图形关于原点对称，

(4) 函数的周期性：设函数$f(x)$的定义域为D. 如果存在一个正数l，使得对于任一$x\in D$有$(x\pm l)\in D$，且$f(x+l)=f(x)$，则称$f(x)$为周期函数，l称为$f(x)$的周期.

3. *反函数与复合函数*

(1) 反函数的定义：设函数$y=f(x)$的定义域为D_f，值域为$f(D)$. 对每个$y\in f(D)$，都有$x\in D$，使得$f(x)=y$，于是有$f^{-1}(y)=x$，称其为函数$y=f(x)$的反函数. 按习惯一般地，$y=f(x)$，$x\in D$的反函数通常记成$y=f^{-1}(x)$，$x\in f(D)$.

函数$y=f(x)$和它的反函数$y=f^{-1}(x)$的图形关于直线$y=x$是对称的.

(2) 求反函数的步骤如下：

① 从$y=f(x)$解出$x=f^{-1}(y)$；

② 于是函数$y=f(x)$的反函数为$y=f^{-1}(x)$；

③ 指出反函数$y=f^{-1}(x)$的定义域，即原函数的值域$f(D)$. $y=f(x)$，$x\in D$的反函数就是$x=f^{-1}(y)$，$x\in f(D)$.

(3) 复合函数的定义：设函数$y=f(u)$的定义域为D_1，函数$u=g(x)$在D上有定义且$g(D)\subset D_1$，则由下式确定的函数$y=f[g(x)]$，$x\in D$称为由函数$u=g(x)$和函数$y=f(u)$构成的复合函数，它的定义域为D，变量u称为中间变量. 函数g与函数f构成的复合函数通常记为$f\circ g$，即$(f\circ g)(x)=f[g(x)]$.

注意： *g与f构成复合函数$f\circ g$的条件是函数g在D上的值域$g(D)$必须含在f的定义域D_f内，即$g(D)\subset D_f$. 否则，不能构成复合函数.*

类似有多个函数的复合.

4. *函数的运算*

(1) 函数的四则运算：设函数$f(x)$，$g(x)$的定义域依次为D_1，D_2，D为D_1，D_2的交集，则可以定义这两个函数的四则运算：

和(差)$f\pm g$ ：$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$，$x\in D$；

积$f\cdot g$ ：$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$，$x\in D$；

商$\dfrac{f}{g}$：$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，$x\in\{x\,|\,x\in D, g(x)\neq 0\}$.

(2) 函数的复合运算：设函数$y=f(u)$的定义域为D_1，函数$u=g(x)$在D上有定义且$g(D)\subset D_1$，则$(f\circ g)(x)=f[g(x)]$.

5. *初等函数*

(1) 基本初等函数有以下几种：

幂函数：$y=x^{\mu}$ ($\mu\in\mathrm{R}$是常数)；

指数函数：$y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$；对数函数：$y=\log_a x\ (a>0$ 且 $a\neq 1)$；

三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\text{arccot}\, x$.

(2) 初等函数的定义：由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

(3) 双曲函数有以下几种形式：

双曲正弦：$\text{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；双曲余弦：$\text{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；双曲正切：$\text{th}x=\dfrac{\text{sh}x}{\text{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

(4) 反双曲函数有以下几种形式：

反双曲正弦：$y=\text{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；反双曲余弦：$y=\text{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$；反双曲正切：$y=\text{arth}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

1.1.1.3　数列的极限

1. 数列的概念

(1) 数列的定义：按照一定的顺序排成的一列数，称之为数列，可以记为 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$ 或 $\{x_n\}$，其中 x_n 称为数列的通项.

(2) 有界数列：存在 $M>0$，使 $|x_n|\leqslant M$ 对所有的 n 都成立，称数列 $\{x_n\}$ 为有界数列. 如数列 $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$，$\{(-1)^n\}$ 都是有界数列；数列 $\{n\}$，$\{(-1)^n n^2\}$ 则为无界数列.

注意： 有界数列的等价定义：存在常数 a, b，使得 $a\leqslant x_n\leqslant b$，　n　N. 其中 a 称为下界，b 称为上界.

(3) 单调数列：单调增加数列 $x_1<x_2<x_3<\cdots<x_n<\cdots$ 和单调减少数列 $x_1>x_2>x_3>\cdots>x_n>\cdots$ 统称单调数列.

2. 数列的极限

对于数列 $\{x_n\}$，当 n 无限增大时，x_n 充分接近于某一常数 a，则称数列 $\{x_n\}$ 收敛，并且以 a 为极限，记作：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $x_n\to a,\ (n\to\infty)$.

3. 收敛数列的性质

(1) (惟一性)若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则其极限是惟一的.

(2) (有界性)收敛的数列一定是有界的数列.

(3) (数列极限的夹逼准则)设有数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 满足 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，以 a 为极限，记作：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(4) 如果数列收敛于 a，则其任意子列一定收敛且必收敛于 a.

注意： (4)表明，如果某数列的两个子列收敛于不同的值，则此数列一定发散. 如数列 $\{(-1)^n\}$，$x_{2n+1}=-1\to -1$，$x_{2n}=1\to 1$，故此数列发散.

(5) 单调有界数列必有极限.

4. 收敛数列的运算法则

设有数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，那么

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=A\pm B$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=A\cdot B$.

(3) 当$y_n\neq0\ (n=1, 2, \cdots)$且$B\neq0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{A}{B}$.

1.1.2 典型题分析

【例 1】已知集合$A=\{x\,|\,(x-1)(x-2)>0\}$，$B=\{x\,|\,\dfrac{x-2}{x-3}<0\}$，求集合$AB$.

分析：先利用区间表达集合A和B，再求集合AB.

解答：集合A用区间表示为$(-\infty, 1)\cup(2, +\infty)$，集合$B$用区间表示为$(2, 3)$，所以集合$AB$用区间表示为$(2, 3)$.

点评：注意当$a<b$时，不等式$(x-a)(x-b)<0$，$\dfrac{x-a}{x-b}<0$与$\dfrac{x-b}{x-a}<0$的解集均为(a, b)；不等式$(x-a)(x-b)>0$，$\dfrac{x-a}{x-b}>0$与$\dfrac{x-b}{x-a}>0$的解集为$(-\infty, a)\cup(b, +\infty)$；当$a>0$时，不等式$|x|<a$的解集为$(-a, a)$，等式$|x|>a$的解集为$(-\infty, -a)\cup(a, +\infty)$.

【例 2】函数$f(x)=\dfrac{1}{\ln(x-2)}+\sqrt{5-x}$的定义域是______.

分析：函数的自然定义域是使得函数有意义的一切实数组成的集合.

解答：对函数的第一项，要求$x-2>0$且$\ln(x-2)\neq0$，即$x>2$且$x\neq3$；对函数的第二项，要求$5-x\geqslant0$，即$x\leqslant5$. 取公共部分，得函数定义域为$(2, 3)\cup(3, 5]$.

点评：初等函数的定义域是组成初等函数的所有基本初等函数的定义域的交集.

【例 3】确定函数$f(x)=\begin{cases}x, & x>1,\\ 1-x, & |x|\leqslant1\end{cases}$的定义域.

分析：函数的自然定义域是使得函数有意义的一切实数组成的集合.

解答：$|x|\leqslant1$就是区间$[-1, 1]$，它同区间$(1, +\infty)$的并为$[-1, +\infty)$，故$f(x)$的定义域是$[-1, +\infty)$.

点评：分段函数的定义域是各段函数定义域的并集.

【例 4】下列各对函数中，______是相同的.

A. $f(x)=\sqrt{x^2}$, $g(x)=x$　　B. $f(x)=\ln x^2$，$g(x)=2\ln x$

C. $f(x)=\ln x^3$，$g(x)=3\ln x$　　D. $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$，$g(x)=x$

分析：如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

解答：A 中两函数的对应关系不同，$\sqrt{x^2}=|x|\neq x$，B、D 两选项中的每对函数的定义域都不同，所以选项 A、B、D 都不是正确的选项；而选项 C 中的函数定义域相等，且对应关系相同，故选项 C 正确.

【例 5】已知 $f(x)=x^2$，$g(x)=\mathrm{e}^x$，求 $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$.

分析：两函数的定义域均为 $(-\infty,\ +\infty)$，$f(x)=x^2$ 的值域为 $[0,\ +\infty)$，$g(x)=\mathrm{e}^x$ 的值域为 $(0,\ +\infty)$，$[0,\ +\infty)$ 与 $(0,\ +\infty)$ 都是 $(-\infty,\ +\infty)$ 的子集，所以可以进行复合运算.

解答：将 $g(x)=\mathrm{e}^x$ 直接代入 $f(x)=x^2$，得 $f(g(x))=(\mathrm{e}^x)^2=\mathrm{e}^{2x}$.

将 $f(x)=x^2$ 直接代入 $g(x)=\mathrm{e}^x$，得 $g(f(x))=\mathrm{e}^{x^2}$

【例 6】设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\mathrm{e}^x$，求 $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$.

分析：两函数的定义域均为 $(-\infty,\ +\infty)$，$f(x)$ 的值域为 $\{x\,|\,x=-1,\ 0,\ 1\}$，$g(x)=\mathrm{e}^x$ 的值域为 $(0,\ +\infty)$，$\{x\,|\,x=-1,\ 0,\ 1\}1$ 与 $(0,\ +\infty)$ 都是 $(-\infty,\ +\infty)$ 的子集，所以可以进行复合运算.

解答：将 $f(x)$ 直接代入 $g(x)=\mathrm{e}^x$，得 $g(f(x))=\mathrm{e}^{f(x)}=\begin{cases}\mathrm{e}, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ \mathrm{e}^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$

将 $g(x)=\mathrm{e}^x$ 直接代入 $f(x)$，得 $f(g(x))=\begin{cases}1, & |\mathrm{e}^x|<1,\\ 0, & |\mathrm{e}^x|=1,\\ -1, & |\mathrm{e}^x|>1.\end{cases}$ 即

$$f(g(x))=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0.\end{cases}$$

点评：进行函数的复合运算应注意以下两点：

首先 $f\circ g$ 是将函数 $g(x)$ 代入 $f(x)$ 的自变量，最后整理出结果，对于分段函数也是如此.

其次 g 与 f 构成复合函数 $f\circ g$ 的条件是函数 g 在 D 上的值域 $g(D)$ 必须含在 f 的定义域 D_f 内，即 $g(D)\subset D_f$. 否则，不能构成复合函数.

【例 7】已知 $y=ax+b$ 的反函数还是 $y=ax+b$，求该函数.

分析：先用 y 来表达 x，然后将 y 换为 x，x 换为 y.

解答：$y=ax+b$，所以 $x=\dfrac{y-b}{a}=\dfrac{y}{a}-\dfrac{b}{a}$，所以其反函数为 $y=\dfrac{x}{a}-\dfrac{b}{a}$，由题意，有 $a=\dfrac{1}{a},\ b=-\dfrac{b}{a}$，所以 $a=1,\ b=0$ 或 $a=-1,\ b$ 为任意实数.

【例 8】求函数 $y=\begin{cases}x+1, & x<1,\\ x^2+1, & x\geqslant 1\end{cases}$ 的反函数.

分析：先在每段上用 y 来表达 x，然后将 y 换为 x，x 换为 y.

解答：当 $x<1$ 时，$y=x+1$，则 $x=y-1$，$y<2$，所以该段的反函数为 $y=x-1$，$x<2$.