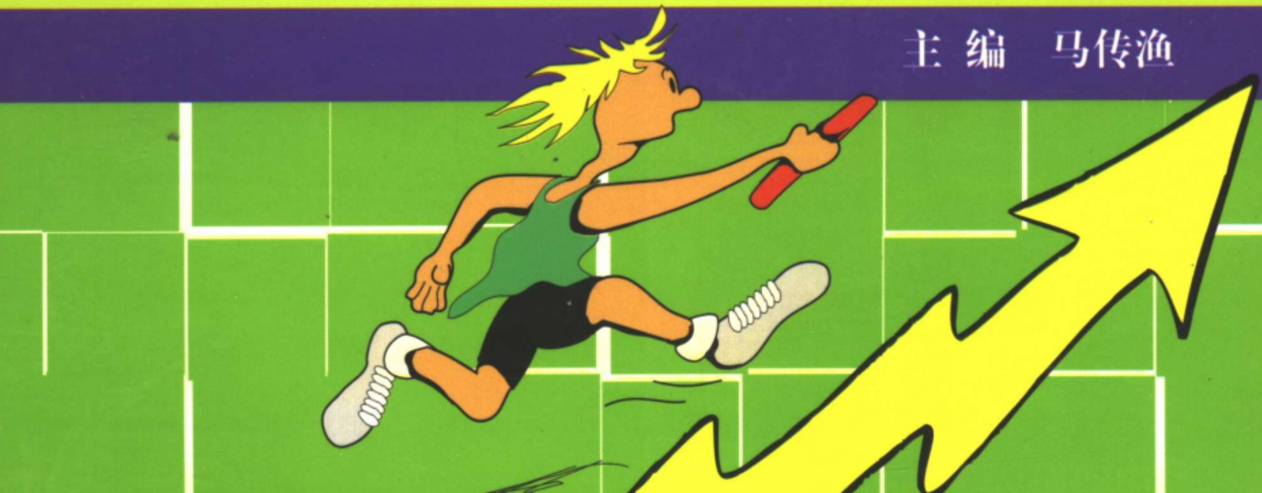
全国高中数学联赛

指导·提升·培训教材

主编 马传渔



南京大学出版社

拓宽知识 掌握方法
启迪思维 提高能力

赢得高考成功
争取竞赛获胜

⊙执行编辑 单 宁
⊙责任编辑 吴楚藩
⊙装帧设计 顾 群

ISBN 7-305-04285-4

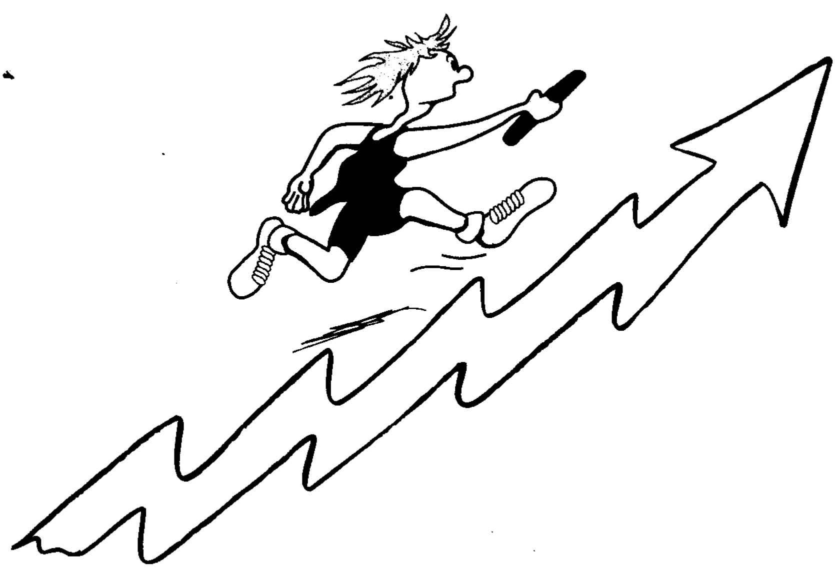
9 787305 042850 >

ISBN 7-305-04285-4/G·811
定价:22.00元

全国
高中数学联赛

指导·提升·培训教材

主编　马传渔



南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国高中数学联赛指导·提升·培训教材/马传渔主编.
—南京:南京大学出版社,2004.7
ISBN 7-305-04285-4

Ⅰ.全... Ⅱ.马... Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 044450 号

书　　名	全国高中数学联赛指导·提升·培训教材
主　　编	马传渔
出版发行	南京大学出版社
社　　址	南京市汉口路 22 号　邮编 210093
电　　话	025-83596923　025-83592317　传真 025-83328362
网　　址	http://press.nju.edu.cn
电子邮件	nupress1@publicl.ptt.js.cn
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	丹阳兴华印刷厂
开　　本	787×1092　1/16　印张 15.75　字数 393 千
版　　次	2004 年 7 月第 1 版第 2 次印刷
ISBN	7-305-04285-4/G·812
定　　价	22.00 元

前　言

全国高中数学联赛始于1956年，其后恢复于1978年，自那时起，每年10月中旬举行的全国高中数学联赛已步入规范化的道路.通过25年来竞赛的实践证明：这一拓宽知识、掌握方法、激发兴趣、启迪思维、发展智力、提高能力的竞赛活动，它为发现苗子、早出苗子、培养苗子，为国际数学奥林匹克(I. M. O.)选拔人才，摘取I. M. O.奖牌产生了巨大的作用，它已被全国越来越多的学生、老师和家长所认可和欢迎.

20多年来，我们曾组织江苏省和全国高中数学联赛，并多次参加全国高中数学联赛和国际数学奥林匹克的命题工作，一直企盼凭自身的经验和体会，编写一本实用的全国高中数学联赛的培训教材.南京大学出版社给予我们机会，《全国高中数学联赛指导·提升·培训教材》与读者见面了.

本书的编写宗旨有两个：一是注重提高读者的数学修养，注重知识的深化，注重方法的掌握、注重创新思想的培养，将高考和竞赛融为一体，能使读者的数学水平登上一个新的台阶，取胜于高考；二是通过对近八年全国高中数学联赛题型和内容的精析，向读者传授解决热点题、创新题、综合题的技巧和方法，能在解题中达到本质的升华，赢得全国高中数学联赛.

本书具有以下特色：

第一　可读性强.内容以高考题为起点，逐步提升到竞赛题.力求做到由浅入深、由易到难、由简单到综合；力求做到便于接受、便于自学.

第二　实用性好.高考是竞赛的基础，竞赛是高考的提升，相辅相成，彼此促进.全国高中数学联赛一试题贴近于高考，加试题源于高考、高于高考题，其知识结构，方法运用都是一致的.本书注意知识覆盖层面、注意知识交汇点处的知识板块，注意新课标的贯彻，加强向量法和微积分初步的内容的深化.本书将全国高中数学联赛一试内容分成六大块，在前面六讲进行辅导.同时针对加试中平面几何、代数计算、组合数学三类大题，在本书后面三讲作针对性较强的辅导，本书争取让读者在高考和竞赛中获胜.

第三　本书共有九讲，每讲设若干节，每节设有《知识框架》、《范例演示》、《方法聚焦》、《趋势预测》、《巩固训练》五个栏目.特别地，最后一个栏目又分拷贝训

练、冲刺训练两类题目进行训练.

第四　本书由命题专家、特级教师、I. M. O. 金牌得主指导教师、奥林匹克教练员编写而成.本书可作为数学爱好者提高自身数学素质,获得高考高分的读本,又可作为针对性较强的全国高中数学联赛的辅导教材,也可作为数学奥林匹克的培训教材,每节可讲授 1～2 次.

本书得到江苏省青少年科技中心冯少东主任的精心策划和关心,以及南京大学出版社的厚爱和支持,在此深表感谢.

"千里之行,始于足下."愿本书陪伴广大数学爱好者在汗水中积累知识,在灵感中启迪智慧,在拼搏中迎接成功.

马传渔

目　　录

第 1 讲 代数(一)

本书将“代数”板块知识分成三部分. 第一部分代数(一),即本讲共有六节:集合、函数的性质、指数函数与对数函数、函数方程、数列(一)和组合计数. 第二部分代数(二)为第 5 讲. 这两大部分都是代数中最基本的内容,它贴近高考、贴近全国高中数学联赛一试的内容和题型. 第三部分代数(三)为第 8 讲中前两节,主要是介绍递归数列和重要不等式,针对性强,为全国高中数学联赛加试作铺垫.

函数的单调性、奇偶性和周期性是函数部分最重要的内容,它不仅是研究各种不同函数的基础,而且是重要的理论基础;指数函数和对数函数是研究函数的主要载体;求解函数方程、组合计算一直是考试和竞赛的热点. 集合性质、数列、函数、不等式、计数融成一体,所形成的知识交汇点处的各类试题,已成为热门的课题.

第 1 节 集 合

【知识框架】

一、集合的概念与运算

1. 集合的概念、子集的概念与性质

(1) 给出集合 A 及一个对象 x,“$x\in A$”与“$x\notin A$”两者必居其一,元素与集合之间只有属于和不属于两种关系.

(2) 子集:任意 $x\in A\Rightarrow x\in B\Leftrightarrow A\subseteq B$.

真子集:$A\subseteq B$ 且 $A\neq B\Leftrightarrow A\subsetneqq B$.

(3) 一个 n 元集有 2^n 个子集,2^n-1 个真子集,2^n-1 个非空子集,2^n-2 个非空真子集.

2. 集合的运算与运算律

(1) 集合的运算

① 并集:$A\cup B=\{x\mid x\in A,或\ x\in B\}$.

② 交集:$A\cap B=\{x\mid x\in A,且\ x\in B\}$.

③ 补集:设 A 是全集 U 的子集,则 U 中子集 A 的补集:$C_UA=\{x\mid x\in U,但\ x\notin A\}$

(2) 集合的运算律

对于任意集合 A,B,C,有:

① $A\subseteq A$(自反性);

② $A\subseteq B,B\subseteq A\Rightarrow A=B$(反对称性);

③ $A\subseteq B,B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$(传递性);

④ $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$;

⑤ $A\cap A=A,A\cup A=A$(幂等律);

⑥ 设 U 为全集,则:

$A\cap U=A,A\cup U=U,A\cap\varnothing=\varnothing,A\cup\varnothing=A$(同一律);

⑦ $A\cap(C_UA)=\varnothing,A\cup(C_UA)=U,C_U(C_UA)=A,C_UU=\varnothing,C_U\varnothing=U$(互补律);

⑧ $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C,A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$(结合律);

⑨ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$(分配律);

⑩ $C_U(A\cap B)=(C_UA)\cup(C_UB),C_U(A\cup B)=(C_UA)\cap(C_UB)$(反演律).

二、充要条件、四种命题之间的关系

1. 充要条件

① 充分条件

对于命题"若 p 则 q"为真时，即如果 p 成立，那么 q 一定成立，记作"$p\Rightarrow q$"，称 p 是 q 的充分条件，意思是说条件 p 充分保证了 q 的成立，换句话说要使 q 成立，具备条件 p 就够了.

② 必要条件

如果 q 成立，那么 p 成立，即"$q\Rightarrow p$"，或者，如果条件 p 不成立，则 q 肯定不成立，亦即"非 p 则非 q"，记为"$\neg p\Rightarrow\neg q$"，这时我们就说条件 p 是 q 的必要条件，意思是说条件 p 是 q 成立的必要具备的条件.

③ 充要条件

如果"$p\Rightarrow q$"且"$q\Rightarrow p$"，则称条件 p 是 q 成立的充要条件，或称条件 q 是 p 成立的充要条件，记为"$p\Leftrightarrow q$".

④ 充分而不必要条件

如果"$p\Rightarrow q$"但"$q\nRightarrow p$"，则称 p 是 q 的充分而不必要条件.

⑤ 必要而不充分条件

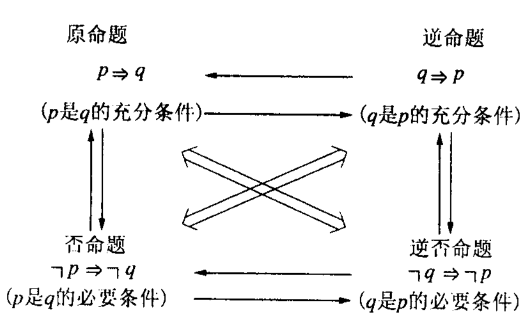
如果"$p\nRightarrow q$"但"$q\Rightarrow p$"，则称 p 是 q 的必要而不充分条件.

⑥ 既不充分也不必要条件

如果"$p\nRightarrow q$"且"$q\nRightarrow p$"，则称 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

2. 四种命题之间的关系

充分、必要条件的性质，实际上体现了原命题和它的逆命题、否命题和逆否命题之间的关系，可由如下关系表示：



3. 掌握判断充分、必要条件的三种方法

(1) 定义法：利用定义进行判断.

(2) 等价法：$p\Rightarrow q$ 等价于 $\neg q\Rightarrow\neg p$；$q\Rightarrow p$ 等价于 $\neg p\Rightarrow\neg q$；$p\Leftrightarrow q$ 等价于 $\neg q\Leftrightarrow\neg p$，即原命题与逆否命题等价；原命题的逆命题与原命题的否命题等价.

对于条件或结论中含有一些否定的语句，一般都可使用这种等价法.

(3) 集合关系法：如果条件 p 和结论 q 都是集合，那么若 $p\subseteq q$，则 p 是 q 的充分条件；若 $p\supseteq q$，则 p 是 q 的必要条件；若 $p=q$，则 p 是 q 的充要条件.

三、容斥原理

1. 容斥公式

(1) **容斥原理 1** 设 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为有限集，则

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.$$

当 n 分别取 2，3 时，便得到了容斥公式的简单形式，即以下两个推论.

(2) 两个推论：

推论 1 $|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$.

推论 2 $|A_1\cup A_2\cup A_3|=|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_2\cap A_3|-|A_3\cap A_1|+|A_1\cap A_2\cap A_3|$.

(3) **容斥原理 2** 设 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为有限集 U(全集)的子集，则

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right|=\left|\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}\right|=|U|-\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=|U|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\cdots+(-1)^n\left|\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right|.$$

2. 对应与集合计数

利用对应解决计数问题的关键是选择合适的集合 B(便于计数)，建立合适的映射关系.

设 f：$A\rightarrow B$ 为集合 A 到集合 B 的映射，则

若 f 为单射，则 $|A|\leqslant|B|$；

若 f 为满射，则 $|A|\geqslant|B|$；

若 f 为一一映射，则 $|A|=|B|$；

若 f 为倍数 m 的倍数映射，则 $|A|=m|B|$.

【范例演示】

例1 已知：$A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m\}$，$B=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m,a_{m+1},\cdots,a_{m+n}\}$. 求满足条件：$A\subseteq X\subseteq B$ 的集合 X 的个数.

解 由于 $A\subseteq B$，且 B 中的元素 a_{m+1}，a_{m+2}，$\cdots$，a_{m+n} 这 n 个元素均不属于 A. 于是满足条件 $A\subseteq X\subseteq B$ 的集合 $X=A\cup C$，其中 $C\subseteq D=\{a_{m+1},a_{m+2},\cdots,a_{m+n}\}$. 这样集合 X 的个数就是集合 $\{a_{m+1},a_{m+2},\cdots,a_{m+n}\}$ 的子集个数. 集合 $\{a_{m+1},a_{m+2},\cdots,a_{m+n}\}$ 是一个 n 元集，故它有 2^n 个子集. 满足条件的集合 X 的个数为 2^n 个.

注 1. 要解决此题，关键是要搞清楚满足条件 $A\subseteq X\subseteq B$ 的集合 X 是哪些元素组成的：(ⅰ) 因 $A\subseteq X$，故 X 包含了 A 中的所有元素；(ⅱ) 因 $X\subseteq B$，故 X 还包含有 B 中除了 A 中元素以外的部分元素(这里的部分元素包括 $\varnothing$ 与全体)，所以每一个满足条件的集合 X 对应了 $D=\{a\mid a\in B$ 但 $a\notin A\}$ 的一个子集，反之亦然. 故 X 的个数与 D 的子集个数相同.

2. 当改变条件 $A\subseteq X\subseteq B$ 中的"$\subseteq$"号为"$\subsetneqq$"时，有以下结论：

① 满足条件：$A\subseteq X\subsetneqq B$ 的集合 X 是集合 D 的真子集与 A 的并集，故 X 的个数为 2^n-1 个；

② 满足条件：$A\subsetneqq X\subseteq B$ 的集合 X 是集合 D 的非空子集与 A 的并集，故 X 的个数也为 2^n-1 个；

③ 满足条件：$A\subsetneqq X\subsetneqq B$ 的集合 X 是集合 D 的非空真子集与 A 的并集，故 X 的个数为 2^n-2 个.

3. 若问题改成：已知 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m\}$，$B=\{b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n\}$. 则满足条件：$A\subseteq X\subseteq A\cup B$ 的集合 X 的个数并不是 2^n. 原因是 $A\cup B$ 的元素个数并不是 $m+n$，而应该与 $A\cap B$ 的元素个数有关. 若 $A\cap B$ 的元素个数为 k，则 $A\cup B$ 的元素个数为 $m+n-k$. 所以在集合 $A\cup B$ 中除去集合 A 中的元素后，所剩的元素有 $n-k$ 个. 于是我们可知满足条件 $A\subseteq X\subseteq A\cup B$ 的集合 X 的个数为 2^{n-k} 个.

例2 已知集合 $A=\{x\mid x\neq 2n$ 或 $x\neq 3n,n\in\mathbf{N},x\in\mathbf{N},1\leqslant x\leqslant 1\,000\}$，试求出集合 A 的元素之和.

解 设 $U=\{1,2,3,4,\cdots,1\,000\}$，

则 $C_UA=\{x\mid x=2n$ 且 $x=3n,n\in\mathbf{N},1\leqslant x\leqslant 1\,000\}=\{x\mid x=6n,n\in\mathbf{N},1\leqslant x\leqslant 1\,000\}$.

于是集合 A 的元素之和 $=(1+2+3+\cdots+1\,000)-(6+12+18+\cdots+996)$

$=500\,500-83\,166=417\,334$.

注 1. 对于一个有限集 A，有时它的元素之和不易求出，但它的补集 C_UA 的元素之和恰容易求出，那么，此时我们可先求出 C_UA 的元素之和. 再利用：A 的元素之和等于全集的元素之和与 C_UA 的元素之和的差，就可求出 A 的元素之和.

2. 在求解过程中，在求 A 的补集时，要特别注意"$x\neq 2n$ 或 $x\neq 3n$"的否定是"$x=2n$ 且 $x=3n$"，从而得出"$x=6n(n\in\mathbf{N})$"后进行运算的.

例3 已知集合 A 与 B，及元素 x，试判断"$x\notin A$ 且 $x\notin B$"是"$x\notin A\cap B$"的什么条件?

解 考虑"$x\in A\cap B$"是"$x\in A$ 或 $x\in B$"的什么条件.

因由"$x\in A\cap B$"可推出"$x\in A$"与"$x\in B$"均成立，故"$x\in A$ 或 $x\in B$"成立.

反过来，由"$x\in A$ 或 $x\in B$"不能推出"$x\in A\cap B$".

所以"$x\in A\cap B$"是"$x\in A$ 或 $x\in B$"的充分不必要条件. 于是利用它的逆否命题与

原命题的等价性可知："$x\notin A$ 且 $x\notin B$"也是"$x\notin A\cap B$"的充分不必要条件.

注 1. 当进行由否定形式给出的命题之间的充要条件判断时，可以利用其逆否命题进行判断，即根据"A 是 B 的 p 条件"与"$\neg B$ 是 $\neg A$ 的 p 条件"(其中 p 是充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件及既不充分也不必要条件之一)之间的等价性，先确定 A 是 B 的什么条件后，则知 $\neg B$ 也是 $\neg A$ 的这个条件.

2. 这里还要注意："$x\notin A$ 且 $x\notin B$"的否定是"$x\in A$ 或 $x\in B$".

3. 类似地，不难判断："$x\notin A$ 且 $x\notin B$"是"$x\notin A\cup B$"的充分条件.

例4 由 1,2,3 组成的 n 位数，要求 n 位数中1,2 和 3 每一个至少出现一次，求所有这种 n 位数的个数.

解 设所有由 1,2,3 组成的 n 位数的集合记作全集 S，则 $|S|=3^n$. S 中不含 $i(i=1,2,3)$的 n 位集合记作 A_i，则 $|A_i|=2^n$，$|A_i\cap A_j|=1$,

$|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$，$i\neq j$，且 $i,j=1,2,3$. $\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}$ 为 S 中同时含有数字 1,2,3 的 n 位数的全体的集合. 由容斥原理，知

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=|S|-[|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_3|],$$

则 $|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=3^n-3\cdot 2^n+3$.

注 一般说来，问题中若出现"至少"、"至多"、"一定"、"不可能"等字词时，可考虑问题的反面. 本题在求解时，若直接分析 n 位数中 1,2,3 出现的次数就很复杂. 由于它的反面仅是一些特殊情形，故可利用它的反面(补集)去求得正面问题的解决，可以说这里运用了"正难则反"的解题策略.

例5 (2003 · I. M. O.)设 $S=\{1,2,\cdots,1\,000\,000\}$，$A$ 为 S 的一个恰包含 101 个元素的子集合.

求证：在 S 中存在数 $t_1,t_2\cdots,t_{100}$，使得下列集合

$$A_j=\{x+t_j\mid x\in A\}(j=1,2,\cdots,100)$$中的任意两个都不相交.

证明 考虑由 A 中任何两元素的差为元素形成的集合 $D=\{x-y\mid x,y\in A\}$，D 中至多有 $A_{101}^2+1=101\times100+1=10\,101$(个)元素. 易知两个集合 A_i 与 A_j 有非空的交集的充要条件为 $t_i-t_j\in D$. 于是，问题转化为只要能够选取 S 中的 100 个元素，其任何两元素之差均不属于 D.

归纳选取：首先任取一个元素 x，则对任意 $y\in D$，$x+y$ 都不能再被选取. 假设已选取 k 个元素，$k\leqslant 99$. 此时，至多有 $10\,101k\leqslant 999\,999$ 个元素不能选取. 因此，至少还有一个元素可以选取，则可选取第 $k+1$ 个元素. 如此下去，直至选取出 100 个满足条件的元素.

注 该题是存在性问题，但论证过程中，并没有将数 $t_1,t_2,\cdots,t_{100}$ 一一找出来，而是给出了一个归纳寻找的办法，并论述了其存在性，而求证的关键是构造了集合 D.

例6 (2000 · 俄罗斯)设 M 为有限数集，现知从它的任何 3 个元素中都可以找出两个数，它们的和属于 M. 试问：M 中最多可以有多少个元素?

解 集合 M 中最多有 7 个元素组成. 例如，取$\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$. 下面证明：对 $m\geqslant 8$，任何由 m 个数组成的数集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$都不具有所要求的性质. 不失一般性，可设 $a_1>a_2>a_3>\cdots>a_m$ 且 $a_4>0$(因为若把每个数都乘以 -1，不会改变它们的性质)，于是 $a_1+a_2>a_1+a_3>a_1+a_4>a_1$，从而和数 a_1+a_2，a_1+a_3，a_1+a_4 都不属于集合 A，并且和数 a_2+a_3 与 a_2+a_4 不可能同时属于集合 A，这是因为 $a_2+a_3>a_2$，$a_2+a_4>a_2$. 且 $a_2+a_3\neq a_2+a_4$，这样一来数组(a_1,a_2,a_3)和(a_1,a_2,a_4)中至少有一个组中任何两个数的和都不是 A 中的元素. 故集合 M 中的元素最多为 7 个.

注　由于本题问 M 中最多可以有多少个元素，所以我们可以试着先构造一个集合，看看这个集合的元素最多可以有多少．由题设，知集合 M 中任 3 个元素中一定有两个数的和仍在 M 中，所以我们猜想这种集合 M 中可以有 0，并且各元素关于 0 两边对称．由此可得一集合 $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ 满足题设要求，但在此集合中增加任意一个元素均不满足题意，所以猜测 M 中元素最多为 7 个．

【方法聚焦】

1. 对于竞赛中的集合问题，首先要正确理解其含义，弄清集合中的元素是什么，具有什么样的性质，读懂集合内在的意义；其次要简化集合，充分暴露集合中元素的性质．

2. 注意集合之间的关系及集合运算性质，注重常见的数学方法，例如：构造法，反证法等，以及一些数学思想，例如：从特殊到一般，从局部到整体等解题思想的灵活运用．

3. 集合的计数问题是竞赛中常见的题型，主要可用对应的方法或容斥原理加以解决．要深刻理解这些方法、原理的本质，并通过一定的练习加以强化和巩固(参见第 9 讲第 1 节)．

【趋势预测】

1. 集合语言的运用涉及到数学的各个领域，所以在竞赛题中，集合题是普遍而基本的题型之一．

2. 运用集合间的关系及运算性质，或将集合语言转换成图形语言是常用的解题方法．

3. 对集合元素的适当分类，构造具有不同性质的若干子集，然后运用容斥原理进行计数，是竞赛中考查分类思想及构造性技巧的主要方面．近几年来，集合的分类与计数已成为一个热门赛点．

【巩固训练】

一、拷贝训练

题 1　已知 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 且 $A\cap B$ 的元素个数为 l，则满足条件 $A\cap B\subseteq X\subseteq A\cup B$ 的集合 X 的个数为（　　）

A. $2^{m-1-n-l}$　　B. 2^{m+n-2l}

C. 2^{m+n}　　D. 2^{m+n+l}

题 2　“$x\notin A$ 或 $x\notin B$”是“$x\notin A\cup B$”的（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

题 3　某班语文、数学、外语三门课程考试成绩统计结果为：至少有一门课得满分的学生有 18 人，语文得满分的有 9 人，数学得满分的有 11 人，外语得满分的有 8 人，语文、数学都得满分的有 5 人，数学、外语都得满分的有 3 人，语文、外语都得满分的有 4 人，问：

(1) 语文、数学两门课至少有一门得满分的学生有多少人？

(2) 语文、数学、外语三门课都得满分的学生有多少人？

题 4　设 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant a\}$，$B=\{y\mid y=2x+3,x\in A\}$，$C=\{z\mid z=x^2,x\in A\}$，且 $C\subseteq B$．求实数 a 的取值范围．

二、冲刺训练

题 1　(2000·全国高中)设全集 U 是实数集，若 $A=\{x\mid \sqrt{x-2}\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid 10^{x^2-2}=10^x\}$，则 $A\cap C_UB$ 是（　　）

A. $\{2\}$　　B. $\{-1\}$

C. $\{x\mid x\leqslant 2\}$　　D. $\varnothing$

题 2　(2001·全国高中)已知 a 为给定的实数，那么，集合 $M=\{x\mid x^2-3x-a^2+2=0,x\in\mathbf{R}\}$ 的子集合个数为（　　）

A. 1　　B. 2

C. 4　　D. 不确定

题 3　(2003·全国高中)已知 $A=\{x\mid x^2-4x+3<0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid 2^{1-x}+a\leqslant 0,x^2-2(a+7)x+5\leqslant 0,x\in\mathbf{R}\}$．若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是________．

题4 (2001 · C. M. O.)设 $X=\{1,2,\cdots,2\,001\}$.求最小正整数 m 适合要求：对 X 的任何一个 m 元子集 W，都存在 $u,v\in W$(u 和 v 可以相同)，使得 $u+v$ 是2的方幂.

第2节 函数的性质

【知识框架】

1. 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调递增(或递减)，且 $f(x)$ 的值域为 E，则它在 I 上必有反函数，且反函数在 E 上必是单调递增(或递减)函数.

特别地，单调函数必有反函数，且反函数的单调性与原函数一致.

2. 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I_1 和 I_2 上单调递增(或递减)，且 $I_1\cap I_2\neq\varnothing$，则 $f(x)$ 在区间 $I_1\cup I_2$ 上也是单调递增(或递减)的，若 $I_1\cap I_2=\varnothing$，则不一定成立.

3. 设函数 $y=f(x)$ 定义在 D_f 上，$\mu=g(x)$ 定义在 D_g，且 $g(x)$ 的值域 $D\subseteq D_f$，则有结论如下表：

$f(\mu)$	$g(x)$	$f[g(x)]$
增	增	增
减	减	增
减	增	减
增	减	减

4. 已知函数 $y=f(x)$，若存在常数 M，使得对于所有 $x\in A$，都有 $f(x)\leqslant M$(或 $f(x)\geqslant M$)，则称 $y=f(x)$ 在 A 上有上界(或下界)，称 M 为它的一个上(或下)界. 若 $y=f(x)$ 既有上界，又有下界，则称 $y=f(x)$ 为 A 上的有界函数.

5. 对于周期函数 $y=f(x)$，如果 T 是它的周期，则 $nT(n\in\mathbf{N}^*)$ 也是它的周期，周期函数的定义域不会是一个有限区间.

6. 对于定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$，若存在常数 a，使得

(1) $f(a-x)=f(a+x)$ 或 $f(x)=f(2a+x)$，则称 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的广义偶函数；

(2) $f(a-x)=-f(a+x)$ 或 $f(x)=-f(2a+x)$，则称 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的广义奇函数.

显然，当 $a=0$ 时，即分别为一般的奇、偶函数.

广义偶函数的图像关于直线 $x=a$ 对称；广义奇函数的图像关于点 $(a,0)$ 成中心对称.

7. 函数图像的变换

(1) 平移变换

$y=f(x-a)$ 是将函数 $y=f(x)$ 的图像向右($a>0$)或向左($a<0$)平移 $|a|$ 个单位；

$y=f(x)+b(b\neq0)$ 是将函数 $y=f(x)$ 的图像向上($b>0$)或向下($b<0$)平移 $|b|$ 个单位；

(2) 翻折变换

$y=|f(x)|$ 的图像可以看作把 $y=f(x)$ 在 x 轴上方的图像保持不变，在 x 轴下方的图像沿 x 轴向上翻折后而得到.

$y=f(|x|)$ 的图像可以看作把 $y=f(x)$ 在 y 轴右方的图像保持不变，在 y 轴左方的图像擦掉，再将 $y=f(x)$ 在 y 轴右方的图像沿 y 轴向左翻折后而得到.

$x=f(y)$ 的图像可以看作将函数 $y=f(x)$ 的图像关于 $y=x$ 翻折后得到.

(3) 伸缩变换

$y=f(ax)(a>0)$ 的图像可以看作将函数 $y=f(x)$ 的图像沿 x 轴方向向 y 轴压缩($a>1$)或伸长($0<a<1$)到原来的 $\frac{1}{a}$ 倍后所得.

$y=bf(x)(b>0)$ 的图像可以看作将函数 $y=f(x)$ 的图像沿 y 轴方向向 x 轴伸长($b>1$)或压缩($0<b<1$)到原来的 b 倍后所得.

【范例演示】

例1 (2002 · 重庆)已知奇函数 $f(x)$ 在定义域 $[-2,2]$ 上是单调增函数，且

$f(2a-2)+f(a^2-a)>0$,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $1<a\leqslant 2$　　B. $0\leqslant a\leqslant 2$

C. $-1\leqslant a\leqslant 2$　　D. $a<-2$ 或 $a>2$

解 因为 $f(x)$是奇函数,且 $f(2a-2)+f(a^2-a)>0$,所以

$f(2a-2)>-f(a^2-a)=f(-a^2+a)$.

又因为 $f(x)$在定义域$[-2,2]$内是单调增函数,所以$\begin{cases}-2\leqslant 2a-2\leqslant 2,\\-2\leqslant -a^2+a\leqslant 2,\\2a-2>-a^2+a.\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}0\leqslant a\leqslant 2,\\1\leqslant a\leqslant 2,\\a>1\text{ 或 }a<-2.\end{cases}\Rightarrow 1<a\leqslant 2.$$

所以实数 a 的取值范围是 $1<a\leqslant 2$,故选 A.

注 本题综合考察了函数奇偶性和单调性,解答过程中充分运用了函数的这两种性质.同时在解答过程中应时刻顾及函数的定义域.解决该题的关键是将不等式 $f(2a-2)+f(a^2-a)>0$ 转化为 $f(2a-2)>-f(a^2-a)$,这为运用函数的奇偶性和单调性创造了条件.

例2 讨论函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}(a\neq 0)$的单调性.

解 方法一 设 $x_1>x_2$,则

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)+\frac{a}{x_1}-\frac{a}{x_2}$$
$$=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}(x_1x_2-a).$$

(1) 当 $a<0$ 时,若 $x_1>x_2>0$,则有 $f(x_1)-f(x_2)>0$,

所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$内为增函数.

又因为 $f(x)$是奇函数,所以 $f(x)$在$(-\infty,0)$内也为增函数.

(2) 当 $a>0$ 时,若 $x_1>x_2\geqslant\sqrt{a}$,则 $x_1x_2>a$,故 $f(x_1)>f(x_2)$.于是 $f(x)$在$[\sqrt{a},+\infty)$内为增函数.

若$\sqrt{a}\geqslant x_1>x_2>0$,则 $0<x_1x_2<a$,故 $f(x_1)<f(x_2)$.于是 $f(x)$在$(0,\sqrt{a}]$上为减函数.

又因为 $f(x)$是奇函数,所以

$f(x)$在$[-\sqrt{a},0)$内是减函数,在区间$(-\infty,-\sqrt{a})$内是增函数.

综上所述,当 $a<0$ 时,$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$;

当 $a>0$ 时,$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,-\sqrt{a}]$和$[\sqrt{a},+\infty)$,

单调递减区间为$[-\sqrt{a},0)$和$(0,\sqrt{a}]$.

方法二 利用导数知识求解.

因为 $f'(x)=1-\frac{a}{x^2}=\frac{x^2-a}{x^2}$,

(1) 当 $a<0$ 时,$f'(x)>0$,故 $f(x)$在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$内都是增函数.

(2) 当 $a>0$ 时,由 $f'(x)=\frac{x^2-a}{x^2}\geqslant 0$,有 $x\leqslant-\sqrt{a}$或 $x\geqslant\sqrt{a}$,

所以 $f(x)$在$(-\infty,\sqrt{a}]$和$[\sqrt{a},+\infty)$内是增函数;

由 $f'(x)=\frac{x^2-a}{x^2}\leqslant 0$,有$-\sqrt{a}\leqslant x\leqslant\sqrt{a}$,且 $x\neq 0$,

所以 $f(x)$在$[-\sqrt{a},0)$和$(0,\sqrt{a}]$内是减函数.

注 通过以上两种解法的比较,我们不难发现运用导数知识讨论函数的单调性具有其独特的优势,但由于比较复杂的复合函数的导数不易求出,所以在讨论函数的单调性时要根据具体问题来决定采用哪种方法.

方法一注意到函数的奇偶性,可使问题解答得以简化.另外,讨论了这类函数的单调性之后,就可以据此画出这类函数的简图,于是这类函数在定义域上的最值就很清楚了,利用这类函数在定义域上的单调性可以解决很多问题,应注意掌握.

例3 对于满足 $0\leqslant p\leqslant 4$ 的一切实数,

不等式 $x^2+px>4x+p-3$ 恒成立，试求 x 的取值范围.

解 不等式 $x^2+px>4x+p-3$ 很容易让我们联想到二次函数：

$$f(x)=x^2+(p-4)x+3-p.$$

基于这种认识，本题实质上就是：对于二次曲线系

$f(x)=x^2+(p-4)x+3-p(0\leqslant p\leqslant 4)$，考虑使得 $f(x)>0$ 恒成立的 x 的取值范围.

对于每一个给定的 p，由于 $f(x)=0$ 的二根分别为 $1,3-p$，记 $u(p)=\max(1,3-p)$，$v(p)=\min(1,3-p)$，则 $f(x)>0$ 的解集为：

$$M(p)=(-\infty,v(p))\cup(u(p),+\infty).$$

所以，当 p 在区间 $[0,4]$ 上变化时，使得 $f(x)>0$ 恒成立的 x 的取值范围就是所有 $M(p)$ 的交集.

因为 $0\leqslant p\leqslant 4$，所以，$u(p)$ 的最大值为 3，$v(p)$ 的最小值为 -1.

所以，本题的答案应该为：$(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

上述解法实际上源于我们思维的一种定势，即习惯于把 x 当作变量，而把其余的字母作为参数. 而事实上，在上面的不等式中，x 与 p 的地位是平等的. 如果我们换一个角度看问题，即把 p 作为自变量，而把 x 作为参数，则可以得到下面的另一种较为简洁的解法：

考虑关于 p 的函数：$g(p)=(x-1)p+(x^2-4x+3)$.

可以看到：$g(p)$ 是关于 p 的一次函数或常数函数，要使得对于满足 $0\leqslant p\leqslant 4$ 的一切实数，$g(p)>0$ 恒成立，由函数的单调性，知，需且只需：$\begin{cases}g(0)>0,\\ g(4)>0.\end{cases}$

解之，得 $x>3$ 或 $x<-1$.

注 1. 不等式与函数有着千丝万缕的联系，通过适当的转化，可以使得问题的表述更接近于我们熟悉的知识，从而得解. 2. 注意利用函数的性质解题. 3. 注重问题的本质. 在熟悉通性通法的同时，要敢于打破思维定势，换一个角度看问题.

例 4 设 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的偶函数，$g(x)$ 与 $f(x)$ 的图像关于直线 $x-1=0$ 对称，且当 $x\in[2,3]$ 时，$g(x)=2a\cdot(x-2)-4(x-2)^3(a\in\mathbf{R})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的表达式；

(2) 在 $a\in(2,6]$ 或 $(6,+\infty)$ 的情况下，分别讨论函数 $f(x)$ 的最大值，并指出 a 为何值时，$f(x)$ 的图像的最高点恰好落在直线 $y=12$ 上.

解 方法一 (1) 注意到 $g(x)$ 是定义在区间 $[2,3]$ 上的函数，因此，根据对称性，我们只要求出 $f(x)$ 在区间 $[-1,0]$ 上的解析式. $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的解析式，则可以根据函数的奇偶性求得.

当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，$2\leqslant 2-x\leqslant 3$. 由于 $g(x)$ 与 $f(x)$ 关于直线 $x-1=0$ 对称，所以，$f(x)=g(2-x)=2a\cdot(2-x-2)-4(2-x-2)^3=4x^3-2ax$.

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$-1\leqslant -x\leqslant 0$，由 $f(x)$ 为偶函数，可知：

$f(x)=f(-x)=4(-x)^3-2a(-x)=-4x^3+2ax$.

$$所以，f(x)=\begin{cases}-4x^3+2ax, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 4x^3-2ax, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

(2) 因为 $f(x)$ 为偶函数，所以，$f(x)(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 的最大值，必等于 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值. 故只需考虑 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的情形. 此时，$f(x)=-4x^3+2ax$.

对于这个三次函数，要求其最大值，比较容易想到的方法是：考虑其单调性. 因此，我们不妨在区间 $[0,1]$ 上任取 x_1,x_2，设 $x_1<x_2$，则

$f(x_1)-f(x_2)=(-4x_1^3+2ax_1)-(-4x_2^3+2ax_2)$

$=2(x_2-x_1)(2x_2^2+2x_1x_2+2x_1^2-a)$.

如果 $a\in(6,+\infty)$，则 $2x_2^2+2x_1x_2+2x_1^2-a<0$，故 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递增. 所以，$f(x)$ 的最大值在 $x=1$ 取得，最大值为 $f(1)=2a-4$.

令 $f(1)=2a-4=12$. 解得：$a=8$.

如果 $a\in(2,6]$，则 $2x_2^2+2x_1x_2+2x_1^2-a$ 的符号不能确定，为确定 $f(x)$ 的单调区间，可令 $2x_2^2+2x_1x_2+2x_1^2-a<0$.

由于 $x_1<x_2$，要使上式成立，只需：$2x_2^2+2x_2x_2+2x_2^2-a\leqslant 0$，即 $x_2\leqslant\sqrt{\frac{a}{6}}$，由此我们不难得知：

$f(x)$ 在区间 $\left[0,\sqrt{\frac{a}{6}}\right]$ 上单调递增，在区间 $\left[\sqrt{\frac{a}{6}},1\right]$ 上单调递减.

所以，$f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right)=\frac{2a\sqrt{6a}}{9}$.

令 $f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right)=\frac{2a\sqrt{6a}}{9}=12$，解之，得 $a=3\sqrt[3]{18}>6$，与 $a\in(2,6]$ 矛盾.

综上可知：当 $a\in(2,6]$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $f\left(\pm\sqrt{\frac{a}{6}}\right)=\frac{2a\sqrt{6a}}{9}$；当 $a\in(6,+\infty)$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $f(\pm 1)=2a-4$，
并且，当 $a=8$ 时，函数 $f(x)$ 的图像的最高点恰好落在直线 $y=12$ 上.

显然，上述解法比较繁琐，若用导数知识解答该题第二问，可以得到以下比较简单的解法.

方法二 由已知 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的偶函数，据此只需讨论函数 $f(x)=-4x^3+2ax$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值即可.

这样原问题就转化为讨论函数 $f(x)=4x^3-2ax$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值.

因为 $f'(x)=-12x^2+2a$. 当 $f'(x)=-12x^2+2a=0$ 时，可得 $x=\sqrt{\frac{a}{6}}$，即 $x=\sqrt{\frac{a}{6}}$ 可能是函数 $f(x)=-4x^3+2ax$ 在区间 $[0,1]$ 上的一个极值.

（ⅰ）当 $a\in(2,6]$ 时，$\sqrt{\frac{a}{6}}\in\left(\sqrt{\frac{1}{3}},1\right]$.

此时，$x=\sqrt{\frac{a}{6}}$ 是 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的一个极值点. 又因为当 $x\in\left[0,\sqrt{\frac{a}{6}}\right]$ 时，$f'(x)\geqslant 0$；当 $x\in\left[\sqrt{\frac{a}{6}},1\right]$ 时，$f'(x)\leqslant 0$，所以 $f(x)=-4x^3+2ax$ 在区间 $\left[0,\sqrt{\frac{a}{6}}\right]$ 上单调递增，在区间 $\left[\sqrt{\frac{a}{6}},1\right]$ 上单调递减.

所以，$f(x)_{\max}=f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right)=\frac{2a\sqrt{6a}}{9}$.

令 $f(x)_{\max}=f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right)=\frac{2a\sqrt{6a}}{9}=12$.

解之，得 $a=3\sqrt[3]{18}>6$，与 $a\in(2,6]$ 矛盾. 此时，函数 $f(x)$ 的图像的最高点不可能落在直线 $y=12$ 上.

（ii）当 $a\in(6,+\infty)$ 时，$\sqrt{\frac{a}{6}}>1$. 此时，$x=\sqrt{\frac{a}{6}}$ 不在区间 $[0,1]$ 上.

又因为当 $x\in[0,1]$ 时，$f'(x)\geqslant 0$；所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，所以，$f(x)_{\max}=f(1)=2a-4$.

令 $f(x)_{\max}=f(1)=2a-4=12$. 解之，得 $a=8$，即当 $a=8$ 时，函数 $f(x)$ 的图像的最高点恰好落在直线 $y=12$ 上.

综上所述，在 $a\in(2,6]$ 时，$f(x)_{\max}=f\left(\pm\sqrt{\frac{a}{6}}\right)=\frac{2a\sqrt{6a}}{9}$；

在 $a\in(6,+\infty)$ 时，$f(x)_{\max}=f(\pm 1)=2a-4$；

当 $a=8$ 时，函数 $f(x)$ 的图像的最高点恰好落在直线 $y=12$ 上.

注 1. 本题中，$a\in(2,6]$ 时，运用单调