全国教育科学“十五”规划国家重点课题
《教育与发展—创新人才的整合研究》成果

SHUXUE

高中数学
双基效率手册

基础知识+基本能力+提高效率+考点指导

（各版教材通用）

考点知识建构图

- 集合与简易逻辑
- 函数
- 数列
- 三角函数
- 平面向量
- 不等式
- 直线和圆的方程
- 圆锥曲线方程
- 直线、平面、简单几何体
- 排列、组合与概率
- 概率与统计
- 极限
- 导数
- 数系的扩充—复数

- 精析基础知识
  - 基础知识梳理
  - 重点与难点辨析
- 建构数学思想
  - 数学思想方法
  - 规律方法技巧
  - 常见思路误区
  - 综合问题探究
  - 考点分析
  - 思路梳理
  - 思路拓展创新
- 指导高考专题
  - 高考命题规律
  - 高考真题探索
- 公式定理

双基书业

北京工业大学出版社

全国教育科学“十五”规划国家重点课题
《教育与发展——创新人才的整合研究》的成果

高中数学

双基效率手册

(各版教材通用)

名誉主编：林崇德
执行主编：张　理
本册主编：王　宁、王海红、史秀群、
向　文、刘　波、刘莉梅、
李　伟、徐　蓉、高姗姗、
路明明

北京工业大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高中数学双基效率手册／王宁等主编. —北京：北京工业大学出版社，2005.7

(中学创新教育双基效率手册丛书)

ISBN 7-5639-1542-7

Ⅰ.高... Ⅱ.王... Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 062310 号

高中数学双基效率手册

本册主编 王 宁 王海红等

*

北京工业大学出版社出版发行

邮编:100022 电话:(010)67392308

各地新华书店经销

三河市世纪兴源印刷有限公司

*

2005 年 7 月第 1 版 2005 年 7 月第 1 次印刷

850mm×1168mm 32 开本 22 印张 450 千字

*

ISBN 7-5639-1542-7/G.778

定价:24.80 元

序

《教育创新与发展——创新人才的整合研究》是国家级教育科学研究重大项目。这个项目旨在全面深入地开展创新教育，培养高素质的创新人才，从实际操作的层面来讲，所有科研的理论最终要凝聚和落实到课程体系和教材内容上。由张理同志主编的**《中学创新教育双基效率手册》**就是本课题在这方面的重要成果之一。它的特点是：

1. **提升能力为主**。迁移和拓展是创新人才能力的重要标志之一。分析问题和解决问题的能力，是创新人才的基础能力之一，这些能力的提高是学习者***梦寐以求要获得的"诀窍"***。这部书较好地解决了这个问题，通过对中学各学科基础知识的全面梳理，编织成网，再提炼上升到***建构学科思想***这一高度，使学生掌握学科中最本质的东西，从而大幅度地提高迁移和拓展的能力，这种明确的编辑思想在同类图书中应当是先进的。

2. **以学生为本**。好学生的知识在脑海中一定是条分缕析的。这是他们通过长期艰苦的强脑力劳动取得的。***怎样使这种有条理的知识转移到一般学生的脑海中呢***？这套书是下了些功夫的。编者在单科结构上，精心设置了层次分明的版块结构，如：基础知识梳理，重点难点辨析，学科思想方法，常见思路误区，综合问题探究，思维拓展创新，中、高考专题指导等。将学习中的***规律技巧融入版块设计***中，优化思维结构，使学生爱学、好学、乐学。达到学习的较高境界。

3. **紧密贴近评价**。创新教育并不拒绝考试，因为考试是对学习结果的一种评价。在教育资源相对匮乏的现状下，以选拔为目的的中、高考是必要的，但是，***中、高考的面貌已经显现出令人欣慰的变化***，以近几年的中、高考试题及今年的考试说明可以看出，对偏、怪、窄和技巧性很强的题已不做要求，对基础知识、基本能力的要求放在了首要位置，新题型不断涌现，考查重点直指迁移、拓展、创新等能力层面。以往的题海战术、死记范例、设立模型化等应试手段不再灵光了，***这种变化却与本丛书的编辑思想不谋而合***。所谓贴近评价是指在观念上与考试要求相一致，这是从根本上的贴近。

4. **专家队伍强大**。本书是在课题专家组的指导下完成的，这些专家都是***国内教育科学研究方面的佼佼者***，其先进的教育理念，丰富的实践经验，深厚的学术素养，全部融入本书，为本书奠定了坚实的基础。

这套丛书的特点很多，这些特点来自主编张理同志带领一支专家学者队伍的辛勤劳动。当然，因编写时间仓促，丛书难免有这样或那样的不足，我相信，广大读者会喜欢它，并与作者一起探讨丛书修正的方案。是为序。

林崇德

2005 年 6 月

前　言

基础知识与基本能力相辅相成，合称双基。在题海战术、模型化、偏难怪窄、死记硬背等急功近利的应试手段盛行且屡有收获时，双基教育被淡化了。其严重的后果是人才***畸形化***，***高分低能***，***素质低下***。为扭转这种局面，国家教育考试部门作出了巨大努力，中、高考面貌已经显露出重大变化，对基础知识与基本能力的考查重点又放在了首要位置。以2004年北京数学卷为例，“创新意识与实践能力”分值高达54分，占总分的三分之一强，高考指挥棒直指能力培养。

但形势是严重的，从考试结果看，在五大版块中，这部分分值最高，通过率却最低，平均分仅为16、26分。开展创新教育，培养创新人才已到了刻不容缓的地步。于是有了国家教育科学“十五”规划重大课题攻关项目《教育与发展——创新人才的整合研究》，于是有了这套丛书***《中学创新教育双基效率手册》***。

迁移与拓展：“用学过的知识或即刻学到的知识解决从未见过的新问题”，是能力的高层次体现，要想达到这一目标，必须掌握学习中最本质的东西，那就是学科思想的建构，它是从知识到能力的桥梁，也是万千学子的追求。

提炼学科知识、建构学科思想、提高能力水平、启迪学生智慧、开发学生潜能、获得成功体验，这就是本丛书的最大特点。这种明确的编辑思想是在国内一流专家的科研成果基础上提出的，其先进性与实用性在同类图书中占有明显的优势。

这套丛书的另一大特点是不设练习题，所有习题全部配有精细讲解。从“考点分析”到“思路梳理”到“答案解析”一路梳理下来，对每一类题集中讲解，重在剖析其规律性的东西，通过这种梳理帮助学生快速建构学科思想，使知识***条理化***、***系统化***、***逻辑化***、***灵活化***。从而达到举一反三，运用自如的效果。同时，针对学生易混淆的地方，专门设立了“常见思路误区”版块，从反面警示学习者，使其在思想建构过程中少走弯路，加快学习速度，提高学习效率。

考试是一个不容回避的问题，***素质教育并不拒绝考试***。关键是考什么、怎么考，以及如何备考。为此，本丛书专门设立了“中、高考专题指导”版块，对各个知识点、能力点进行细致的分析讲解，对其趋势走向、命题规律细分详解，以使学习者准确把握，高屋建瓴，游刃有余。

厌学是一个越来越严重的问题，其很大程度上是学不得法，导致学习者不能在学习过程中获得成功的体验，长期的负反馈极易使人丧失信心，终于厌学。一套好的、科学性很强的辅导书，会对这种局面有所改善。本丛书有意识地在这方面作了些工作，从版块设计到内部结构，习题选择到分析讲解，以人为本，精心搭建了一个良好的平台，使学习者获得更多的信心。

本丛书在国内最优秀的专家指导下，以崭新的编辑理念，科学地诠释了中学各学科的知识点与能力点，相信会对读者有所帮助。当然，因为时间仓促及编者水平有限，错谬之处，在所难免，真诚欢迎读者的批评和指正。

编委会

2005年5月于北京

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第一章　集合与简易逻辑

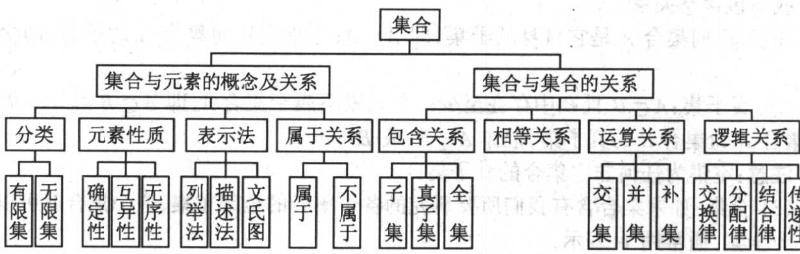
第一节　集　　合

第一部分　基础知识精析

知识结构梳理

集合作为一种数学语言,是现代数学的基本概念.康托所创立的集合论已被公认为全部数学的基础.集合是一个不能够精确定义的基本概念,它与点、线、面一样,对它只能进行描述.日常用语中,经常可见“请全校师生到操场集合”之类的语句,在此指令下,该校每一个同学或教师都能主动地走向操场,集合在一起.而数学所研究的对象不能像人那样走向操场,只能由我们把所关心的对象汇集在一起,这结果便是集合.例如,麦当劳正推出一款开心乐园套餐:①麦乐鸡(4块)或巨无霸;②新地圣代或奶昔;③可乐、橙汁或朱古力奶;④28种狗狗挂件.在以上每项中任选出一样,这样每选出3样就构成了你的开心乐园套餐集合,而不同的人选出的集合中的元素是可能不一样的.元素是集合的惟一要素.那么元素与集合、集合与集合之间的关系是怎样呢?这就是我们本节要讨论的主要问题.

知识结构框架



重点与难点辨析

一、集合与元素概念

1. 集合

具有某种性质的事物的全体称为一个集合,简称集.一般地,某些指定的对象集在一起就成为一个集合,通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.

2. 元素

集合中的每个对象叫做这个集合的元素.

(1) 集合中元素的特性,即确定性、互异性、无序性.

① 确定性:按照明确的标准判定一个元素是否在该集合里,不能模棱两可;

② 互异性:集合中没有两个一样的元素;

③ 无序性:集合中的元素无先后顺序,如$\{a,b,c\}$与$\{b,a,c\}$是同一集合.

(2) 集合中元素的属性:集合的惟一要素是元素,它的形式可以是各种各样的,例如:$A=\{1,2,3\}$;$B=\{a,b,c\}$;$C=\{x^2+y^2,m^2+n^2\}$;$D=\{x^2-2x+1=0,x^2-2x-3=0\}$;$E=\{(1,1),(2,2)\}$;$F=\{△,○,□\}$…以上集合中的元素依次为数、字母、式、方程、有序数对、图形等.

注意:一些集合本身也可以作为元素构成一个新集合.例如:$A_i=\{$北大附中高一i班的学生$\}(i=1,2,\cdots,10)$,$B=\{A_1,A_2,\cdots,A_{10}\}$.这样,集合$A_i$既是一个集合又为$B$中的元素($A_i\in B$).

3. 元素与集合的关系

只有属于$\in$和不属于$\notin$的关系,没有$=$和$\neq$的关系.

4. 集合的分类

一般按元素个数可分为有限集(元素个数有限,如$\{1,8,27\}$);无限集(元素个数无限,如$\{x\mid -2<x<3\}$);空集(元素个数为零,即不含任何元素,$\varnothing$).

5. 集合的表示

集合可以用列举法、描述法、文氏图3种方法求解.

二、集合与集合的关系

1. 包含关系

(1) 子集:集合A中的任一元素都是集合B中的元素,则集合A包含于集合B或集合B包含集合A.记作$A\subseteq B$(或$B\supseteq A$),集合A叫做集合B的子集.相应就有不包含于$\not\subseteq$或不包含$\not\supseteq$关系.

注意:任何集合A是它自身的子集,即$A\subseteq A$;空集是任何集合A的子集,即$\varnothing\subseteq A$.

(2) 真子集:$A\subseteq B$且B中存在至少一个元素不属于集合A,即$A\subseteq B$且$A\neq B$,此时,集合A为集合B的真子集,记作$A\subsetneqq B$(或$B\supsetneqq A$).

注意:空集为任何非空集合的真子集.

(3) 全集:如果集合含有我们所要研究的各个集合的全部子集,这个集合就可以看作一个全集,通常用U表示.

2. 相等关系

对于集合A,B,如果$A\subseteq B$且$B\subseteq A$,那么$A=B$,即A,B里所有元素均相同.

3. 运算关系

(1) 交集:由所有属于集合A且属于集合B的元素组成的集合叫做A与B的交集,记作$A\cap B$,即$A\cap B=\{x\mid x\in A$且$x\in B\}$.

(2) 并集:由所有属于集合A或属于集合B的元素组成的集合叫做A与B的并集,记作$A\cup B$,即$A\cup B=\{x\mid x\in A$或$x\in B\}$.

(3) 补集:一般地,设S是一个集合,$A\subseteq S$,由S中所有不属于A的元素组成的集合,叫做S中子集A的补集(或余集),记作C_SA,即$C_SA=\{x\mid x\in S$,且$x\notin A\}$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

注意:如把实数集 **R** 看作全集 U,那么有理数集 **Q** 的补集 $C_U\mathbf{Q}$ 就是全体无理数的集合.

4. 逻辑关系

(1) 交、并集运算性质.

交集运算性质:$A\cap B=B\cap A\subseteq A$(或 B);$A\cap U=A$;$A\cap A=A$;$A\cap\varnothing=\varnothing$.

并集运算性质:$A\cup B=B\cup A\supseteq A$(或 B);$A\cup U=U$;$A\cap A=A$;$A\cap\varnothing=A$.

(2) 补集的运算性质.

$C_U(C_UA)=A$; $C_U\varnothing=U$; $C_UU=\varnothing$; $A\cup C_UA=\varnothing$; $A\cup C_UA=U$.

(3) 分配律、结合律、传递性.

分配律:$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

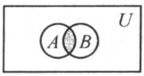
结合律:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

传递性:$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$;$A\subsetneqq B$ 且 $B\subsetneqq C\Rightarrow A\subsetneqq C$.

(4) 反演律(摩根法则).

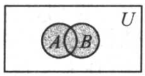
$C_U(A\cap B)=C_UA\cup C_UB$;$C_U(A\cup B)=C_UA\cap C_UB$.

5. 表示交、并、补关系常见的几种文氏图

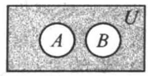


$A\cap B$

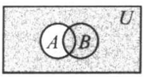
(阴影部分)



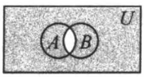
$A\cup B$



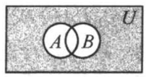
C_UA



$C_UA\cap B$



$C_U(A\cap B)=(C_UA)\cup(C_UB)$



$C_U(A\cup B)=C_UA\cap C_UB$

三、有限集合子集及元素个数公式

1. 有限集合子集

设有限集合 A 中有 n 个元素,则 A 的子集个数有

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n\text{个}$$

其中真子集个数和非空子集个数均为(2^n-1)个,非空真子集个数为(2^n-2)个.

2. 元素个数公式

有限集合 A 中元素的个数记作 card(A),以下简记为 $C(A)$,U 为全集,则有如下公式.

(1) $C(A)+C(C_UA)=C(U)$;

(2) $C(A\cup B)=C(A)+C(B)-C(A\cap B)$;

(3) $C(A\cap B)=C(A)-C(A\cap C_UB)=C(B)-C(B\cap C_UA)$;

(4) $C(\varnothing)=0$.

四、常用的几个数集

(1) 非负整数集(自然数集):全体非负整数的集合,记作 **N**.

(2) 正整数集:非负整数集内排除 0 的集合,记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$.

(3) 整数集:全体整数的集合,记作 **Z**.

(4) 有理数集:全体有理数的集合,记作 $\mathbf{Q}$.

(5) 实数集:全体实数的集合,记作 $\mathbf{R}$.

五、注意几个区别

(1) a(元素)与$\{a\}$(单元素集合);

(2) $\{a,b\}$(两个元素集合)与$\{(a,b)\}$(单元素集合);

(3) $\varnothing$(空集)与$\{\varnothing\}$(单元素集合).

第二部分　数学思想建构

数学思想方法

一、数学思想

1. 数形结合思想

在解决数学问题时,将抽象的数学语言与直观的图形结合起来,使抽象思维和形象思维结合起来,就是数学中很重要的数形结合思想,即把数量关系转化为图形的性质来确定,或把图形的性质问题转化为数量关系问题来研究.

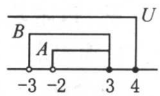
利用等价关系和数形结合思想,借助数轴及文氏图进行集合交、并、补的运算是常见的基本方法.将满足条件的集合在数轴上表示,将抽象的集合问题用文氏图来表示,既清楚又简单,常能起到化抽象为直观,让人一目了然的效果.

【例1】 已知全集 $U=\{x\mid x\leqslant 4\}$,集合 $A=\{x\mid -2<x<3\}$,$B=\{x\mid -3<x\leqslant 3\}$.求 C_UA,$A\cap B$,$C_U(A\cap B)$,$(C_UA)\cap B$.

考点分析:考查集合之间交、并、补的运算及数形结合思想.

思路梳理:对不等式的解集常利用数轴求解,把集合正确地表示在数轴上.

解:由图观察知,$C_UA=\{x\mid x\leqslant -2$ 或 $3\leqslant x\leqslant 4\}$.



因为 $A\subsetneqq B$,所以 $A\cap B=A=\{x\mid -2<x<3\}$.

所以 $C_U(A\cap B)=C_UA$.

$(C_UA)\cap B=\{x\mid -3<x\leqslant -2$ 或 $x=3\}$.

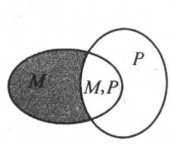
注意:端点处"="的取舍,如 $-2\notin A$,则 $-2\in C_UA$;$(C_UA)\cap B$ 里容易忽略 $x=3$ 这个点.

【例2】 设 M,P 是两个非空集合,规定 M 与 P 的差集为 $M-P=\{x\mid x\in M$ 且 $x\notin P\}$,则 $M-(M-P)=$________.

考点分析:考查学生集合概念是否清晰及知识迁移能力.

思路梳理:这是一道信息迁移型的应用性开放题,"$M-P$"是中学不曾学过的一种运算,直接很难想像它的意义,用文氏图解决就简单多了.

解:当 $M\cap P\neq\varnothing$时,由下图可知,$M-P$ 为图形中的阴影部分,则 $M-(M-P)$.显然为 $M\cap P$.



当 $M\cap P=\varnothing$时,$M-P=M$,则 $M-(M-P)=M-M=\{x\mid x\in M$ 且 $x\notin M\}=\varnothing$.

注意:对于比较抽象的集合常用文氏图,用阴影与空白等表示不同部分.

2. **分类讨论思想**

分类讨论是一种重要的数学思想,在集合单元的学习中,要注意树立分类讨论的意识,掌握分类讨论的方法,这样不仅能有效地解决集合问题,而且能为后面的学习奠定基础.

【例 3】 $a>0, A=\{x\,|\,|x-a|<a+\frac{1}{2}, x\in\mathbf{Z}\}, B=\{x\,|\,|x|<2a, x\in\mathbf{Z}\}$,求 $A\cap B$.

考点分析:考查分类讨论思想及数集之间的运算.

思路梳理:这是含有参数 a 的两个集合,求这两个集合的交集,应就 a 的情况进行讨论.

解: $A=\{x\,|\,-a-\frac{1}{2}<x-a<a+\frac{1}{2}, x\in\mathbf{Z}\}=\{x\,|\,-\frac{1}{2}<x<2a+\frac{1}{2}, x\in\mathbf{Z}\}$,

$B=\{x\,|\,-2a<x<2a, x\in\mathbf{Z}\}$.

当 $-2a=-\frac{1}{2}$ 时,即 $a=\frac{1}{4}$,则 $A\cap B=\{x\,|\,-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}, x\in\mathbf{Z}\}$;

当 $0<a<\frac{1}{4}$ 时,则 $A\cap B=\{x\,|\,-2a<x<2a, x\in\mathbf{Z}\}$;

当 $a>\frac{1}{4}$ 时,则 $A\cap B=\{x\,|\,-\frac{1}{2}<x<2a, x\in\mathbf{Z}\}$.

【例 4】 已知 $A=\{x\,|\,(x-1)(x-4)\leqslant 0\}, B=\{x\,|\,x^2-2ax+a+2\leqslant 0\}$.若 $B\subseteq A$,求实数 a 的取值范围.

考点分析:以集合为载体,考查集合与集合间的关系及不等式、二次方程的实根分布等问题.

思路梳理:分 B 空与非空两种情况,转化为不等式(组)求解.

解:$A=\{x\,|\,1\leqslant x\leqslant 4\}$.

(1) 当 $B=\varnothing$ 时,二次三项式 $x^2-2ax+a+2$ 的判别式为负,即 $\Delta=(-2a)^2-4(a+2)<0\Rightarrow -1<a<2$.

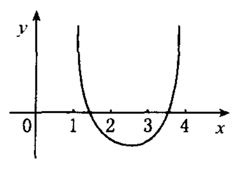
(2) 当 $B\neq\varnothing$ 时,由于方程 $x^2-2ax+a+2=0$ 有实根,有 $\Delta=(-2a)^2-4(a+2)\geqslant 0\Rightarrow a\geqslant 2$ 或 $a\leqslant -1$.

不妨设方程 $x^2-2ax+a+2=0$ 的两实根为 x_1, x_2,且 $x_1\leqslant x_2$,这时 $B=\{x\,|\,x_1\leqslant x\leqslant x_2, a\geqslant 2$ 或 $a\leqslant -1\}$,要使 $B\subseteq A$,且只需

$$\begin{cases} a\geqslant 2 \text{ 或 } a\leqslant -1 \\ x_2\leqslant 4 \\ x_1\geqslant 1 \end{cases}$$

作出函数 $f(x)=x^2-2ax+a+2$ 的图像(右图).由图像可得

$$\begin{cases} f(1)=1^2-2a\times 1+a+2\geqslant 0 \\ f(4)=4^2-2a\times 4+a+2\geqslant 0 \\ a\geqslant 2 \text{ 或 } a\leqslant -1 \\ 1\leqslant \frac{2a}{2}\leqslant 4\text{(对称轴)} \end{cases} \Rightarrow 2\leqslant a\leqslant \frac{18}{7}$$



综合(1)、(2)知，a 的取值范围为 $-1<a\leqslant\frac{18}{7}$.

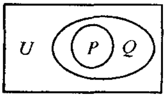
注意：首先别忽视了 $B=\varnothing$的情况；其次利用二次函数图像和性质，讨论二次方程的实根分布并注意转化的等价性．当方程在区间$[m,n]$内有两实根时，则需 $f(m)>0$，$f(n)>0,\Delta\geqslant0,m<-\frac{b}{2a}<n$ 同时成立(方程二次项系数为正).

二、数学方法

1. 图示法

【例 5】 设 U 是全集，非空集合 P,Q 满足 $P\subsetneqq Q\subsetneqq U$. 若含 P,Q 的一个集合运算表达式，使运算结果为$\varnothing$，则此运算表达式可以是________. (只要写一个)

考点分析：考查集合的运算，以及文氏图及集合的数学符号语言、文字语言的相互转换能力.



思路梳理：利用文氏图作出满足条件的图形.

解：如右图，则阴影部分表示 $\complement_UQ$.

因为 $P\cap\complement_UQ=\varnothing$，所以 $P\cap\complement_UQ$ 即可.

2. 特殊值法

【例 6】 已知集合 $A=\{x\mid-1\leqslant x\leqslant2\}$，$B=\{x\mid x\leqslant a\}$，且 $A\cap B\neq\varnothing$，则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $a<2$　　B. $a\geqslant-1$　　C. $a>-1$　　D. $-1\leqslant a<2$

考点分析：考查不等式解集集合的交集运算.

思路梳理：由于是选择题可用特殊值法来排除错误答案.

解：令 $a=2$，则 $B=\{x\mid x\leqslant2\}$，显然 $A\cap B\neq\varnothing$，所以排除 A,D.

取 $a=-1$，则 $B=\{x\mid x\leqslant-1\}$，此时 $A\cap B=\{-1\}\neq\varnothing$，所以排除 C，故答案为 B.

3. 分析法

【例 7】 同时满足：

(1) $M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$;

(2) 若 $a\in M$，则 $6-a\in M$ 的非空集合 M 有 (　　)

A.32 个　　B.15 个　　C.7 个　　D.6 个

考点分析：本题主要考查了集合的基本知识及逻辑推理能力.

思路梳理：M 的元素是 1,2,3,4,5 的一部分或全部，且 $a\in M$，则 $6-a\in M$，我们就挨个试吧.

解：不妨设 $1\in M$，则 $6-1=5\in M$，所以 M 可为$\{1,5\}$，同理有$\{2,4\}$，$\{3\}$，再组合一下有：$\{1,5,2,4\}$，$\{1,5,3\}$，$\{2,4,3\}$，$\{1,2,3,4,5\}$都满足题设，故选 C.

规律方法技巧

(1) 全面正确地理解子集的含义是完整解答与之有关题目的关键．如 $A\subseteq B$，且 A 中元素个数未定时，A 有两种特殊情况必须考虑到 $A=\varnothing$和 $A=B$.

(2) 交集、并集常用来表示不等式(组)、方程(组)的解，概括为“且”用交，“或”用并，解要精、数轴分.

(3) 关于集合的运算，一般应把各参与运算的集合化到最简形式，再进行运算.

(4) 集合运算的最后结果，应代回原命题中进行检验，看是否符合题设要求.

(5) 在解有关集合问题时,常将集合化简或转化为熟知的代数、几何、三角等问题,同时注意数形结合、化归、分类讨论等常用的数学思想方法.

(6) 在解子集的综合问题时,首先要注意集合自身的转换,能够用列举法表述的,尽可能用列举法,这样使得集合中元素清晰明确,使问题简单化,如当元素个数较少时,或当元素个数较多又元素具有某种共同性质时,可考虑用描述法.

常见思路误区

在解答数学问题时,或是由于对基础知识的理解不准确,或是对于题目的分析不够到位,或是受已然形成的思维定势的影响,都会使学生陷入思维误区.集合是中学的最基本概念,它概念新、符号多、集合间关系复杂,且符号抽象,所以集合概念及其关系理解掌握起来有一定困难,下面归纳几种常见错误,并进行辨析,给出正确解法,希望引起同学们重视.

误区 1:忽略集合中元素的"三性"——确定性、互异性、无序性.

【例 1】 已知 M、N 都有 3 个元素,且 $M=\{a,a+d,a+2d\}$,$N=\{a,aq,aq^2\}$.其中 $a\neq 0$,$M=N$,求 q 的值.

错解:因为 $M=N$,所以 $a+d=aq$ 且 $a+2d=aq^2$,解这个二元方程组可知 $q=1$.

分析:本题是初学集合的学生极易出错的,解题时未考虑集合的元素具有无序性,而直接错误地认为二集合相等,即其对应元素相等,解出 q 后亦未检验,此时的元素是否满足互异性.

正解:因为 $M=N$,所以

$$a+d=aq,a+2d=aq^2 \qquad ①$$

或

$$a+d=aq^2,a+2d=aq \qquad ②$$

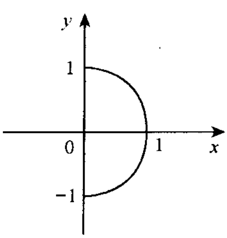
解①,得 $q=1$ 但此时 $aq=aq^2=a$,不满足互异性,故舍去.

解②,得 $q=1$(舍)或 $q=-\dfrac{1}{2}$,经检验符合.

综上,$q=-\dfrac{1}{2}$.

误区 2:对集合的描述不确切.

【例 2】 设 $S=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x>0\}$,试用其他方法表示 S.



错解:S 是由平面上的点(x,y)所组成的集合,因为这些点同时满足 $x^2+y^2\leqslant 1,x>0$,所以 S 表示半个单位圆,如图阴影部分.

分析:错误在于"半个单位圆"表述不清楚,主要原因在于概念不清和不善于准确运用数学语言.

正解:S 表示包含半圆周而不包含直径的半个单位圆及其内部.

误区 3:数集与点集混淆.

【例 3】 设集合 $A=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{y\mid y=x+7,x\in\mathbf{R}\}$,求 $A\cap B$.

错解:由

$$\begin{cases}y=x^2+1\\y=x+7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=10\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=-2\\y=5\end{cases}$$

分析:上述解法错在对元素的理解,把函数的值域集合误为点集.

正解:应先化简各集合,$A=\{y|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}=\{y|y\geqslant1\}$,$B=\{y|y=x+7,x\in\mathbf{R}\}=\{y|y\in\mathbf{R}\}$.

故 $A\cap B=\{y|y\geqslant1\}\cap\{y|y\in\mathbf{R}\}=\{y|y\geqslant1\}=A$.

误区4:概念理解不够准确.

【例4】 已知集合 $A=\{x|(x-2)(x^2-2x+a)=0,x\in\mathbf{R}\}$,求集合 A 中所有元素之和.

错解:由条件方程 $(x-2)(x^2-2x+a)=0$,知 $x=2$ 或 $x^2-2x+a=0$.

因为方程 $x^2-2x+a=0$ 的两根之和为2,所以集合 A 中所有元素之和为4.

分析:要求集合中所有元素之和,因此方程的解与解集是两个不同概念,方程的解集中的元素肯定是方程的解,但不能有重复的,而方程的解可以是相等的几个根.

正解:首先,$x=2$ 肯定是 A 中一元素,剩下只需看方程 $x^2-2x+a=0$ 的根了.

当 $a=1$ 时,$\Delta=0$,$x^2-2x+1=0$ 有两重根,$x_1=x_2=1$,此时 $A=\{1,2\}$.故所有元素之和为3.

当 $a<1$ 时,$\Delta>0$,$x^2-2x+a=0$ 有两不等实根,此时,若 $a=0$,则 $x_1=2,x_2=0$.故 A 中元素之和为2.

若 $a\neq0$,则 $x_1+x_2=2$ 且 $x_1\neq x_2\neq2$.故 A 中元素之和为4.

当 $a>1$ 时,即 $\Delta<0$,$x^2-2x+a=0$ 无实根,则 $A=\{2\}$,故 A 中元素之和为2.

综上所述,当 $a>1$ 或 $a=0$ 时,集合 A 中所有元素之和为2.

当 $a=1$ 时,集合 A 中所有元素之和为3;当 $a<1$ 且 $a\neq0$ 时,集合 A 中所有元素之和为4.

误区5:忽略了一个集合的子集或真子集可为$\varnothing$的情况.

【例5】 已知 $A=\{x|x^2+(p+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$,若 $A\cap\{x\in\mathbf{R}|x>0\}=\varnothing$,求实数 p 的取值范围.

错解:因为 $A\cap\{x\in\mathbf{R}|x>0\}=\varnothing$ 且 A 为二次方程的实数解,所以二次方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 有二非正数解.

设二解为 x_1,x_2,则由韦达定理可知 $x_1+x_2=-(p+2)<0$,故 $p>-2$.

分析:本解法犯了两个错误:其一忽略了 A 为$\varnothing$的情况,实际上此时亦满足题意;其二是漏掉对判别式的考查,即一元二次方程有两个负根的充要条件是

$$\begin{cases}x_1+x_2<0\\x_1x_2>0\\\Delta\geqslant0\end{cases}$$

正解:因为 $A\cap\{x\in\mathbf{R}|x>0\}=\varnothing$,且为二次方程的实数解集,故知 A 集合有两种情形.

(1) 若 $A=\varnothing$,则 $\Delta=(p+2)^2-4<0$,解之得 $-4<p<0$;

(2) 若 $A\neq\varnothing$,则方程有两个非正数解且分别设为 x_1,x_2.因为 $x_1x_2=1$,所以方程有二负根.

于是有

$$\begin{cases}p+2>0\\\Delta=(p+2)^2-4\geqslant0\end{cases}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com