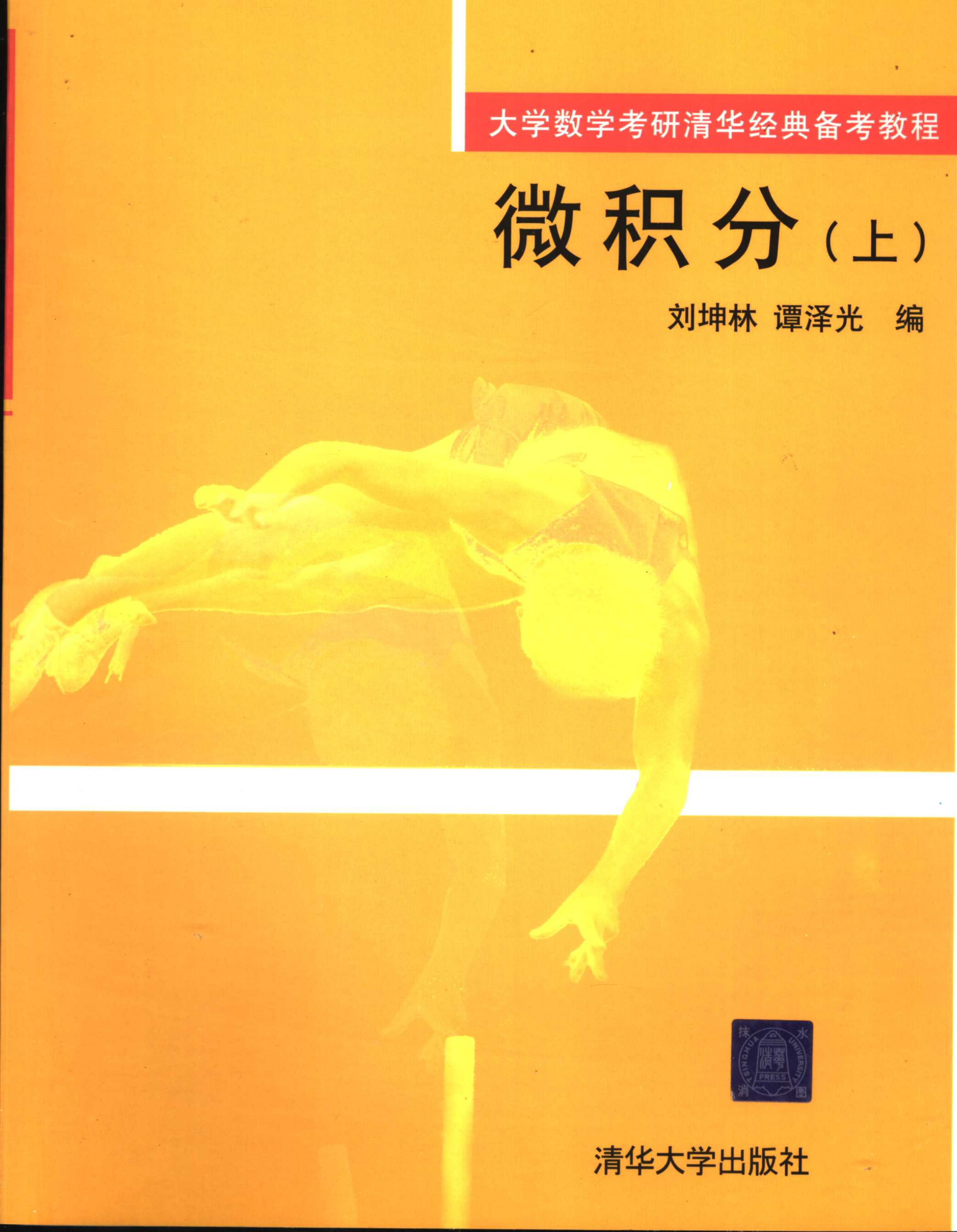

大学数学考研清华经典备考教程

微积分（上）

刘坤林 谭泽光 编

清华大学出版社

大学数学考研清华经典备考教程

微积分（上）

刘坤林 谭泽光 编

清华大学出版社
北 京

内容简介

本书中讲述一元微积分的基本概念、基本定理与知识点.从基本概念、基本定理的背景及其应用入手,延伸到解题的思路、方法和技巧,并通过一法多题、一题多解的方式兼顾到知识的综合与交叉应用.在内容的安排上,既体现出各知识点间承上启下的关系,保持学科结构的系统性,又照顾到各知识点间的横向联系,为读者从全局上、总体上掌握所学的知识提供平台.为了巩固所学的基本概念和基本定理,安排了基本题与综合例题,并且给出分析过程及难点注释.每章配有练习题,为读者提供自我训练的空间.

本书可供高等院校理工、农、医、经管各专业的学生及准备参加全国研究生入学考试的各类考生使用,也可作为相关课程的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分(上)/刘坤林,谭泽光编.—北京:清华大学出版社,2005.4

(大学数学考研清华经典备考教程)

ISBN 7-302-09755-0

Ⅰ.微…　Ⅱ.①刘…②谭…　Ⅲ.微积分—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 107048 号

出 版 者: 清华大学出版社　　**地　　址:** 北京清华大学学研大厦

http://www.tup.com.cn　　**邮　　编:** 100084

社 总 机: 010-62770175　　**客户服务:** 010-62776969

组稿编辑: 刘　颖

文稿编辑: 王海燕

印 刷 者: 北京四季青印刷厂

装 订 者: 三河市新茂装订有限公司

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

开　　本: 185×230　**印张:** 20.5　**字数:** 419 千字

版　　次: 2005 年 4 月第 1 版　2005 年 4 月第 1 次印刷

书　　号: ISBN 7-302-09755-0/O・417

印　　数: 1～4000

定　　价: 28.00 元

前　言

本套教材的前身是《大学数学——概念、方法与技巧》. 经过整编与改版后的本书，进一步加强了可读性，增加了部分新型例题. 全书主要是为大学非数学类本科生与全国硕士研究生入学统一考试应试者系统地复习大学数学内容、以求巩固提高所学知识，取得良好考试成绩而编写的. 这套书包括《微积分(上)》、《微积分(下)》、《线性代数》及《概率论与数理统计》四本书. 选材原则与教学要求是按照清华大学非数学类本科生数学教学大纲与教育部颁发的全国硕士研究生入学统一考试大纲而确定的. 本教材的教学目标是为考生提供跨跃 130～150 分成绩的强化训练与保证，同时，本教材也可作为大学数学的教学参考书.

本书是编者数十年教学经验的积累，是编者依据对课程内容的研究理解，并在综合分析学生认识规律的基础上编写而成的. 许多教学资料是第一次向外公开. 这些教师不但有丰富的教学经历，同时也多从事科研工作，对数学基本概念、基本方法的灵活运用特别重视. 对全国硕士研究生入学统一考试大纲的要求与题型结构均有深入的研究. 因此，本书的编写风格与内容取舍充分体现了他们注重知识的基础性、系统性、交叉性与技巧性的教学风范. 同时，本书在整体内容上把平时的教学要求与考研复习的需要结合起来，既突出了基础，又具有较强的针对性，希望能对这两类读者都有全方位的指导意义，为他们训练数学思维与解题能力提供较为系统的帮助.

学好数学，重在基础. 一味追求技巧，往往导致无所适从，望题生畏. 本书在内容安排上强调基本概念与基本思维的训练，各章节均配有相当数量的基本例题(**例** *.*.*)，其中蕴涵着基本概念、基本方法与技巧. 应该说，扎实地掌握基本概念，加上对基本方法的深入思考，是技巧的真正源泉. 另外，在大多数章节里，还选编了一定数量的综合例题(**综例** *.*.*)，体现知识的综合性与交叉性，与训练综合运用所学知识分析问题及解决问题的能力. 基于综合性与交叉性的考虑，在个别例题中所涉及的内容可能超前本章的内容安排. 读者在使用本书时，对书内例题应首先立足于独立思考，而后有选择地查阅解答过程，对一些典型题，应争取有自己的解题方法，很可能你的方法会优于书中提供的方法，果真如此，正说明你学习的深入. 对准备考研的读者，鉴于国家每年公布的考试大纲会有局部变化以及四类数学试卷的分类，在使用本书时，可参照考试大纲，有选择地略去书内某些章节.

每章后配备了模拟练习题及答案. 读者应力争独立选做其中的题目，以求达到良好的

训练效果.

全书的宗旨是为参加研究生入学考试的考生提供有效的指导与帮助,引导考生建立居高临下的知识洞察力和走向成功的基石.同时,也作为本科生学习大学数学的提高教材.

本教材同时适用于研究生入学考试数学试卷一、二、三、四各类考生.建议广大考生采用本教材.

全书编写工作得到清华大学数学科学系许多教师的支持与帮助.限于编者水平及撰稿时间仓促,对书中的疏漏与错误,敬请读者批评指出.

本书主编为刘坤林.《微积分(上)》的编者为刘坤林(1～13 章),《微积分(下)》的编者为谭泽光(14～23 章);《线性代数》的编者为俞正光(1～3 章),王飞燕(4～6)章;《概率论与数理统计》的编者为叶俊(1～5 章),赵衡秀(6～8 章).

编　者

2005 年 2 月于清华园

作者简介

刘坤林

1970 年清华大学数学力学系毕业. 清华大学责任教授.

从事基础数学与应用数学教学工作，获清华大学教学优秀奖与国家教学成果奖. 近 10 年来所授课程《微积分》被评为国家级精品课. 研究方向：控制理论与系统辨识，随机系统建模及预测，并行计算. 1994 年至 1995 年在美国 Texas A&M University 与 Duke University 任访问研究教授并讲学. 发表学术论文 30 多篇，著有教材《工程数学》,《系统与系统辨识》. 先后七次获国家及省市部级科技进步奖. 水木艾迪考研辅导班主讲.

中国工业与应用数学学会常务理事，副秘书长. 系统与控制专业委员会委员，《控制理论及其应用》特邀审稿专家.

谭泽光

1962 年毕业于清华大学，清华大学责任教授.

长期在清华大学从事数学基础课程教学和应用数学及运筹学方面的科研工作，曾在奥地利 Graz University 任访问教授. 讲授过高等数学、线性代数、最优化理论基础等多门课程，分析系列课程负责人. 负责的微积分课程，被评为国家级精品课程. 长期担任水木艾迪考研辅导班数学主讲.

负责过多项科研项目，发表学术论文 20 多篇，并编著数学规划等教材. 先后获省部级以上奖励四次，1992 年获国家科技进步二等奖.

任《高校应用数学学报》编委. 1997 年开始担任国家工科基础课程教学(清华数学)基地负责人，投入较多精力从事数学教改研究工作，2001 年获国家教学改革成果二等奖.

俞正光

1962 年毕业于清华大学. 清华大学责任教授.

清华大学代数系列课程负责人. 从事组合图论的研究，发表学术论文 10 多篇. 主编《线性代数与解析几何》、《理工科代数基础》等著作.

长期担任水木艾迪考研辅导班数学主讲. 1997 年开始担任国家工科基础课程教学(清华数学)基地负责人，从事数学教改研究工作.

曾参编全国工商管理硕士研究生入学考试研究中心组织编写的《MBA 联考考前辅导

教材》，主编《全国工程硕士研究生入学考试数学考试大纲及考前辅导教材》等各类考研数学辅导教材.

赵衡秀　女

1962 年毕业于清华大学. 清华大学数学科学系副教授.

研究方向为概率统计应用. 长期讲授“概率统计”及“微积分”等课程. 并担任水木艾迪考研辅导班数学主讲.

参加编写《MBA 全国联考应试清华辅导数学教材》、《MBA 入学命题预测数学试卷》、《考研数学常考知识点》等各类考研数学辅导教材.

王飞燕　女

1967 年毕业于清华大学. 清华大学数学科学系教授.

主要研究方向：运筹学，经济数学. 参编过《线性代数》、《线性代数辅导》等书籍. 长期在清华大学从事数学教学与教学研究. 主要讲授的课程有：高等数学，代数与几何，数学模型等. 长期担任水木艾迪考研辅导班数学主讲.

曾获清华大学优秀教学成果奖.

叶　俊

1993 年北京师范大学数学系博士研究生毕业，现任清华大学副教授.

专业方向：概率统计，应用数学. 主要从事随机过程及其应用、金融数学、时间序列分析等方面的研究. 曾编写《随机数学》等教材.

主要讲授本科生和研究生的概率统计、随机数学方法、微积分及高等概率等课程. 曾获清华大学首届青年教师教学优秀奖，1996 年，1997 年度清华大学优秀教学成果特等奖，1999 年获宝钢优秀教师奖.

长期担任水木艾迪考研辅导班数学主讲.

目　录

第1章 预备知识

1.1 引 言

本章内容是学好数学课程的基础与工具，帮助和引导读者掌握常用的数学工具，如基本不等式及其变形、函数的初等性质及其应用等. 这些内容也许不会单独出现在一个习题中，但它是培养分析问题的能力与积累方法、技巧的起点，在处理某类数学问题中常常成为思路的诱发点，在某些综合性习题中也常常成为解题成功与失败的关键.

另外，本章介绍的点集概念是学好极限及其相关概念的思维基础，掌握好这些基础会使我们对极限这一数学的核心问题的认识上升到较高的台阶，对掌握好大学数学课程有着不可低估的作用.

1.2 基本不等式

下述4类不等式是分析与处理数学问题常用的重要工具：

(1) 绝对值不等式 对任意实数 x 均有不等式

$$0 \leqslant |x| + x \leqslant 2|x|. \tag{1.1}$$

(2) 三角不等式(三点不等式) 对任意实数 x 与 y，成立不等式

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|, \tag{1.2}$$

$$|x-y| \geqslant \Big||x| - |y|\Big|. \tag{1.3}$$

【注】 x,y 可以是$\mathbb{R}^n$上的向量，这时须把绝对值记号换为向量范数记号 $\|\cdot\|$；不等式(1.3)中若已知$|x|$与$|y|$有大小比较关系，其右端的外层绝对值号可以脱掉，请读者写出它的两种表达形式.

(3) 平均值不等式 对任意实数 x,y 均有不等式

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2) \geqslant xy. \tag{1.4}$$

若 $x>0$ 且 $y>0$，则有

$$\frac{1}{2}(x+y) \geqslant \sqrt{xy}. \tag{1.5}$$

【注】 以上不等式(1.4)或(1.5)均可扩展到有限个实数或正数的情况. 不等式(1.5)左侧称为算术平均值，右侧称为几何平均值.

(4) 对任意实数 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，成立不等式

$$\sin x \leqslant x \leqslant \tan x. \tag{1.6}$$

以上等号仅在 $x=0$ 时成立.

1.3 基本不等式应用技巧

首先，对这些基本不等式要有意识地应用，在许多场合下，如极限分析、估计上下界、级数的比较准则、积分估计、广义积分收敛性等，意识到应用这些不等式可能会使问题迎刃而解. 其次，我们要强调，这些不等式在应用中往往要变形，比如任意实数 x 和 y，可以换成 $\sin x$ 和 $\sin y$ 或其他任意取实值的变量与函数表达式.

例 1.3.1 对任意实数 x 和 y，$|\sin x+\cos(x+y)|\leqslant|\sin x|+|\cos(x+y)|$.

例 1.3.2 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin(\sin x)<\sin x$.

【解】 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$0<\sin x<\frac{\pi}{2}$，由不等式(1.6)便有 $\sin(\sin x)<\sin x$. 【解毕】

例 1.3.3 设 $a_n\in\mathbb{R}\,(n=1,2,\cdots)$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，$S_n^*=\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|$. 若 $\{S_n^*\}$ 有极限，证明 $\{S_n\}$ 必有极限.

【思路】 试用绝对值不等式及单调有界极限准则.

【证】 由于 $0\leqslant|a_k|+a_k\leqslant 2|a_k|\,(k=1,2,\cdots)$，因此有

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+a_k)\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}|a_k|=2S_n^*.$$

记 $\sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(|a_k|+a_k)$，由已知条件 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n^*$ 存在，则 S_n^* 有界，即 $\exists N$ 及 $M>0$，使当 $n>N$ 时，$S_n^*\leqslant M$，于是有 $\sigma_n\leqslant 2S_n^*\leqslant 2M$(有界)，又 $|a_k|+a_k\geqslant 0$，所以 $\{\sigma_n\}$ 单调增加，由极限存在准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$ 存在，但

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(a_k+|a_k|-|a_k|)=\sigma_n-S_n^*,$$

由极限运算法则，由有限个有极限的序列的和与差或线性组合而成的新序列亦有极限，最后得到$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在. 【证毕】

【技巧】 在绝对值不等式的诱发下，使用了加一项减一项的方法，这是数学中的常用技巧.

【寓意】 本题实质是级数中的“任意项级数若绝对收敛，则必收敛”命题的证明. 该命题以极限形式出现，其寓意是要我们利用极限存在的准则来证明极限存在.

例 1.3.4 设 $a_1=a>0, a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a_1}{a_n}\right)$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，并求此极限值.

【思路】 本题未给出序列具体表达式，只有抽象的递推公式，一般考虑极限存在准则，试验单调有界序列必有极限，递推式以和的形式出现，酷似算术平均值，联想到试验平均值不等式.

【证】 由平均值不等式可知

$$a_{n+1}\geqslant\frac{1}{2}\times 2\sqrt{a_n\times\frac{a_1}{a_n}}=\sqrt{a}>0 \quad (有下界),$$

即有 $a_n\geqslant\sqrt{a}\,(n=1,2,\cdots)$. 考虑到已知递推式，则可有 $a_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a_n^2}{a_n}\right)=a_n\,(n=1,2,\cdots)$，即知$\{a_n\}$单调减且有下界，故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在. 记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，由极限的惟一性，在递推式中令 $n\to\infty$则有$A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{a}{A}\right)$，解方程得到$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A=\sqrt{a}$（由极限的保序性舍去一个不合理的负根）. 【证毕】

【技巧】 熟练应用平均值不等式.

【寓意】 考查极限的存在准则及不等式的应用.

1.4 不等式思想

利用不等式处理问题是数学中的重要手段之一，也是常用技巧. 一般来讲，运用不等式的目的或作用有以下几类.

最常见的情况是估计某数学量或表达式的界. 这需要综合考虑基本不等式的类型及各类初等函数的性质，适当放大某一对象（量或表达式），常运用加一项减一项，或分子分母同乘、同除某一因子等这些小技巧.

应该特别指出的一类情况是，不等式可用来证明某一数学量或表达式等于零. 这时又可分为两类方法.

作为第一类方法，我们给出以下命题：

设有表达式或数学量 A,若对任意 $\varepsilon>0$,均有 $|A|<\varepsilon$,则必有 $A=0$.

这一命题很容易用反证法给出证明,请读者思考.进一步,此命题可用来证明两个数学表达式相等,比如 $A=B$,只需证明 $A-B=0$,令 $C=A-B$,证明 $C=0$ 即可.

作为第二类方法,是根据实数比较公理,两个实数在“大于”、“小于”、“等于”三者比较关系中只能是其中之一.于是,欲证明$A=0$,则可反设 $A>0$ 或 $A<0$,得出矛盾,最后只有 $A=0$ 成立.

在以后章节的若干例题中,请读者注意这方面的方法与技巧.

1.5　邻域与点集

1. 邻域

设 $x_0\in\mathbb{R}$,称点集

$$N(x_0,\delta)=\left\{x\,\middle|\,|x-x_0|<\delta\right\}$$

为 x_0 的 δ 邻域(一维),而称点集

$$N^*(x_0,\delta)=\left\{x\,\middle|\,0<|x-x_0|<\delta\right\}$$

为 x_0 的去心邻域(一维).

对多维情况,例如平面,三维空间或 n 维空间$\mathbb{R}^n$,规定向量或点 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$的邻域与去心邻域分别为

$$N(\boldsymbol{x}_0,\delta)=\{\boldsymbol{x}\mid\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)<\delta\},$$
$$N^*(\boldsymbol{x}_0,\delta)=\{\boldsymbol{x}\mid 0<\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)<\delta\},$$

其中 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)\overset{\text{def}}{=\!=}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-x_{0i})^2\right)^{1/2}$ 称为 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$与 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$之间的距离,$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)$ 满足:

(1) $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)\geqslant 0$,当且仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$ 时,$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)=0$;

(2) $\rho(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x})=\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)$;

(3) 对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n$成立不等式

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqslant\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+\rho(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}),$$

这里 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ 表示向量或$\mathbb{R}^n$上的点,x_i,y_i,z_i 分别为它们的分量.

2. 点集

本节就一维的情形,介绍点集的几个概念与名词.所有概念均可推广到多维空间的情形.(本小节内容作为选读.)

(1) 内点:设 x_0 为点集 E 的一个点,若存在 $N(x_0,\delta)\subset E$,则称 x_0 为 E 的一个内点.

(2) 聚点:设 x_0 为一个点(可以属于 E,也可不属于 E),若 x_0 的任何去心邻域

$N^*(x_0,\delta)$内都至少有一个点 $x\in E$,则称 x_0 为 E 的一个聚点.

例 1.5.1 取 $E=\{x|x\in(0,1)\}$,则 $x_0=0.1$ 或 0.001 都是 E 的内点.

【解】 取 $E_1=\left\{\frac{1}{n}\middle|n=1,2,\cdots\right\}$,聚点为 0,但 $0\notin E$;

取 $E_2=\left\{0,\frac{1}{n}\middle|n=1,2,\cdots\right\}$,聚点为 0,而 $0\in E$;

取 $E=[0,1]$,E 的内点为$(0,1)$内的全部点,这些点亦都是 E 的聚点,但 E 的聚点还有区间端点 0 和 1. **【解毕】**

(3) 孤立点:设 E 为点集,$x_0\in E$,但 x_0 不是 E 的聚点,则称 x_0 为 E 的一个孤立点.

例 1.5.2 设 $E=\left\{\frac{1}{n}\middle|n=1,2,\cdots\right\}$,则每个点均为 E 的孤立点.

例 1.5.3 设 $f(x)=\frac{1}{1-\sin x}$,考虑 $f(x)$没有定义的点构成的点集 E,即

$$E=\{x\mid \sin x=1\}=\left\{2k\pi+\frac{\pi}{2}\middle|k=\pm1,\pm2,\cdots\right\},$$

则 E 的每个点均为孤立点.

例 1.5.4 考虑函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-\sin\dfrac{1}{x}}$没有定义的点构成的点集

$$E=\left\{x\middle|x=0\text{ 或}\frac{1}{2k\pi+\pi/2},k=\pm1,\pm2,\cdots\right\},$$

$x=0$ 为 E 的聚点,其余点均为孤立点,即 $x=0$ 不为 E 的孤立点.事实上,$x=0$ 的任意邻域内均有 E 的点(密集的点).

(4) 界点与边界:若 x_0 的任意邻域内既有 E 的点,又有不属于 E 的点,则称 x_0 为 E 的界点,全体界点构成的点集称为 E 的边界.

(5) 开集与闭集:若 E 的每一个点均为它的内点,则称 E 为开集;若 E 的一切聚点均属于 E,则称 E 为闭集.

例 1.5.5 $E_1=(0,1)$为开集,$E_2=[0,1]$为闭集,E_1 与 E_2 有相同的界点,均为 0 和 1.

例 1.5.6 $E=\left\{x=\frac{1}{n}\middle|n=1,2,\cdots\right\}$的界点(亦为聚点)只有一个点 $x=0$,但 $x=0$ 不属于 E,故 E 不是闭集.又因为 E 的每一个点均不为内点,故它也不是开集.

1.6 实数点集的有界性与公理

1. 上界与下界

设 E 为实数点集，若对任意 $x\in E$，$\exists M\in\mathbb{R}$ 使 $x\leqslant M$，则称 M 为 E 的上界；$\exists m\in\mathbb{R}$，使 $x\geqslant m$ 时，称 m 为 E 的下界.

一般有界性的描述可以是如下命题：

对任意实数 $x\in E$，若 $\exists M>0$，使 $|x|\leqslant M$，则称 E 有界，界为 M. 事实上，$-M\leqslant x\leqslant M$.

【注】 提请读者特别注意，在序列和函数的有界性描述中有各种“趋向”的前提，方式很多，但这里讲的点集有界性描述是基础.

2. 上确界与下确界

有界集有无穷多个上界，其中有一个最为重要，即最小的上界，称为上确界；最大的下界称为下确界. E 的上确界与下确界分别记为 $\sup E$ 和 $\inf E$.

下面给出上确界 $\sup E$ 的一个等价性描述.

设 M 为 E 的一个上界（即对任意 $x\in E$，有 $x\leqslant M$），若对任意 $\varepsilon>0$，$\exists x_0\in E$，使得 $x_0>M-\varepsilon$，则称 M 为 E 的上确界.

读者不难给出 E 的下确界 $\inf E$ 的等价性描述.

【注】 数学中的等价性描述是至关重要的，一个概念的等价性描述，很可能成为处理某一问题的思路，为你打开一道思维的阀门.

数学家对实数集合的研究走过了一个漫长的道路，最终形成若干重要的公理，这些公理至今都是讨论和研究数学问题的共同基点，或叫做共识. 其中有两条公理对我们学好数学是至关重要的，即如下命题：

(1) 非空集合 E 若有上界，则必有上确界；若有下界，则必有下确界.

(2) 任意实数 x 与 y 的比较关系，在 $x>y$，$x=y$，$x<y$ 中，有且仅有一条为真.

1.7 函数及其初等性质

掌握初等函数的初等性质是重要的，也是基本的. 在一个复杂问题中，应力图避免由于函数的初等性质或概念模糊而造成的失误，这样的失误往往是惨重的，而其中的模糊与疏忽又是可以避免的，这里的关键就是对初等函数的表达及性质的表述应做到准确熟练. 函数的初等性质包括下列内容.

1. 单调性

对任意两点 $x_1,x_2\in X$，当 $x_1\leqslant x_2$ 时，恒有 $y_1,y_2\in Y$ 满足 $y_1\leqslant y_2$，其中 $y_1=f(x_1)$，