中学数学系列读物

平面几何立体几何解题方法和技巧

科学技术文献出版社

中学数学系列读物

平面几何立体几何解题方法和技巧

乔家瑞　李永山　陆志昌 编著

科学技术文献出版社

内 容 简 介

本书是中学数学系列读物之二，它是紧密配合平面几何与立体几何内容编写的，目的在于帮助读者系统地归纳和总结有关的解题方法和技巧。本书难易适度，内容安排合理，在叙述上深入浅出，通俗易懂，适合青少年读者学习平面几何与立体几何时参考。本书所列题解方法和技巧都能独立成章，读者可以根据需要选学其中任一章节。

本书可作为自学青年及在校学生学习和复习平面几何与立体几何的参考书，也可作为数学教师进行教学和课外讲座的参考书。

中学数学系列读物
平面几何立体几何解题方法和技巧
乔家瑞 李永山 陆志昌 编著
科学技术文献出版社出版
(北京复兴路15号 邮政编码100038)
一二〇一工厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
·
787×1092毫米 32开本 17.75印张 400千字
1991年8月第1版 1991年8月第1次印刷
印数：1—14300册
社科新书目：274-241
ISBN 7-5023-1434-2/O·424
定价：6.70元

前　言

为了配合自学青年和在校学生对平面几何与立体几何的学习，我们编写了这套中学数学系列读物。它包括《初中代数解题方法和技巧》、《平面几何 立体几何解题方法和技巧》、《平面解析几何解题方法和技巧》、《平面三角解题方法和技巧》和《高中代数解题方法和技巧》等五册。编写这套系列读物的目的在于帮助读者系统地归纳、总结常用的解题方法和技巧，以便逐步积累解题经验，学会科学的思考方法，构成合理的解题思路，从根本上提高分析问题和解决问题的能力。

在编写过程中，我们特别注意了下述几个问题：

1．这套系列读物所选内容从不同的侧面对中学数学内容进行归纳总结；有些内容具有一定的难度。

2．这套系列读物在内容的安排上注意了读者学习的阶段性，不片面追求解题方法和技巧的完整。学习后可以对中学数学有一个完整的认识。

3．在阐述每一种解题方法和技巧时，都选择典型例题进行详尽地分析，以揭示它们的精神实质。同时附有一定数量的习题，供读者练习使用。另外，在叙述上注意了深入浅出，通俗易懂，因此读者就可以通过自学掌握书中的内容.

4．这套系列读物中的每篇内容都能独立成章，读者可以根据自己的需要，选择其中任何一篇进行学习。

这套系列读物可以作为学习和复习中学数学的参考书，也可以作为数学教师进行教学和课外讲座的参考书。

在编写这套系列读物过程中，我们参阅了大量的国内外有关资料，但限于我们的水平，错误与不妥之处在所难免，欢迎读者批评指正。

《平面几何与立体几何解题方法和技巧》是中学数学系列读物之二，它是紧密配合平面几何和立体几何教材编写的解题方法和技巧，可作为学习和复习这两部分内容的参考书，也可作为数学教师进行教学和课外讲座的参考书。本书由北京师范学院数学系副主任胡杞副教授审校。

编　者

1990年6月于北京

目　录

一、三角形内角和定理应用举例

我们知道三角形内角和定理“三角形三个内角的和等于180°”是一个非常重要的定理，是研究三角形性质的重要工具.从三角形内角和定理可以推出下述两个重要推论：

推论1 三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和.

推论2 三角形的一个外角大于任何一个和它不相邻的内角.

同时，还可以推出n边形内角的和等于$(n-2)\cdot 180^\circ$.

三角形内角和定理有着广泛的应用，我们从下述几方面来说明它的应用：

(一)求角

有关角度的计算常常要借助于三角形内角和定理，在计算过程中要注意下述几个问题：

1. 要注意灵活使用三角形内角和定理，例如由$\triangle ABC$的三个内角和等于180°，即$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$，可以利用下述变换进行计算：

(1) $\angle C=180^\circ-(\angle A+\angle B)$

$\angle A+\angle B=180^\circ-\angle C$；

(2) $\dfrac{\angle A}{2}+\dfrac{\angle B}{2}+\dfrac{\angle C}{2}=90^\circ$，

$\dfrac{1}{2}\angle C=90^\circ-\left(\dfrac{1}{2}\angle A+\dfrac{1}{2}\angle B\right)$，

$$\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B=90^\circ-\frac{1}{2}\angle C;$$

(3) $2\angle A+2\angle B+2\angle C=360^\circ$

$2\angle A+2\angle B=360^\circ-2\angle C,$

$2\angle C=360^\circ-(2\angle A+2\angle B);$

(4) $\dfrac{\angle A}{3}+\dfrac{\angle B}{3}+\dfrac{\angle C}{3}=60^\circ,$

$\dfrac{1}{3}\angle A+\dfrac{1}{3}\angle B=60^\circ-\dfrac{1}{3}\angle C,$

$\dfrac{1}{3}\angle C=60^\circ-\left(\dfrac{1}{3}\angle A+\dfrac{1}{3}\angle B\right).$

2. 要注意利用$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$等关系式列方程求角.

例1 如图1-1，求$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F$的度数.

分析： 从图1-1可以看出，$\angle A$和$\angle B$，$\angle C$和$\angle D$，$\angle E$和$\angle F$分别在同一个三角形中，但在每一个三角形中的第三个角$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$的度数并不知道，因此关键是求出$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$，而通过对顶角相等，可以把这三个角集中到$\triangle GHM$中，根据三角形内角和定理就可以得到$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$，从而为求出$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F$的度数创造了条件.

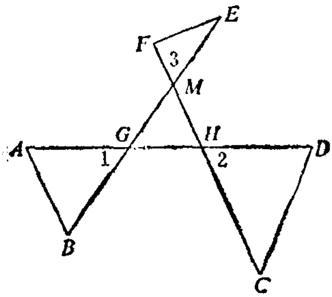

图 1-1

解： $\because$ $\angle A+\angle B=180^\circ-\angle 1$，$\angle C+\angle D=180^\circ-\angle 2$，$\angle E+\angle F=180^\circ-\angle 3$，

$\therefore\ \angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=180^\circ-\angle 1+180^\circ-\angle 2+180^\circ-\angle 3=540^\circ-(\angle 1+\angle 2+\angle 3)$.

$\because\ \angle MGH=\angle 1$，$\angle GHM=\angle 2$，$\angle HMG=\angle 3$，并且$\angle MGH+\angle GHM+\angle HMG=180^\circ$，

$\therefore\ \angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$.

因此 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=540^\circ-180^\circ=360^\circ$.

例2 在$\triangle ABC$中，$\angle A=50^\circ$，BO和CO分别是$\angle B$和$\angle C$的平分线，求$\angle BOC$的度数.

分析：本题可以如图1-2或图1-3添置辅助线，利用三角形内角和定理的推论计算出$\angle BOC$的度数.如图1-2，

$\because\ \angle 1=\angle 3+\angle 4$，$\angle 2=\angle 5+\angle 6$，

$\therefore\ \angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6=(\angle 4+\angle 6)+(\angle 3+\angle 5)=\angle A+\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=\angle A+\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A=115^\circ$.

因此 $\angle BOC=115^\circ$.

如果能够灵活运用$\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$就可以避免添置辅助线，而直接计算出$\angle BOC$的度数.

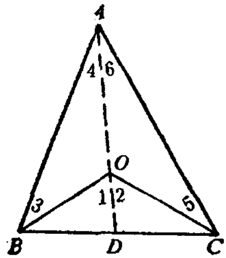

图 1-2

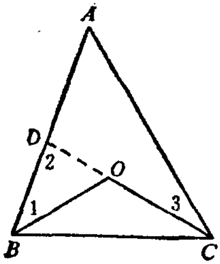

图 1-3

解：如图1-4，∵ $\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$，

∴ $\angle BOC=180^\circ-\left(\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C\right)=180^\circ-\left(90^\circ-\frac{1}{2}\angle A\right)=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A=115^\circ$.

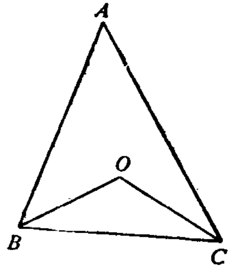

图 1-4

例3 在$\triangle ABC$中，$\angle B$和$\angle C$的三等分线分别交于E, F，并且$\angle A=36^\circ$，求$\angle E$和$\angle F$的度数。

分析：注意使用$\frac{1}{3}\angle B+\frac{1}{3}\angle C=60^\circ-\frac{1}{3}\angle A$和$\frac{2}{3}\angle B+\frac{2}{3}\angle C=120^\circ-\frac{2}{3}\angle A$ 等关系式，直接计算出$\angle E$和$\angle F$的度数.

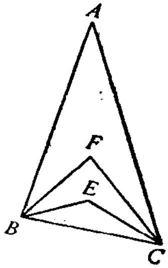

图 1-5

解：如图1-5．∵ $\frac{1}{3}\angle B+\frac{1}{3}\angle C=60^\circ-\frac{1}{3}\angle A=48^\circ$，

∴ $\angle E=180^\circ-\left(\frac{1}{3}\angle B+\frac{1}{3}\angle C\right)=180^\circ-\left(60^\circ-\frac{1}{3}\angle A\right)=132^\circ$.

∵ $\frac{2}{3}\angle B+\frac{2}{3}\angle C=120^\circ-\frac{2}{3}\angle A=96^\circ$，

∴ $\angle F=180^\circ-\left(\frac{2}{3}\angle B+\frac{2}{3}\angle C\right)$

$=180^\circ-\left(120^\circ-\frac{2}{3}\angle A\right)=84^\circ$

例4 已知一五角星，A，B，C，D，E分别为五个角的顶点，求$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E$的度数.

分析：如图1-6，利用三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和，将$\angle B$，$\angle C$，$\angle D$，$\angle E$都集中到$\triangle AFG$中，即$\angle AFE=\angle C+\angle E$，$\angle AGB=\angle B+\angle D$，然后利用三角形内角和定理就可以得到$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=180°$.

解：$\because$ $\angle BGA$是$\triangle BGD$的外角，

$\therefore$ $\angle BGA=\angle B+\angle D$.

$\because$ $\angle AFE$是$\triangle CEF$的外角，

$\therefore$ $\angle AFE=\angle C+\angle E$.

又$\because$ $\angle A+\angle AFE+\angle BGA=180°$，

$\therefore$ $\angle A+(\angle C+\angle E)+(\angle B+\angle D)=180°$.

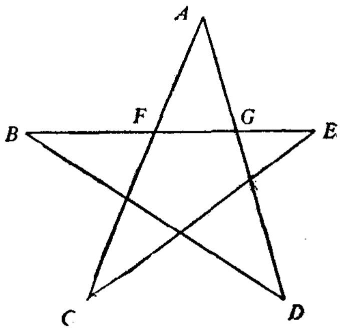

图 1-6

因此 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=180°$.

例5 在$\triangle ABC$中，$\angle B$的平分线与$\angle C$外角的平分线交于O，并且$\angle CBO=\alpha$，$\angle COB=2\alpha$，求$\angle A$和$\angle C$.

分析： 要注意利用三角形内角和定理及其推论列出方程，这样就可以将$\angle A$和$\angle C$用α表示出来.

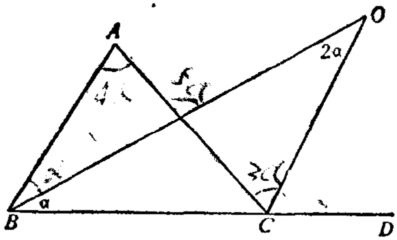

图 1-7

解：如图1-7.

$\because$ $\angle OCD$是$\triangle BC$

O的外角，

$\therefore \quad \angle OCD=2\alpha+\alpha=3\alpha.$

$\because \quad \angle OCD=\angle OCA,$

$\therefore \quad \angle ACD=\angle OCD+\angle OCA=2\angle OCD=6\alpha.$

$\because$ $\angle ACD$是$\triangle ABC$的外角，

$\therefore \quad \angle ACB=180^\circ-\angle ACD=180^\circ-6\alpha.$

又$\because \quad \frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{2}\angle ACD,$

$\therefore \quad \frac{1}{2}\angle A+\alpha=3\alpha.$

因此 $\angle A=4\alpha.$

例6 如图1-8，求$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6+\angle 7$的度数.

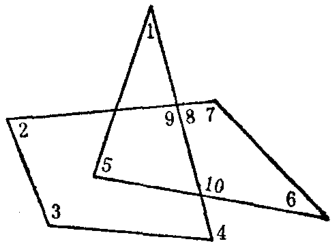

图 1-8

分析：根据$\angle 10=\angle 1+\angle 5$可将原问题转化成求$\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 10+\angle 6+\angle 7$的度数，如果补充上$\angle 8$和$\angle 9$，那么$\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 10+\angle 6+\angle 7+\angle 8+\angle 9=(\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 9)+(\angle 10+\angle 6+\angle 7+\angle 8)$，恰好是两个四边形的内角和，而所增加的$\angle 8$和$\angle 9$的和是$180^\circ$，只要从这两个四边形的内角和中减去$180^\circ$就是所求角的度数.

解：$\because \quad (\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 9)+(\angle 10+\angle 6+\angle 7+\angle 8)=2\times 180^\circ+2\times 180^\circ=720^\circ,$

$$\therefore \quad \angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 10+\angle 6+\angle 7 =720^\circ-(\angle 8+\angle 9).$$

又∵ $\angle 8+\angle 9=180°$,

∴ $\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 10+\angle 6+\angle 7=720°-180°$
$=540°$.

又∵ $\angle 10=\angle 1+\angle 5$,

∴ $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6+\angle 7=540°$.

(二)证等角

证明角的相等关系时，也经常要使用三角形内角和定理，而且证明过程与求角的过程有很多类似之处．如果证明角的相等比较复杂时，只要更加注意灵活使用三角形内角和定理，就能获得简捷的证明方法．

例1 在$\triangle ABC$中，$\angle B=\angle C$，并且$\angle B$和$\angle C$的平分线交于O，求证$\angle BOC$等于$\angle ACB$的外角．

证法一：如图1-9，$\angle B=\angle C$.

∵ $\angle BOC=180°-\left(\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C\right)$
$=180°-\angle C=\angle ACD$,

∴ $\angle BOC=\angle ACD$.

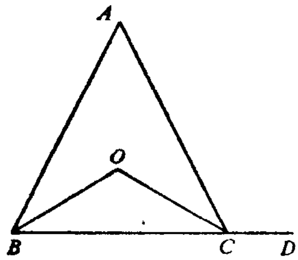

图 1-9

证法二：如图1-10，连AO并延长与BC交于E.

∵ $\angle 1=\frac{1}{2}\angle B+\angle 3$,

$\angle 2=\frac{1}{2}\angle C+\angle 4$，并且$\angle B=\angle C$,

∴ $\angle 1+\angle 2=\frac{1}{2}\angle B+$

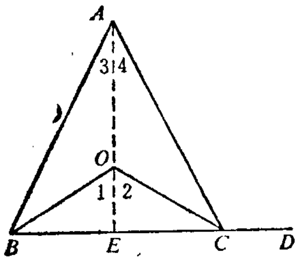

图 1-10

$\frac{1}{2}\angle C+\angle 3+\angle 4=\angle B+\angle A.$

因此　$\angle BOC=\angle B+\angle A=\angle ACD.$

证法三：如图1-11，延长CO与AB交于E.

∵　$\angle BOE=\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C$，并且$\angle B=\angle C$，

∴　$\angle BOE=\angle C.$

因此　$\angle BOC=180°-\angle BOE=180°-\angle C=\angle ACD.$

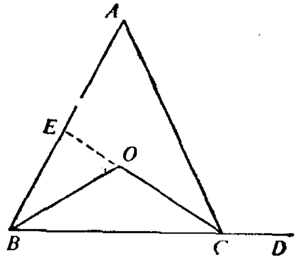

图　1-11

证法四：如图1-12，过O点作$OE//BC$与AC交于E.

∵　$OE//BC$,

∴　$\angle EOC=\angle OCB$, $\angle CEO=\angle ACD.$

因此　$\angle ACD=\angle CEO=180°-\angle ECO-\angle EOC=180°-\angle C.$

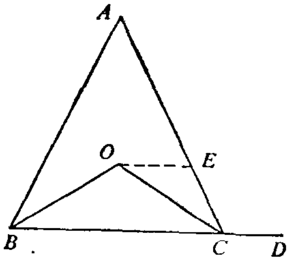

图　1-12

又∵　$\angle BOC=180°-\frac{1}{2}\angle B-\frac{1}{2}\angle C$，$\angle B=\angle C$,

∴　$\angle BOC=180°-\angle C.$

因此　$\angle BOC=\angle ACD.$

例2　在$\triangle ABC$中，$AC>AB$，AD是BC边上的高线，AE是$\angle A$的平分线，求证$\angle DAE=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$.

分析：如图1-13，由于$\angle DAE$和$\angle B$，$\angle C$不在同一个

三角形中，并且又不是$\angle B$，$\angle C$所在三角形的外角，因此需将$\angle DAE$用$\frac{1}{2}\angle A$及$\angle 1$来表示，然后将$\frac{1}{2}\angle A$和$\angle 1$分别用$\angle B$和$\angle C$表示，这样就可以推证出$\angle DAE$和$\angle B$、$\angle C$的关系.

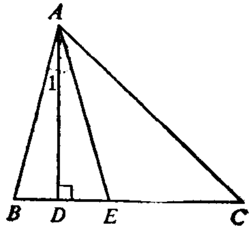

图 1-13

证明： $\because\ \frac{1}{2}\angle A=90°-\left(\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C\right)$,

$\angle 1=90°-\angle B$,

$\therefore\ \frac{1}{2}\angle A-\angle 1=90°-\left(\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C\right)$

$-(90°-\angle B)=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$.

又$\because\ \angle DAE=\angle BAE-\angle 1=\frac{1}{2}\angle A-\angle 1$,

$\therefore\ \angle DAE=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$.

例3 已知$\triangle ABC$与$\triangle ADE$的顶角是对顶角，并且$\angle C$和$\angle E$的平分线交于F，求证$\angle F=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$.

分析： 如图 1-14，要推证$\angle F=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$，需首先确定$\angle F$与$\triangle ABC$及$\triangle ADE$内角的关系，其中要特别注意在$\triangle ABC$及$\triangle ADE$中，由于$\angle BAC=\angle DAE$，因此有$\angle B+\angle C=\angle D+\angle E$.

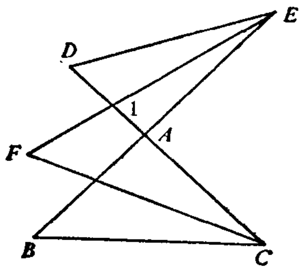

图 1-14

证明：$\because \angle 1=\angle D+\frac{1}{2}\angle E$，$\angle F=\angle 1-\frac{1}{2}\angle C$，

$\therefore \angle F=\angle D+\frac{1}{2}\angle E-\frac{1}{2}\angle C=\frac{1}{2}\angle D+\frac{1}{2}\angle D+\frac{1}{2}\angle E-\frac{1}{2}\angle C=\frac{1}{2}\angle D+\frac{1}{2}(\angle D+\angle E+\angle C)$.

$\because \angle D+\angle E=\angle B+\angle C$，

$\therefore \angle F=\frac{1}{2}\angle D+\frac{1}{2}(\angle B+\angle C-\angle C)=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$.

(三)证两条直线平行或垂直

证明两条直线平行或垂直有很多方法，下面我们研究通过三角形内角和定理证明两个角相等或互余，从而得到两条直线平行或垂直这一基本方法.

例1 已知$\angle AEC=\angle 1+\angle 2$，求证$AB//CD$.

证法一：如图1-15，延长AE与CD交于F.

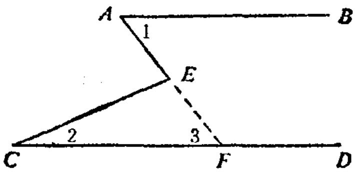

图 1-15

$\because \angle AEC$是$\triangle CEF$的外角，

$\therefore \angle AEC=\angle 2+\angle 3$.

又$\because \angle AEC=\angle 1+\angle 2$，

$\therefore \angle 3=\angle 1$.

因此 $AB//CD$.

证法二：如图1-16，连AC.

$\because \angle 3+\angle 4+\angle AEC=180°$，

$\angle AEC=\angle 1+\angle 2$，