普通高等教育"十五"国家级规划教材

拓扑学基础

梁基华　蒋继光　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十五”国家级规划教材

拓扑学基础

梁基华　蒋继光　编著

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

拓扑学基础 / 梁基华，蒋继光编著．—北京：高等教育出版社，2005.4
ISBN 7-04-016392-6

Ⅰ.拓...　Ⅱ.①梁...②蒋...　Ⅲ.拓扑-高等学校-教材　Ⅳ.O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 017320 号

策划编辑 徐　可　**责任编辑** 张耀明　**封面设计** 王凌波　**责任绘图** 宗小梅
版式设计 王　莹　**责任校对** 王　超　**责任印制** 韩　刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		

开　　本	787×960　1/16	版　　次	2005 年 4 月第 1 版
印　　张	9.5	印　　次	2005 年 4 月第 1 次印刷
字　　数	170 000	定　　价	10.60 元

物料号　16392-00

前　言

拓扑学起源于17—18世纪一些孤立问题的研究，如著名的哥尼斯堡七桥问题、四色问题、若尔当(C. Jordan)曲线定理等。这些问题最终归结为研究几何图形在某种连续变形(即同胚变换)下保持不变的性质。19世纪末期，随着点集理论的开创，公理化方法的兴起，几何学与分析学的发展需要，促成了拓扑学作为一门学科而形成。

经过一个世纪的发展，拓扑学已是根深叶茂，成为数学中的一个重要分支。其理论与思想几乎渗透到数学的所有领域，同时在数学以外的多个学科如物理、化学、计算机科学等也有着重要的应用。拓扑学课程是大学数学系的一门重要的基础课。

拓扑学具有多个分支，丰富的内容。作为本科生的一门为时一学期的课程，其内容的取舍与编排有较多的选择。纵观国内外已有的拓扑学教材，其选材与风格也是多种多样。本教材是为适应我校课程体系的改革，应教学所需而编写的。编写的基本想法是力图从方法论角度统一拓扑学的基础内容，注重拓扑学各分支的内在联系与统一，突出严密的逻辑推理与几何直观并重，体现某些经典内容的现代化处理。

教材共分五章，第一章作为学习拓扑学课程的必要准备，介绍关于集合、映射以及序结构的基本概念和相关结果。第二章是拓扑学最基础的内容，介绍拓扑空间及其相关的基本概念、拓扑空间上的极限理论、连续映射与同胚、构造拓扑空间的基本方法等。第三章属于一般拓扑学最经典和最重要的内容，介绍正规空间与完全正则空间、紧空间和紧化理论、度量空间、连通与道路连通空间。学习中注意抽象概念产生的背景是重要的，这不仅有助于抽象思维和逻辑推理能力的训练，并由此可体会到拓扑学问题的分析式处理的传统手法。第四章属于代数拓扑学中最简单和最直观的内容，介绍商空间与闭曲面、基本群及其计算和应用。我们强调抽象的理论与具体的应用、几何直观与严格的逻辑证明的紧密结合。本书最后一章反映处理拓扑学问题的另一思路，介绍以序结构的方法处理拓扑学的问题。内容有连续格与局部紧空间、Sober空间、Boolean代数的拓扑表示定理等。拓扑与序结构的相互结合，不仅为研究拓扑学提供了新的角度，同时加强了拓扑学与其他学科的联系，拓广了拓扑学应用的途径。

本书是拓扑学的入门教材，大约可在64学时内讲完全部内容。当然根据不同学时的限制或不同要求，可以只讲前面3章作为一般拓扑学的入门内容，也可

以只讲前面4章,或者讲授1—3章和第5章。

需要指出的是在本书编写过程中,参考了多部拓扑学教材和有关书籍,在此向这些教材和书籍的作者致以诚挚的谢意。张德学教授阅读了书稿全文,提出了宝贵的建议。黄方平和索剑峰同志在绘图方面给予了帮助。本书曾作为讲义在四川大学数学学院两届学生和2004年西部高校教师培训班使用,多位老师和同学指出了本书不少疏漏之处,在此一并致谢。

本教材的完成与出版得到了教育部设立的国家理科基地创名牌课程项目和十五规划教材项目的资助,四川大学刘应明院士的关心与鼓励,四川大学数学学院领导的支持与帮助,编者值此表示衷心的感谢。

编 者

2004年11月于四川大学

目　录

第一章　集、映射与序结构

作为准备,这一章给出本书所需的有关集合、映射以及序结构的一些基本概念和结果,同时统一符号与术语.

§1.1　集及其运算

与大多数拓扑学教材一样,本书采用朴素的集合论观点,把集看作是最原始的数学概念.一个集是由具有某种特征的对象所组成的一个整体,集的对象称为它的元或点.$x\in A$ 表示 x 是 A 的元,称作 x 属于 A.否则称 x 不属于 A,记作 $x\notin A$.

由集作为元构成的集称为集族.自然可继续形成以集族为元的集,以集族的集族为元的集,统称为集族.为了区别集族的元,常对集族的元赋予指标.如集族 $\mathscr{A}=\{A_i:i\in\triangle\}$,这里集 $\triangle$ 称为 $\mathscr{A}$ 的指标集.

仅有一个元的集叫单点集,具有有限个元的集叫有限集.对于有限集,最方便的表示是在花括号里列出它的所有元.如 $\{a,b,c,d\}$.一般地,常用 $\{x:\varphi(x)\}$ 表示满足条件 φ 的所有 x 构成的集.如本书常用的正整数集 $\mathbf{N}_+=\{n:n$ 是正整数$\}$,实数集 $\mathbf{R}=\{x:x$ 是实数$\}$ 以及有理数集 $\mathbf{Q}=\{r:r$ 是有理数$\}$.约定不含有任何元的集叫空集,记作 $\varnothing$.

集之间最基本的关系是包含和相等.如果集 A 的元都是集 B 的元,即若 $x\in A$ 则 $x\in B$,称 A 是 B 的子集,记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$,分别读作 A 含于 B 和 B 包含 A.若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则称 A 与 B 相等,用 $A=B$ 表示.若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$,称 A 是 B 的真子集.显然空集是任一集的子集.x 是 A 的元当且仅当 $\{x\}\subseteq A$.

对任意给定的集,可以构造各种新的集,称为集的运算.

(a) 幂集与补集

对任一集 X,由 X 的所有子集为元构成的集

$$\mathscr{P}X=\{A:A\subseteq X\}$$

称为 X 的幂集.$\mathscr{P}X$ 的每个子集 $\mathscr{A}$ 称为 X 的一个子集族.

我们也常用 $\{x\in X:\varphi(x)\}$ 表示由 X 中满足条件 φ 的元所构成的 X 的子集.如果一个讨论总是限定在给定集 X 内,称 X 是基础集.

对任意集 A,B,集

$$A\setminus B=\{x:x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$$

称为 A 与 B 的补集.若 X 作为基础集,则 $X\setminus B$ 简称为 B 的补集.记作 B^c.

(b) 并集与交集

对两个集 A,B,它们的并集 $A\cup B=\{x:x\in A$ 或 $x\in B\}$,交集 $A\cap B=\{x:x\in A$ 且 $x\in B\}$.下面给出任意多个集的并集和交集.

定义 1.1.1 设 X 是一个集,$\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}X$,$A,B\in\mathscr{P}X$.

(1) 集 $\bigcup\mathscr{A}=\{x\in X:\exists A\in\mathscr{A},x\in A\}$ 称为 $\mathscr{A}$ 的并集,也记作 $\bigcup\{A:A\in\mathscr{A}\}$;

(2) 集 $\bigcap\mathscr{A}=\{x\in X:\forall A\in\mathscr{A},x\in A\}$ 称为 $\mathscr{A}$ 的交集,也常记为 $\bigcap\{A:A\in\mathscr{A}\}$.

这里"$\exists A$"表示"存在 A",或"至少有一个 A"."$\forall A$"表示"对每个 A".

注意当 $\mathscr{A}$ 为空族时,X 中每个元 x 都不满足 $\mathscr{A}$ 的并集的条件,因此 $\bigcup\mathscr{A}=\varnothing$.由于空族不含有集,基础集 X 中每个元满足 $\mathscr{A}$ 的交集的条件"$\forall A\in\mathscr{A},x\in A$",这样我们约定 $\bigcap\mathscr{A}=X$.

若 $\mathscr{A}=\{A_i:i\in\triangle\}$,$\bigcup\mathscr{A}$ 常记为 $\bigcup_{i\in\triangle}A_i$.当 $\mathscr{A}=\{A_i:i=1,2,\cdots,n\}$ 是有限族时,$\bigcup\mathscr{A}$ 也记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$.对交集的情形可类似地表示.

为了方便表达,本书常用"$\Rightarrow$"表示逻辑蕴涵"如果…,则…";用"$\Leftrightarrow$"表示逻辑等价"当且仅当".

命题 1.1.2 设 $\mathscr{A}=\{A_i:i\in\triangle_1\}$,$\mathscr{B}=\{B_j:j\in\triangle_2\}\subseteq\mathscr{P}X$,$A,B\in\mathscr{P}X$.

(1) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B^c=\varnothing\Leftrightarrow A^c\cup B=X\Leftrightarrow B^c\subseteq A^c$;

(2) $(\bigcup_{i\in\triangle_1}A_i)\cap(\bigcup_{j\in\triangle_2}B_j)=\bigcup\{A_i\cap B_j:i\in\triangle_1,j\in\triangle_2\}$,

$(\bigcap_{i\in\triangle_1}A_i)\cup(\bigcap_{j\in\triangle_2}B_j)=\bigcap\{A_i\cup B_j:i\in\triangle_1,j\in\triangle_2\}$;

(3) De Morgen 公式

$$X\setminus\bigcup_{i\in\triangle_1}A_i=\bigcap\{X\setminus A_i:i\in\triangle_1\},$$

$$X\setminus\bigcap_{i\in\triangle_1}A_i=\bigcup\{X\setminus A_i:i\in\triangle_1\}.$$

证 只证(2)的第一个式子,其余留作练习.

设 $x\in(\bigcup_{i\in\triangle_1}A_i)\cap(\bigcup_{j\in\triangle_2}B_j)$,则 $x\in\bigcup_{i\in\triangle_1}A_i$ 且 $x\in\bigcup_{j\in\triangle_2}B_j$.于是存在 $i_0\in\triangle_1,j_0\in\triangle_2$,使 $x\in A_{i_0}$ 且 $x\in B_{j_0}$.这样 $x\in A_{i_0}\cap B_{j_0}\subseteq\bigcup\{A_i\cap B_j:i\in\triangle_1,j\in\triangle_2\}$.即 $(\bigcup_{i\in\triangle_1}A_i)\cap(\bigcup_{j\in\triangle_2}B_j)\subseteq\bigcup\{A_i\cap B_j:i\in\triangle_1,j\in\triangle_2\}$.

反之由 $x\in\bigcup\{A_i\cap B_j:i\in\triangle_1,j\in\triangle_2\}$,存在 $i_0\in\triangle_1,j_0\in\triangle_2$,使 $x\in A_{i_0}\cap B_{j_0}$.于是 $x\in\bigcup_{i\in\triangle_1}A_i$ 且 $x\in\bigcup_{j\in\triangle_2}B_j$,即 $x\in(\bigcup_{i\in\triangle_1}A_i)\cap(\bigcup_{j\in\triangle_2}B_j)$.因此等式成立. □

(c) 笛卡儿(Descartes)积与商集

定义 1.1.3　设 X,Y 是两个集. X 与 Y 的笛卡儿积 $X\times Y$ 是有序对构成的集:

$$X\times Y=\{(x,y):x\in X,y\in Y\},$$

x,y 分别称为有序对 (x,y) 的第一和第二个坐标. 两个有序对相等 $(x,y)=(u,v)$ 当且仅当 $x=u$ 且 $y=v$.

显然,当 X,Y 之一为空集时, $X\times Y=Y\times X=\varnothing$.

为了不致与有序对混淆,实数集的区间表示如下:

$$[a,b]=\{x\in\mathbf{R}:a\leqslant x\leqslant b\},\quad]a,b[=\{x\in\mathbf{R}:a<x<b\},$$

$$]a,+\infty[=\{x\in\mathbf{R}:a<x\},\quad]-\infty,b]=\{x\in\mathbf{R}:x\leqslant b\},$$

其余的区间可类似地表示. 我们常用 I 表示闭单位区间 $[0,1]$.

为了构造商集,我们需要关系的概念,它是通常关系的数学抽象,许多重要的数学对象都是一些特殊的关系.

定义 1.1.4　设 X,Y 是两个集.

(1) $X\times Y$ 的每个子集 E 叫做一个关系. 若 $(x,y)\in E$,则称 x 与 y 满足关系 E,常记作 xEy.

若 $\forall x\in X,\exists y_x\in Y$,使 $(x,y_x)\in E$,称 E 是从 X 到 Y 的一个关系. 此时若还有 $Y=X$,简称 E 是 X 上的一个关系.

(2) 设 E 是 X 到 Y 的一个关系, $A\subseteq X$.

$$E[A]=\{y\in Y:\exists x\in A,(x,y)\in E\}$$

称为 A 在关系 E 下的像, $E[\{x\}]$ 简记为 $E[x]$.

显然 $X\times Y$ 是 X 到 Y 的一个关系, $Y\times X$ 是 Y 到 X 的一个关系. 对任一集 X, $\triangle(X)=\{(x,x):x\in X\}$ 是 X 上的一个关系,称为 X 上的恒同关系,也称为 X 的对角线.

例 1.1.5　设 $X=\{2,6,8\}$. 则

X 上的整除关系为　$U=\{(2,2),(6,6),(8,8),(2,6),(2,8)\}$,

X 上的严格小于关系为　$V=\{(2,6),(2,8),(6,8)\}$.

定义 1.1.6　设 E 是 X 上的一个关系.

(1) E 是 X 上的对称关系 $\Leftrightarrow$ 若 $(x,y)\in E$,则 $(y,x)\in E$;

(2) E 是 X 上的自反关系 $\Leftrightarrow\forall x\in X,(x,x)\in E$;

(3) E 是 X 上的传递关系 $\Leftrightarrow$ 若 $(x,y),(y,z)\in E$,则 $(x,z)\in E$;

(4) E 是 X 上的等价关系 $\Leftrightarrow E$ 是 X 上的自反、对称和传递关系.

若 E 是一个关系,则 $E^{-1}=\{(x,y):(y,x)\in E\}$ 也是一个关系,称为 E 的逆关系. 这样 X 上的关系 E 是对称的 $\Leftrightarrow E=E^{-1}$.

若 E 是 X 上的一个等价关系,对每个 $x\in X$,集

$$E[x]=\{y\in X:(x,y)\in E\}$$

称为以 x 为代表的模 E 的等价类,简称 x 所在的等价类. 集

$$X/E=\{E[x]:x\in X\}$$

称为 X 关于 E 的商集.

例 1.1.7　(1) 对任一集 X,$\triangle(X)$是 X 上的等价关系. X 关于$\triangle(X)$的商集 $X/\triangle(X)=\{\{x\}:x\in X\}$;

(2) $E=\{(m,n)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}:3$ 整除 $n-m\}$是整数集 $\mathbf{Z}$ 上的等价关系,$\mathbf{Z}$ 关于 E 的商集 $\mathbf{Z}/E=\{E[0],E[1],E[2]\}$.

(3) 关系 $E=\{((u,y),(v,y)):u,v,y\in\mathbf{R}\}$是实平面 $\mathbf{R}^2$ 上的一个等价关系,每点(u,y)所在的等价类 $E[(u,y)]=\{(x,y):x\in\mathbf{R}\}$是过$(u,y)$点与 x 轴平行的直线.

定义 1.1.8　设 X 是集,X 的一个子集族 $\mathscr{A}$ 称为 X 的一个分划,若 $\mathscr{A}$ 满足下面各条:

(1) $\forall A\in\mathscr{A},A\neq\varnothing$;

(2) $\mathscr{A}$ 是 X 的一个覆盖,即$\bigcup\mathscr{A}=X$;

(3) 对 $A,B\in\mathscr{A}$ 且 $A\neq B$,则 $A\cap B=\varnothing$.

命题 1.1.9　设 E 是X 上的一个等价关系,则商集 X/E 是X 的一个分划.

证　$\forall x\in X$,由自反性,$x\in E[x]\neq\varnothing$,即(1)成立. (2)由(1)知. 现在设 $E[x]\neq E[y]$. 则$(x,y)\notin E$. 若有 $z\in E[x]\cap E[y]$,由对称性$(x,z)\in E$ 且$(z,y)\in E$. 再由传递性,$(x,y)\in E$,矛盾. 因此(3)成立.　□

这样,集 X 上一个等价关系给出了 X 的一个分划. 在许多数学对象的研究中,往往需要按一定规则将一个给定的集进行分划,然后以此分划作成新的数学对象. 如代数中的商群、商环的构造. 事实上,等价关系恰是这种构造的严格的数学表达.

设 $\mathscr{A}$ 是一个子集族,令

$$\varepsilon(\mathscr{A})=\bigcup\{A\times A:A\in\mathscr{A}\},$$

则我们有下面的刻画.

定理 1.1.10　(1) 若 $\mathscr{A}$ 是 X 的一个分划,则 $\varepsilon(\mathscr{A})$是 X 上的等价关系且 $X/\varepsilon(\mathscr{A})=\mathscr{A}$.

(2) 若 E 是X 上的等价关系,则 X/E 是X 的分划且$E=\varepsilon(X/E)$.

证　(1) 由 $\mathscr{A}$ 是 X 的分划,$\varepsilon(\mathscr{A})$显然是 X 上的自反和对称关系. 设(x,y),$(y,z)\in\varepsilon(\mathscr{A})$. 则存在 $A,B\in\mathscr{A}$,使得$(x,y)\in A\times A$,$(y,z)\in B\times B$. 这样 $y\in A\cap B\neq\varnothing$. 由 $\mathscr{A}$ 是分划知 $A=B$. 于是$(x,z)\in A\times A\subseteq\varepsilon(\mathscr{A})$,即 $\varepsilon(\mathscr{A})$是 X 上的等价关系.

为了看到 $\mathscr{A}=X/\varepsilon(\mathscr{A})$,只需说明$\forall A\in\mathscr{A}$,存在 $x\in X$ 使$A=\varepsilon(\mathscr{A})[x]$. 任

取 $x\in A$，则 $A\subseteq\varepsilon(\mathscr{A})[x]$. 注意到若 $y\notin A$，则 $(x,y)\notin\varepsilon(\mathscr{A})$，即 $y\notin\varepsilon(\mathscr{A})[x]$. 因此 $A=\varepsilon(\mathscr{A})[x]$. 故 $X/\varepsilon(\mathscr{A})=\mathscr{A}$.

(2) 由命题 1.1.9, X/E 是 X 的一个分划. 由 E 是等价关系，则 $(x,y)\in E$ 当且仅当 $E[x]=E[y]$. 于是 $E=\bigcup\{E[x]\times E[x]:x\in X\}=\varepsilon(X/E)$. □

直观上，我们可以把商集 X/E 看成是把集 X 的每个子集 $E[x]$ 粘合成一点而得到的集，而等价关系确定什么样的子集粘合成一点.

例 1.1.11 (1) 将单位矩形 $I^2=[0,1]\times[0,1]$ 的两条竖边上每对同高度的点粘合成一点，则与此粘合对应的等价关系 E 满足：

$(x,y)E(u,v)\Leftrightarrow(x,y)$ 与 (u,v) 要粘合在一起

$\Leftrightarrow(x,y)=(u,v)$；或 $x=0,u=1,y=v$；或 $x=1,u=0,y=v$

于是 $E=\triangle(I^2)\cup\{((0,t),(1,t)):t\in I\}\cup\{((1,t),(0,t)):t\in I\}$；

(2) 将实数集 $\mathbf{R}$ 的子集 $\mathbf{Q}$ 粘合成一点对应的等价关系：

$$E=\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\cup\{(x,x):x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\},$$

则 $\mathbf{R}/E=\{\{x\}:x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\}\cup\{\mathbf{Q}\}$.

习 题 1.1

1. 设 A,B,C 是集.

(1) $A\subseteq B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$；

(2) $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$；

(3) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

2. 设 $A,B,C\subseteq X$.

(1) $A\cap A^c=\varnothing, A\cup A^c=X$；

(2) $(A^c)^c=A, A\setminus B=A\cap B^c$；

(3) 设 A,B 是非空集且 $(A\times B)\cup(B\times A)=C\times C$. 则 $A=B=C$.

3. 若定义有序对 $(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$. 证明：$(u,v)=(p,q)\Leftrightarrow u=p$ 且 $v=q$.

4. 计算 $\mathscr{P}\mathscr{P}\varnothing, \mathscr{P}\mathscr{P}\mathscr{P}\varnothing$.

5. 设 $\mathscr{A}=\{A_i:i\in\triangle_1\}, \mathscr{B}=\{B_j:j\in\triangle_2\}$ 是两个非空集族.

(1) $(\bigcup_{i\in\triangle_1}A_i)\times(\bigcup_{j\in\triangle_2}B_j)=\bigcup\{A_i\times B_j:(i,j)\in\triangle_1\times\triangle_2\}$；

(2) $(\bigcap_{i\in\triangle_1}A_i)\times(\bigcap_{j\in\triangle_2}B_j)=\bigcap\{A_i\times B_j:(i,j)\in\triangle_1\times\triangle_2\}$.

6. 对每个 $i\in\triangle, \mathscr{A}_i\subseteq\mathscr{P}X$. 则 $\bigcup_{i\in\triangle}(\bigcup\mathscr{A}_i)=\bigcup(\bigcup_{i\in\triangle}\mathscr{A}_i)$.

7. 设 U,V 是两个关系，$\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}X$.

(1) $V[\bigcup\mathscr{A}]=\bigcup\{V[A]:A\in\mathscr{A}\}, V[\bigcap\mathscr{A}]\subseteq\bigcap\{V[A]:A\in\mathscr{A}\}$；

(2) $(U\cap V)^{-1}=U^{-1}\cap V^{-1}, (U\cup V)^{-1}=U^{-1}\cup V^{-1}$.

8. 设 E 是 X 上的一个等价关系，$A\subseteq X$. 则 $E_A=A\times A\cap E$ 是 A 上的一个等价关系，并且 $\forall x\in A, E_A[x]=E[x]\cap A$.

9. 下面哪些关系是 $\mathbf{R}$ 上的等价关系？若 E_i 是等价关系，$\forall x\in\mathbf{R}$，求 $E_i[x]$.

$$E_1=\{(x,y):(x-y)\in\mathbf{Q}\},E_2=\{(x,y):(x-y)\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\},$$
$$E_3=\{(x,y):(x-y)\text{是整数}\},E_4=\{(x,y):|x-y|\leqslant 1\}.$$

10. 写出将单位圆周 $S^1=\{(x,y):x^2+y^2=1\}$ 的每对对径点粘合成一点对应的等价关系.

§1.2 映 射

函数或映射是最基础的数学概念.一个映射可理解为两个集之间的一种对应关系,于是有下面的定义.

定义 1.2.1 称 f 是从 X 到 Y 的一个映射,记作 $f:X\to Y$,如果 f 是从 X 到 Y 的一个关系,并且满足:

$$\forall x\in X,\text{存在惟一 } y\in Y \text{ 使}(x,y)\in f.$$

记此 y 为 $f(x)$,称为 x 在 f 下的像或值,常用 $x\mapsto f(x)$ 表示 x 对应 $f(x)$. 此时 X 称为 f 的定义域,记做 $X=\mathrm{dom}(f)$. Y 称为 f 的值域.

严格地讲,两个映射 $f_1:X_1\to Y_1$, $f_2:X_2\to Y_2$ 是相等的当且仅当 f_1,f_2 作为关系有 $f_1=f_2$,并且 $Y_1=Y_2$. 注意到对每个映射 $f:X\to Y$,作为关系 $f=\{(x,f(x)):x\in X\}$ 完全确定了该函数的对应规则和定义域.因此为方便起见,当两个映射作为关系是相等时,也常视为一样.如我们可以把映射

$$f:\mathbf{R}\to[-1,1],x\mapsto\sin x,g:\mathbf{R}\to[-2,3],x\mapsto\sin x$$

都看作是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射 $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R},x\mapsto\sin x$.

定义 1.2.2 设 $A\subseteq X,f:A\to Y,g:X\to Y$.

(1) $g|A:A\to Y,x\mapsto g(x)$ 是从 A 到 Y 的映射,称为 g 在 A 上的限制;

(2) 若 $g|A=f$,则称 g 是 f 在 X 上的扩张,f 是 g 在 A 上的限制;

(3) 映射 $\hat{g}:X\to g[X],x\mapsto g(x)$ 称为 g 的值限制.

对每个映射 $f:X\to Y,A\subseteq X,B\subseteq Y$,$B$ 在关系 f^{-1} 下的像称为 B 在 f 下的原像.容易看到

$$f[A]=\{y\in Y:\exists x\in A,(x,y)\in f\}=\{f(x):x\in A\},$$
$$f^{-1}[B]=\{x\in X:\exists y\in B,(x,y)\in f\}=\{x\in X:f(x)\in B\}.$$

命题 1.2.3 设 $f:X\to Y,A\subseteq X,B\subseteq Y$.

(1) $f[f^{-1}[B]]\subseteq B,A\subseteq f^{-1}[f[A]]$;

(2) 若 $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}X$,则

$$f[\bigcup\mathscr{A}]=\bigcup\{f[A]:A\in\mathscr{A}\},\quad f[\bigcap\mathscr{A}]\subseteq\bigcap\{f[A]:A\in\mathscr{A}\};$$

(3) 若 $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{P}Y$,则

$$f^{-1}[\bigcup\mathscr{B}]=\bigcup\{f^{-1}[B]:B\in\mathscr{B}\},f^{-1}[\bigcap\mathscr{B}]=\bigcap\{f^{-1}[B]:B\in\mathscr{B}\};$$

(4) $f^{-1}[Y\setminus B]=X\setminus f^{-1}[B]$;

(5) 若 $g:Y\to Z$,则 $g\circ f=\{(x,g(f(x))):x\in X\}$是从 X 到 Z 的映射,称为 g 与 f 的复合.

证 (1) 由 $f[f^{-1}[B]]=\{f(x):x\in f^{-1}[B]\}=\{f(x):f(x)\in B\}$知 $f[f^{-1}[B]]\subseteq B$.对每个 $x\in A$,则 $f(x)\in f[A]$.这样 $x\in f^{-1}[f[A]]$,即 $A\subseteq f^{-1}[f[A]]$成立.

(2) 若 $\mathscr{A}$ 为空族,则$\{f[A]:A\in\mathscr{A}\}$作为 Y 的子集族也是空族.于是

$$f[\bigcup\mathscr{A}]=f[\varnothing]=\varnothing=\bigcup\{f[A]:A\in\mathscr{A}\},$$
$$f[\bigcap\mathscr{A}]=f[X]\subseteq Y=\bigcap\{f[A]:A\in\mathscr{A}\},$$

即(2)成立.

现在设 $\mathscr{A}$ 为非空族,则

$$\begin{aligned}f[\bigcup\mathscr{A}]&=\{f(x):x\in\bigcup\mathscr{A}\}=\{f(x):\exists A\in\mathscr{A},x\in A\}\\&=\{f(x):\exists A\in\mathscr{A},f(x)\in f[A]\}=\bigcup_{A\in\mathscr{A}}f[A],\end{aligned}$$

第二个包含式 $f[\bigcap\mathscr{A}]\subseteq\bigcap\{f[A]:A\in\mathscr{A}\}$显然成立.

(3) 由

$$\begin{aligned}f^{-1}[\bigcup\mathscr{B}]&=\{x:f(x)\in\bigcup\mathscr{B}\}\\&=\{x:\exists B\in\mathscr{B},f(x)\in B\}\\&=\{x:\exists B\in\mathscr{B},x\in f^{-1}[B]\}\\&=\bigcup\{f^{-1}[B]:B\in\mathscr{B}\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x\in f^{-1}[\bigcap\mathscr{B}]&\Leftrightarrow f(x)\in\bigcap\mathscr{B}\\&\Leftrightarrow\forall B\in\mathscr{B},x\in f^{-1}[B]\\&\Leftrightarrow x\in\bigcap\{f^{-1}[B]:B\in\mathscr{B}\},\end{aligned}$$

知(3)成立.

(4) 由 $x\in f^{-1}[Y\setminus B]\Leftrightarrow f(x)\in Y\setminus B\Leftrightarrow f(x)\notin B\Leftrightarrow x\notin f^{-1}[B]\Leftrightarrow x\in X\setminus f^{-1}[B]$知.

(5) 是显然的.对每个 $x\in X$,有惟一的 $y=g(f(x))$与之对应.□

一般说来,上述命题中(2)的第二个包含式不必是等式.如 $f=\{(1,0),(2,0),(3,1)\}$是从 $X=\{1,2,3\}$到 $Y=\{0,1\}$的映射.取 $A_1=\{1,3\},A_2=\{2\}$.则 $f[A_1\cap A_2]=f[\varnothing]=\varnothing$.但是 $f[A_1]\cap f[A_2]=\{0,1\}\cap\{0\}\neq\varnothing$.

为直观起见,常用下面的图来表示映射的复合.三角图 1.1(a)称为可换图,若 $g\circ f=h$.同理称四方图 1.1(b)是可换图,若 $h\circ f=g\circ d$.将三角图和四方图组合,可给出更复杂的交换图.

定义 1.2.4 设 $f:X\to Y$.

(1) f 是满射$\Leftrightarrow f[X]=Y$;f 是常值映射$\Leftrightarrow f[X]$是单点集;

(2) f 是单射$\Leftrightarrow\forall x,y\in X$,若 $x\neq y$,则 $f(x)\neq f(y)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "h"] & \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

(a)

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f"'] & Y_1 \arrow[d, "g"] \\ X_2 \arrow[r, "h"] & Y_2 \end{tikzcd}$$

(b)

图 1.1

满的单射叫双射.

当 $f: X \to Y$ 是双射时, f 的逆关系 f^{-1} 显然是从 Y 到 X 的双射,称为 f 的逆映射.此时 $\forall y \in Y$, f^{-1} 在 y 的值记为 $f^{-1}(y)$.

例 1.2.5 (1) 若 E 是 X 上的一个等价关系,则

$$q: X \to X/E, x \mapsto E[x]$$

是从 X 到 X/E 的一个满射,称为粘合映射;

(2) 对每个集 X, $1_X: X \to X, x \mapsto x$ 是双射,称为 X 上的恒等映射.对每个集 $A \subseteq X$, $1_X | A = j_A: A \to X$ 称为含入映射.对每个映射 $f: X \to Y$,则 f 的值限制 $\hat{f}$ 是满射,且 $f = j_{f[X]} \circ \hat{f}$.

作为映射的应用,这一节最后给出本书中所需的可数集,不可数集的概念和有关结果.

定义 1.2.6 (1) 两个集 A, B 称为是对等的$\Leftrightarrow$存在双射 $f: A \to B$;

(2) 若 $A = \varnothing$,或存在 $n \in \mathbf{N}_+$,使 A 与 $I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ 对等,则称 A 是有限集;

(3) A 是可数无穷集$\Leftrightarrow A$ 与 $\mathbf{N}_+$ 对等.

有限集和可数无穷集统称为可数集;不是可数集的集称为不可数集.

容易看到对等是任一集族上的一个等价关系.直观上,对等的集具有相同的"大小",从集论的角度可视为一样.

为了证明可数集的有关结论,我们需要下面关于正整数集的性质.

引理 1.2.7 正整数集 $\mathbf{N}_+$ 的每个非空子集具有最小元.

证 设 $M \subseteq \mathbf{N}_+$ 且 $M \neq \varnothing$.任取 $n \in M$,则 $I_n \cap M \neq \varnothing$.因 $I_n \cap M$ 是有限个自然数的集,必有一个最小者 n_0.对每个 $m \in M$,若 $m \in I_n \cap M$,则 $n_0 \leqslant m$.若 $m \notin I_n \cap M$,则 $n_0 \leqslant n < m$.结果 n_0 是 M 的最小元.□

命题 1.2.8 (1) 可数集的任一子集是可数集;

(2) $\mathbf{N}_+ \times \mathbf{N}_+$ 是可数集.

证 (1) 可设 A 是可数无穷集, D 是 A 的子集.设 $g: A \to \mathbf{N}_+$ 是双射,则 D

与 $\mathbf{N}_+$ 的子集 $B=g[D]$ 对等. 因此只需说明 B 是可数集. 只考虑 B 是无穷集的情形. 利用引理 1.2.7,归纳地定义映射 $h:\mathbf{N}_+\to B$ 如下:

令 $h(1)$ 为 B 的最小元. 假设 $h(1),h(2),\cdots,h(n)$ 已有定义,并且满足若 $i\neq j$,则 $h(i)\neq h(j)$. 令 $h(n+1)$ 为 $B\setminus\{h(1),h(2),\cdots,h(n)\}$ 的最小元,显然 $h(n+1)\neq h(i)(i=1,2,\cdots,n)$. 由归纳法得到 $h:\mathbf{N}_+\to B$ 是单射. 最后说明 h 是满射,从而 B 是可数无穷集.

对每个 $n\in B$,因 $h[\mathbf{N}_+]$ 是无穷集,可取 $m\in\mathbf{N}_+$ 使 $h(m)>n$. 设 m_0 是 $\{p\in N:h(p)\geqslant n\}$ 的最小元. 则 $h(m_0)\geqslant n$. 另一方面,对每个 $p<m_0,h(p)<n$. 又因 $h(m_0)$ 是 $B\setminus\{h(1),h(2),\cdots,h(m_0-1)\}$ 的最小元,从而 $h(m_0)\leqslant n$. 故 $h(m_0)=n$,即 h 是满射.

(2) 只需验证映射

$$f:\mathbf{N}_+\times\mathbf{N}_+\to\mathbf{N}_+,(m,n)\mapsto 2^m3^n$$

是单射,从而由(1),$\mathbf{N}_+\times\mathbf{N}_+$ 是可数集. 事实上若 $2^m3^n=2^p3^q$,当 $m<p$ 时 $3^n=2^{p-m}3^q$,这与 3^n 总是奇数矛盾,因此 $m=p$,$3^n=3^q$. 由此即得 $n=q$. □

利用上述命题容易得到下面的结论,其证明留作习题.

命题 1.2.9

(1) 可数个可数集之并是可数集;

(2) 一个可数集的所有有限子集构成之集是可数集.

由此命题可知整数集 $\mathbf{Z}$,有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可数集.

命题 1.2.10　(1) 对任一集 X,$\mathscr{P}X$ 与 X 不对等;

(2) $\mathbf{R}$ 是不可数集.

证　(1) 若 $X=\varnothing$,则 $\mathscr{P}X=\{\varnothing\}$ 与 X 不对等. 设 $X\neq\varnothing$. 若有双射 $f:X\to\mathscr{P}X$,由 $B=\{x\in X:x\notin f(x)\}\in\mathscr{P}X$,存在 $x_0\in X$ 使 $f(x_0)=B$. 若 $x_0\notin B=f(x_0)$,则 $x_0\in B$ 矛盾;若 $x_0\in B$,则 $x_0\notin f(x_0)$ 也矛盾. 因此 X 与 $\mathscr{P}X$ 不对等.

(2) 对每个 $A\in\mathscr{P}\mathbf{N}_+$,$\forall n\in\mathbf{N}_+$,令

$$x_n^A=\begin{cases}1, & n\in A,\\ 0, & n\notin A,\end{cases}$$

则映射

$$f:\mathscr{P}\mathbf{N}_+\to\mathbf{R},A\mapsto 0.x_1^Ax_2^Ax_3^A\cdots$$

是单射. 由(1)$\mathscr{P}\mathbf{N}_+$ 是不可数集. 再由命题 1.2.8(1)知 $\mathbf{R}$ 是不可数集. □

习　题　1.2

1. 设 $f:X\to Y$,$h_X:X\to\mathscr{P}X$,$x\mapsto\{x\}$. 构造映射 $F:\mathscr{P}X\to\mathscr{P}Y$ 使四方图1.2是可换图.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_X"'] & Y \arrow[d, "h_Y"] \\ \mathscr{P}X \arrow[r, "F"] & \mathscr{P}Y \end{tikzcd}$$

图 1.2

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X/E_f \arrow[ur, "f^*"'] & \end{tikzcd}$$

图 1.3

2. 设 $f:X\to Y, g:Y\to Z, A\subseteq X, B\subseteq Y, W\subseteq Z$.

(1) $f[A\cap f^{-1}[B]]=f[A]\cap B$;

(2) $f[A\setminus f^{-1}[B]]=f[A]\setminus B$;

(3) $(g\circ f)^{-1}[W]=f^{-1}[g^{-1}[W]]$.

3. 设 $f:X\to Y$,证明:

(1) f 是满射$\Leftrightarrow \forall B\subseteq Y, f[f^{-1}[B]]=B$;

(2) f 是单射$\Leftrightarrow \forall A\subseteq X, f^{-1}[f[A]]=A$.

4. 设 $f:X\to Y$ 是单射,$g_1, g_2:Z\to X$ 使 $f\circ g_1=f\circ g_2$. 证明:$g_1=g_2$.

5. 设 $f:X\to Y, g:Y\to X$.

(1) 若 $g\circ f=1_X$,则 g 是满射且 f 是单射;

(2) $g\circ f=1_X$ 且 $f\circ g=1_Y\Leftrightarrow f$ 是双射且 $f^{-1}=g$.

6. 设 $f:X\to Y, E_f=\{(x,y)\in X\times X: f(x)=f(y)\}$. 证明:

(1) E_f 是 X 上的一个等价关系;

(2) 存在映射 $f^*:X/E_f\to Y$,使图 1.3 为可换图.

7. 设 E 是集 X 上的等价关系,$q: X\to X/E$ 是粘合映射. 则对每个 $\mathscr{A}\subseteq X/E$, $q^{-1}[\mathscr{A}]=\bigcup\mathscr{A}$.

8. 证明命题 1.2.9.

9. $x\in\mathbf{R}$ 称为一个代数数,若它是某个具有有理数系数的 $n\,(n\geqslant 1)$ 次方程 $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$ 的根. 假定每个 n 次方程至多有 n 个根,证明:代数数构成的集是可数集.

10. 非空集 A 是可数集$\Leftrightarrow$存在满射 $g:\mathbf{N}_+\to A\Leftrightarrow$存在单射 $h:A\to\mathbf{N}_+$.

§1.3 序 关 系

序的概念渗透于日常生活与数学. 大小、前后、左右等都表现为两个对象之间的顺序关系. 将通常顺序关系具有的基本性质加以抽象,得到下面的定义.

定义 1.3.1 设 E 是集 L 上的一个关系.

(1) E 是反对称的$\Leftrightarrow$若 xEy 且 yEx,则 $x=y$.

(2) E 是 L 上的一个偏序$\Leftrightarrow E$ 是 L 上的自反、传递和反对称关系.

为形象计,常用$\leqslant$表示偏序,$(L,\leqslant)$或 L 称为一个偏序集. 对 $x,y\in L$, $x\leqslant y$称为x小于或等于y,否则称 x 不小于等于y,记作 $x\not\leqslant y$. 若 $x\leqslant y$ 且$x\neq y$,称 x 严格小于y,记作 $x<y$.

对一个偏序集$(L,\leqslant)$,$x,y\in L$. 若 $x\not\leqslant y$ 且$y\not\leqslant x$,则称 x 与y 不能比较大小. 若 L 的任意两个元可比较,即$\forall x,y\in L$,有 $x\leqslant y$ 或$y\leqslant x$ 成立,则称$(L,\leqslant)$是一个全序集. 如实数集 $\mathbf{R}$,有理数集 $\mathbf{Q}$,自然数集 $\mathbf{N}$ 关于实数的大小序都是全序集.

例 1.3.2 (1) 对每个偏序集$(L,\leqslant)$,$A\subseteq L$,则$\leqslant_A=A\times A\cap\leqslant$是 A 上的一个偏序. $(A,\leqslant_A)$称为 L 的子偏序集;

(2) 对任一集族 $\mathscr{A}$,则 $\mathscr{A}$ 关于集合的包含序

$$A\leqslant B\Leftrightarrow A\subseteq B$$

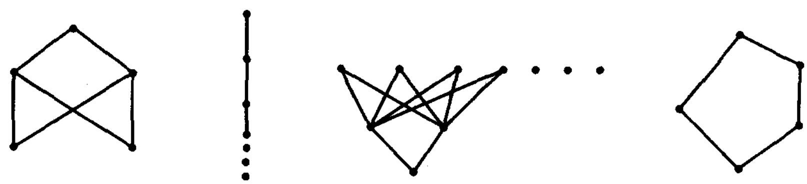
是一个偏序集,记作$(\mathscr{A},\subseteq)$. 特别地,$(\mathscr{P}X,\subseteq)$是一个偏序集. 若 X 至少含有两个元,则 $\mathscr{P}X$ 不是全序集;

(3) 正整数集 $\mathbf{N}_+$ 上的整除序为

$$\preceq=\{(m,n)\in\mathbf{N}_+\times\mathbf{N}_+: m \text{ 整除 } n\},$$

则$\preceq$也是 $\mathbf{N}_+$ 上的一个偏序. 在这个偏序下,$3\not\preceq5$,$5\not\preceq3$,即 3 与 5 不能比较大小.

(4) 对于简单的偏序集,往往可用图直观地表示出来. 有大、小关系的元用线段连接,线段上方的元大于下方的元. 如图 1.4(a)—(d)所示.



(a) (b) (c) (d)

图 1.4

对一个偏序集$(L,\leqslant)$,容易看到$\leqslant^{-1}=\{(x,y):(y,x)\in\leqslant\}$也是 L 上的一个偏序,称为$\leqslant$的对偶序,常记作$\leqslant^{op}$. 对偶偏序集$(L,\leqslant^{op})$简记为 L^{op}. 从图形上看,L^{op}的图形恰是将 L 的图形上下颠倒而得到的.

在有关偏序集的概念和命题中,用对偶序$\leqslant^{op}$代替$\leqslant$,得到的概念和命题称为对偶的概念和命题. 因此有关偏序集的概念总是成对出现的.

例 1.3.3 对偏序集 L 的任一子集 A,

$$\uparrow A=\{x\in L:\exists a\in A, a\leqslant x\}$$

称为由 A 生成的上集. 它的对偶