普通高等教育“十五”国家级规划教材

实变函数论与泛函分析（第二版）

（下册）

曹广福　严从荃 编

Lusin
Fubini
Egoroff
Riemann
Bernstein
Lebesgue

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十五”国家级规划教材

实变函数论与泛函分析（第二版）

（下册）

曹广福　严从荃 编

Lusin
Fubini
Egoroff
Riemann
Bernstein
Lebesgue

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书分上、下册。下册系统介绍了泛函分析的基础知识，共分三章：距离空间，Banach 空间上的有界线性算子，Hilbert 空间上的有界线性算子，讲授完约需 72 学时。

本教材文字流畅，论证严密，对概念、定理的背景与意义交代得十分清楚，介绍了新旧知识之间、泛函分析与其他数学分支之间的内在联系。本书特别注重培养学生如何提出问题，以及如何从分析问题的过程中寻求解决方法的能力。本书可供综合大学与师范院校数学各专业作为教材或教学参考书，也可作为工科部分专业高年级本科生与研究生的教材或教学参考书。同时，本书对于有一定数学基础的读者而言，也是一部很好的自学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

实变函数论与泛函分析．下册/曹广福，严从荃编．
2 版．—北京：高等教育出版社，2004.10
ISBN 7-04-015485-4

Ⅰ.实… Ⅱ.①曹…②严… Ⅲ.①实变函数论-高等学校-教材 ②泛函分析-高等学校-教材
Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 089909 号

策划编辑 徐 可 **责任编辑** 舒敬江 **封面设计** 王凌波
版式设计 王艳红 **责任校对** 尤 静 **责任印制** 杨 明

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	北京未来科学技术研究所有限责任公司印刷厂		
		版 次	1999 年 7 月第 1 版
开 本	787×960 1/16		2004 年 10 月第 2 版
印 张	10.5	印 次	2004 年 10 月第 1 次印刷
字 数	190 000	定 价	11.60 元

物料号：15485-00

前　言

有人说,泛函分析似乎就是有限维线性空间及其线性变换在无限维空间的平行推广.弦外之音不言而喻.我想,泛函分析存在和发展了差不多一个世纪,并且与如此众多的科学分支发生了深刻的联系,其重要性自不待言.其实,稍稍了解泛函分析及其历史的人都知道,泛函分析的起源来自对微分与积分方程(包括变分法)的研究,无论是其研究手段与方法,还是其高度的概括性与抽象性,都完全有别于线性代数.从大的方面看,推动它产生与发展的因素有两个:其一,“出现了用统一的观点来理解 19 世纪数学各个分支所积累的大量实际材料的必要性,”使得“泛函分析的基本概念从不同的方面和不同的联系中产生了”(见《数学——它的内容、方法和意义》).其结果是“代数和分析在方法上的统一”(Hilbert 语,见《数学概观》p. 133).其二,与量子力学相关的数学问题的研究为泛函分析的发展提供了巨大的动力,并逐步形成泛函分析的基本方向.诚然,泛函分析的最终发展或许与奠基者们的初衷有所差异,尽管这一理论在量子力学、偏微分方程乃至拓扑、代数等理论中有着重要的应用,但在一些重大经典分析问题面前多少显得有点软弱无力.不过,这一点也不影响泛函分析在数学与自然科学领域中的地位.事实上,泛函分析对于任何一个从事数学工作的学者甚至某些自然科学领域的研究者而言都是必备的知识.

一些人对某些学科产生这样那样的认识除了与他对理论理解的程度有关外,或许还与他所阅读的书籍有关.我们不可能指望每一个读者在阅读本教材的同时去阅读相关的历史,因此教材到底该告诉读者什么?这是至关重要的.根据多年的教学实践,我们以为,教材不应该只是一些概念、定理及证明的堆砌,它同时还应该告诉读者为什么要做某些事?它会给我们带来什么后果?本着这一愿望,我们尝试编写了此书.但愿读者在阅读本书时能体会到这一点.

为了帮助读者理解教材内容,尽可能使理论的阐述更直观、通俗易懂些,我们注重与一些前期课程如线性代数中相应概念的类比,相信读者自能领会两者之间的异同.此外特别注重问题的提出与分析,希望从分析中寻找到解决问题的钥匙.不过由于编者的学识与功力所限,未必能尽如人意,不足之处,欢迎行家与读者赐教.

本册第一章、第二章以及第三章的第一节由曹广福同志执笔,第三章第二节至第六节由严从荃同志执笔.最后由曹广福同志统稿.

需要说明的是,四川大学教务处以及数学学院的领导为本书的写作给予了

极大的鼓励与支持，正是由于他们的帮助，才使本书得以顺利完成. 在此谨表示我们最诚挚的谢忱.

曹广福

目　　录

第一章 距离空间

正如在实变函数中讨论的那样，有些集合不同于 n 维欧氏空间，但与欧氏空间有着许多类似的性质，例如闭区间$[a,b]$上全体连续函数构成的集合 $C([a,b])$及$[a,b]$上所有 p 次方 Lebesgue 可积的函数全体所构成的集合 $L^p([a,b])$. 数学中的许多领域常常要处理作用在这些函数集合上的变换. 例如，微分算子

$$L=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+q(x)$$

作用在一类函数 $y(x)$上，将其变为另外的函数. 为了解微分方程，需要寻找特殊的 $y(x)$，使得 $Ly(x)=0$，并且这个函数通常还要满足初值条件或边界条件.

解微分方程的一个常用方法是迭代算法. 给定初始值，有限次的迭代所得到的近似值往往具有很好的性质，但经过无限次迭代后，所得到的近似解序列是否收敛？按何种方式收敛？其极限具有什么性质？它是否为原方程的精确解？这些都是必须考虑的问题. 它促使人们将函数集合作为一个整体看待，在其上引入线性运算、距离等概念，从而得到抽象的距离空间，这正是本章所要研究的主题.

§1 线性距离空间

1.1 线性空间

回忆有限维线性空间的定义，不难启发我们该如何定义一般线性空间.

定义 1 设 X 是非空集合，K 是数域(实数或复数域)，若于 X 上定义了一种**加法**运算，使得对任意 $x,y\in X$ 都对应 X 中一个元素 z，用 $z=x+y$ 表示；又定义了**数乘**运算，使得对任意 $\alpha\in K$ 及任意 $x\in X$ 都对应 X 中一个元素 y，用 $y=\alpha x$表示；假如 X 上的加法与数乘运算还满足下列条件：

(1) $x+y=y+x$ $(\forall x,y\in X)$，符号$\forall$表示“任意”；

(2) $x+(y+z)=(x+y)+z$ $(\forall x,y,z\in X)$；

(3) 存在唯一元素 $\theta\in X$，使得对任意 $x\in X$，$x+\theta=x$，称 θ 为 X 中的**零元素**，有时也简记为 0；

(4) 对任意 $x\in X$，存在唯一的元素 $-x\in X$，使得 $x+(-x)=0$；

(5) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ $(\forall x,y\in X,\alpha\in K)$；

(6) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ $(\forall x\in X,\alpha,\beta\in K)$；

(7) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x \quad (\forall x\in X,\alpha,\beta\in K)$;

(8) $1\cdot x=x$.

则称 X 按上述加法与数乘成为数域 K 上的**线性空间**,若 K 是实数域,则简称 X 为**实线性空间**,若 K 是复数域,则称 X 为**复线性空间**. 线性空间也称作**向量空间**,空间中的元素称作**向量**或**点**.

一般情况下,我们所说“线性空间”均指复线性空间,实际上复线性空间必然也是实线性空间,所以如无特别声明,我们考虑的都是复线性空间. 但所有的结论关于实线性空间情形也是正确的.

不难验证,在线性空间 X 中,对任意向量 x 和数 α 都有

(9) $0x=0$;

(10) $(-1)x=-x$;

(11) $\alpha 0=0$.

为方便计,以后总将 $x+(-y)$ 记作 $x-y$. 显然在线性空间 X 中,消去律也成立,即有

(12) $x+y=x+z \Rightarrow y=z$;

(13) $\alpha x=\alpha y$ 且 $\alpha\neq 0$,则 $x=y$;

(14) $\alpha x=\beta x$ 且 $x\neq 0$,则 $\alpha=\beta$.

定义 2 设 X 是线性空间,M 是 X 的子集,若对任意 $x,y\in M$ 及数 α,都有 $x+y\in M,\alpha x\in M$,则称 M 为 X 的**(线性)子空间**.

显然 0 与 X 本身都是 X 的线性子空间,通常称它们是平凡的子空间. 若 X 的子空间 M 既不为空集,也不等于 X,则称 M 为 X 的**真子空间**.

在后面要定义的线性距离空间 X 中,若 X 的子空间 M 是 X 的闭子集,则称 M 为 X 的**闭子空间**.

在有限维欧氏空间中,研究空间结构及几何的一个基本方法是建立坐标系(可以是直角坐标,也可以是斜坐标),用线性代数的语言来叙述,即寻找最大线性无关组. 在抽象的线性空间中,线性无关概念也是十分重要且常用的,其定义与有限维情形类似.

定义 3 设 $x_1,\cdots,x_n\in X,\alpha_1\cdots\alpha_n$ 是 n 个数,形如 $\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n$ 的元素称为 $x_1,\cdots,x_n$ 的**线性组合**.

设 $S\subset X$ 是 X 的非空子集,S 本身对于线性运算未必封闭,但我们可以将 S 中所有元素的有限线性组合放在一起构成新的集合 M_S,显然 M_S 是 X 的子空间,通常称为由 S 张成的子空间,简记作 $M_S=V\{S\}$. 易知 M_S 具有下面的性质:

M_S 是 X 中所有含 S 的子空间之交.

这说明 M_S 是 X 中含 S 的最小子空间,即若 N 是含 S 的子空间,则必有 $N\supset M_S$.

定义 4 设 $x_1,\cdots,x_n$ 是 X 中的 n 个元素，若存在不全为 0 的数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=0,$$

则称 $x_1,\cdots,x_n$ 是**线性相关的**，否则称为**线性无关**. 如果 S 中任意有限个向量均线性无关，则称 X 的一个子集 S 为线性无关的，否则称 S 为**线性相关的**.

定义 5 设 X 是线性空间，$x_1,\cdots,x_n$ 是 X 中的 n 个向量，若它们满足：

(1) $x_1,\cdots,x_n$ 线性无关；

(2) 对任意 $x\in X$，$x,x_1,\cdots,x_n$ 都是线性相关的. 则称 $x_1,\cdots,x_n$ 为 X 的基，X 称为 n **维线性空间**，n 称为 X 的**维数**，记作 $n=\dim X$.

只含 0 元素的空间称为**零空间**. 如果 X 不是有限维的，则称为**无限维线性空间**.

与代数学不同的是，分析学中所研究的空间不仅具有代数结构，更重要的一点是：点和点之间具有“远近”的概念！也就是所谓的距离，有了距离，才能定义“极限”与“连续性”，这正是我们下面要讨论的问题.

1.2 距离空间

如果将 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的距离“抽象”出来，仅采用其性质，则不难得到一般空间中的距离概念.

定义 6 设 X 是一集合，ρ 是 $X\times X$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的映射，满足：

(1)（非负性） 对任意 $x,y\in X$，有 $\rho(x,y)\geqslant 0$，且 $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$；

(2)（对称性） 对任意 $x,y\in X$，$\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

(3)（三角不等式） 对任意 $x,y,z\in X$，有 $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$.

则称 X 为**距离空间**（或**度量空间**），记作 (X,ρ)，$\rho(x,y)$ 称为 x 与 y 的**距离**.

在线性空间中定义距离，自然应该考虑到它与线性运算的相容性，具体说来即下面的

定义 7 设 (X,ρ) 是距离空间，且 X 还是线性空间，若 ρ 满足：

(1) 如果 $\rho(x_n,x)\to 0$，$\rho(y_n,y)\to 0$，则 $\rho(x_n+y_n,x+y)\to 0$；

(2) 若 $\rho(x_n,x)\to 0$，则 $\rho(\alpha x_n,\alpha x)\to 0\ (\forall\alpha\in K)$；

(3) 若 $\alpha_n\to\alpha$，$x\in X$，则 $\rho(\alpha_n x,\alpha x)\to 0$.

则称 (X,ρ) 为**线性距离空间**.

有了距离，便可以定义“收敛”概念了，这就是下面的

定义 8 设 (X,ρ) 是距离空间，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中的点列，若

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x)=0,$$

则称$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$按距离 ρ **收敛**到 x，记作 $x_n \xrightarrow{\rho} x$. 在不致引起混淆的情况下，也记 $x_n \to x$.

应该看到，从 n 维欧氏空间到抽象距离空间绝不是一种简单的推广，它使得我们可以将相当广泛的一类集合用统一的方法来处理. 事实证明，泛函分析的思想和方法已成为现代科学技术研究中一种普适的框架，从而渗透到科学的各个领域. 我们不妨熟悉一下几类重要的距离空间，由此初步领略一番泛函分析的"抽象"风光！

例 1　记 $l^{\infty}=\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid x_n\in K, n=1,2,\cdots, \sup_n|x_n|<\infty\}$ 在 l^{∞} 中定义线性运算如下：

(1) 对任意 $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, y=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}, x+y \triangleq \{x_n+y_n\}_{n=1}^{\infty}$；

(2) 对任意 $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \alpha\in K, \alpha x \triangleq \{\alpha x_x\}_{n=1}^{\infty}$.

不难验证 l^{∞} 是线性空间.

对任意 $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, y=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^{\infty}$，定义

$$\rho(x,y)=\sup_n|x_n-y_n|,$$

容易验证 ρ 是 l^{∞} 上的距离，从而(l^{∞},ρ)是线性距离空间.

让我们来看一看，l^{∞} 中点列的收敛意味着什么. 设 $x^{(k)}=\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 l^{∞} 中的点列，$x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^{\infty}$，且 $\rho(x^{(k)},x)=\sup_n|x_n^{(k)}-x_n|\to 0(k\to\infty)$，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 k_0，使得当 $k\geqslant k_0$ 时，有

$$\rho(x^{(k)},x)<\varepsilon,$$

从而对一切 n，有

$$|x_n^{(k)}-x_n|<\varepsilon \quad (\forall k\geqslant k_0),$$

这说明，$x^{(k)}$ 按坐标一致收敛到 x.

反之，设 $x^{(k)}$ 按坐标一致收敛到 x，即对任意 $\varepsilon>0$，存在 k_0，使得当 $k\geqslant k_0$ 时，对一切 n，有

$$|x_n^{(k)}-x_n|<\varepsilon,$$

从而 $\sup_n|x_n^{(k)}-x_n|\leqslant\varepsilon$，即 $\rho(x^{(k)},x)\leqslant\varepsilon$. 这说明 $x^{(k)}\xrightarrow{\rho}x$ 等价于 $x^{(k)}$ 按坐标一致收敛到 x.

例 2　设 $1\leqslant p<\infty$，记 $l^p=\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid x_n\in K, n=1,2,\cdots$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty\}$，对任意 $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, y=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^p$ 及 $\alpha\in K$，定义 $x+y\triangleq\{x_n+y_n\}_{n=1}^{\infty}, \alpha x\triangleq\{\alpha x_n\}_{n=1}^{\infty}$，可以证明 l^p 是一个线性空间. 事实上，αx 显然在 l^p 中，为证 $x+y\in l^p$，只需注意到对任意复数 a,b，下列不等式成立：

$$|a+b|^p\leqslant(|a|+|b|)^p\leqslant[2\max\{|a|,|b|\}]^p\leqslant 2^p(|a|^p+|b|^p),$$

由此立知 l^p 确是线性空间. 在 l^p 上定义

$$\rho(x,y)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p\right]^{\frac{1}{p}},$$

完全类似 L^p 空间情形(参见本书上册第四章§5)可证

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

故 ρ 满足距离的定义,从而 (l^p,ρ) 是线性距离空间.

现设 $x^{(k)}=\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 l^p 中的点列,按距离 ρ 收敛到 l^p 中的点 $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^{(k)}-x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\to 0\quad(k\to\infty),$$

于是对任意 $\varepsilon>0$,存在 k_0,使得当 $k\geqslant k_0$ 时,有

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^{(k)}-x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2},$$

从而对任意 N,有

$$\sum_{n\geqslant N}|x_n^{(k)}-x_n|^p<\frac{\varepsilon}{2^p}.$$

由于 $\{x_n\}\in l^p$,故存在 N_0,使得 $\sum\limits_{n\geqslant N_0}|x_n|^p<\frac{\varepsilon}{2^p}$,于是

$$\left(\sum_{n\geqslant N_0}|x_n^{(k)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{n\geqslant N_0}|x_n^{(k)}-x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n\geqslant N_0}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2}+\frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2}=\varepsilon^{\frac{1}{p}},$$

即

$$\sum_{n\geqslant N_0}|x_n^{(k)}|^p<\varepsilon.$$

此外,对任意 n,显然有 $x_n^{(k)}\to x_n(k\to\infty)$.

另一方面,若对任意 n,$x_n^{(k)}\to x_n(k\to\infty)$,且对任意 $\varepsilon>0$,存在 k_0,N_0,使得对任意 $k>k_0$ 有

$$\sum_{n\geqslant N_0}|x_n^{(k)}|^p<\varepsilon,$$

则由 ε 的任意性及

$$\begin{aligned}\rho(x^{(k)},x)&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^{(k)}-x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\left(\sum_{n<N_0}|x_n^{(k)}-x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n\geqslant N_0}|x_n^{(k)}-x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\left(\sum_{n<N_0}|x_n^{(k)}-x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n\geqslant N_0}|x_n^{(k)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n\geqslant N_0}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

不难得到 $\rho(x^{(k)},x)\to 0(k\to\infty)$,由此可见 l^p 中的点列 $\{x^{(k)}\}=\{\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}\}$ 收敛到 $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 当且仅当

(1) 对每个 n，$x_n^{(k)}\to x_n(k\to\infty)$，

(2) 对任意 $\varepsilon>0$，存在 k_0,N_0，使得对任意 $k>k_0$ 及 $N\geqslant N_0$，$\sum\limits_{n\geqslant N}|x_n^{(k)}|^p<\varepsilon$.

1.3 线性赋范空间

我们把线性空间中的点称作向量并不奇怪，因为它和平面、三维空间中的向量有着类似的特征. 有限维欧氏空间中的向量按自然方式有长度，但一般线性空间中的向量却未必有“长度”，除非我们事先赋予某种定义.

定义 9 设 X 是数域 K 上的线性空间，ρ 是 X 到实数域 $\mathbf{R}$ 的映射(这样的映射称为 X 上的实值泛函)，满足：

(1) (非负性) 对任意 $x\in X$，$\rho(x)\geqslant 0$，且 $\rho(x)=0$ 当且仅当 $x=0$；

(2) (正齐性) 对任意 $x\in X,\alpha\in K$，$\rho(\alpha x)=|\alpha|\rho(x)$；

(3) (三角不等式) 对任意 $x,y\in X$，$\rho(x+y)\leqslant\rho(x)+\rho(y)$.

则称 X 为 K 上的**线性赋范空间**，记作 (X,ρ)，$\rho(x)$ 称为 x 的**范数**.

按习惯记法，通常用“$\|\cdot\|_X$”记范数，即 $\|x\|_X\triangleq\rho(x)$.

实变函数中熟知的连续函数空间 $C([a,b])$ 按 $\|f\|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$ 构成线性赋范空间，$L^p(E)$ 空间按 $\|f\|_p=\left[\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}$ 也构成线性赋范空间. 前面例 1、例 2 中的空间 l^∞，l^p 分别按 $\|x\|_\infty=\sup\limits_{1\leqslant n<\infty}|x_n|$ 及 $\|x\|_p=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ 构成线性赋范空间. 下面再来看两个例子.

例 3 设 $V[a,b]$ 是区间 $[a,b]$ 上的实有界变差函数全体，依照通常的线性运算，它是线性空间，对 $f\in V[a,b]$，定义

$$\|f\|=|f(a)|+V_a^b(f),$$

则 $V[a,b]$ 按 $\|f\|$ 成为线性赋范空间.

记 $V_0[a,b]=\{f\mid f\in V[a,b],f$ 在 (a,b) 中每一点是右连续的，且 $f(a)=0\}$，则 $V_0[a,b]$ 是 $V[a,b]$ 的线性子空间，在 $V_0[a,b]$ 上，范数 $\|f\|$ 等于全变差 $V_a^b(f)$.

例 4 设 D 是复平面 $\mathbb{C}$ 内的单位圆盘，即 $D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$，记

$$L_a^2(D)=\{f\mid f\text{ 在 }D\text{ 中解析，且}\int_D|f(z)|^2\mathrm{d}A<\infty\},$$

其中 $\mathrm{d}A$ 是 D 上的面积元素，显然 $L_a^2(D)$ 按通常的线性运算成为线性空间，对任意 $f\in L_a^2(D)$，定义

$$\|f\|_2=\left[\int_D|f(z)|^2\mathrm{d}A\right]^{\frac{1}{2}},$$

不难验证 $\|f\|$ 是 $L_a^2(D)$ 中的范数，于是 $(L_a^2,\|\cdot\|_2)$ 是线性赋范空间，它称为

Bergman 空间.

在线性赋范空间$(X,\|\cdot\|_X)$中，由范数可以诱导一个距离，即

$$\rho(x,y)=\|x-y\|_X \quad (\forall x,y\in X),$$

不难证明ρ的确是X上的距离，且线性运算按此距离连续，故而(X,ρ)是线性距离空间. X中的序列$\{x_n\}$若按此距离收敛到某个元x，即

$$\|x_n-x\|\to 0 \quad (n\to\infty).$$

则称它按范数收敛到x，记作$x_n\xrightarrow{\|\cdot\|_X}x$或$x_n\to x$.

应该注意的是，对给定的线性空间X，在X上通常可以定义多个范数，这就存在不同范数之间的比较问题，为此引入下面的

定义 10 设$\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$都是线性空间X上的范数，如果存在常数$M>0$，使得对任意$x\in X$，有

$$\|x\|_1\leqslant M\|x\|_2,$$

则称$\|\cdot\|_2$强于$\|\cdot\|_1$. 如果既有$\|\cdot\|_1$强于$\|\cdot\|_2$，又有$\|\cdot\|_2$强于$\|\cdot\|_1$，则称$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$等价.

§2 距离空间的完备性

2.1 完备性定义及例子

在欧氏空间$\mathbf{R}^n$中，序列的收敛性有一个基本的判别准则，这就是 Cauchy 准则，我们在本书的上册中已看到L^p空间中 Cauchy 准则也成立，在一般的距离空间中，类似结论是否总是正确的呢？我们先来看一个例子.

例 1 设$X=\{r\,|\,r$是$\mathbf{R}$中的有理数$\}$，Q是有理数域，则按通常的运算，X是Q上的线性空间，按通常的距离$\rho(x,y)=|x-y|$，(X,ρ)成为线性赋范空间.

众所周知，$\mathbf{R}$中有理数全体在$\mathbf{R}$中稠密，设$\{r_n\}$是$\mathbf{R}$中收敛到某个无理数的有理数列，则$\{r_n\}$显然是 Cauchy 列，然而$\{r_n\}$在X中不收敛. 可见并非在所有的距离空间中 Cauchy 准则都成立. 因此有必要引入下面的

定义 1 设(X,ρ)是距离空间(或赋范空间)，如果X中的点列$\{x_n\}$满足

$$\rho(x_n,x_m)\to 0 \quad (n,m\to\infty),$$

则称$\{x_n\}$是X中的**基本列**(或 Cauchy 列). 若X中任意基本列都在X中收敛，则称(X,ρ)是**完备**的距离空间(或赋范空间).

本书上册已讨论过$L^p(1\leqslant p<\infty)$空间的完备性，除此而外，完备空间的例子是很多的. 例如，$C([a,b])$按距离$\rho(x,y)=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|$是完备的. $l^p(1\leqslant p\leqslant\infty)$也是完备的，不过其完备性证明并不是一件很轻松的事，有兴趣的

读者不妨一试.

注 可以证明 $L^p(1\leqslant p<\infty)$、$l^p(1\leqslant p<\infty)$及 l^∞ 分别按范数 $\|f\|_p \triangleq \left(\int_E |f|^p \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}$、$\|x\|_p \triangleq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ 及 $\|x\|_p \triangleq \sup_n |x_n|$ 构成完备的线性赋范空间.

例 2 记 $L^\infty(E)$为可测集 E 上几乎处处有界的可测函数全体,对任意 f, $g\in L^\infty(E)$,定义

$$\begin{aligned}\rho(f,g) &= \operatorname*{esssup}_{x\in E}|f(x)-g(x)| \\ &\triangleq \inf_{mE_0=0,E_0\subset E}\left(\sup_{x\in E-E_0}|f(x)-g(x)|\right),\end{aligned} \tag{$*$}$$

则 ρ 是 $L^\infty(E)$上的距离,

$$\|f\|_\infty=\rho(f,0)\triangleq \inf_{mE_0=0,E_0\subset E}\left(\sup_{x\in E-E_0}|f(x)|\right) \tag{$**$}$$

是 $L^\infty(E)$上的范数. $(L^\infty(E),\|\cdot\|_\infty)$是完备的线性赋范空间.

可以证明,$(**)$式中的下确界 $\inf\limits_{mE_0=0,E_0\subset E}$ 是可达的,即对任意 $f\in L^\infty(E)$,存在 E 的零测子集 E_0,使得

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in E-E_0}|f(x)|$$

(请读者自行验证).

现设 f_n 是 $L^\infty(E)$中的 Cauchy 列,对每个 f_n,存在零测集 $E_n\subset E$,使得

$$\|f_n\|_\infty=\sup_{x\in E-E_n}|f(x)|,$$

对任意 n,m,也存在零测集 $E_{nm}\subset E$,使得

$$\rho(f_n,f_m)=\|f_n-f_m\|_\infty=\sup_{x\in E-E_{nm}}|f_n(x)-f_m(x)|,$$

记 $E_0=\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)\cup\left(\bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty}E_{nm}\right)$,则 $mE_0=0$,且对任意 $n,m=1,2,\cdots$,

$$\begin{aligned}\rho(f_n,f_m) &= \sup_{x\in E-E_{nm}}|f_n(x)-f_m(x)| \\ &\geqslant \sup_{x\in E-E_0}|f_n(x)-f_m(x)|\geqslant\rho(f_n,f_m).\end{aligned}$$

由$\{f_n\}$是 Cauchy 列立得 $\sup\limits_{x\in E-E_0}|f_n(x)-f_m(x)|\to 0(n,m\to\infty)$,即$\{f_n\}$是 $E-E_0$ 上一致收敛意义下的 Cauchy 列,故存在 $E-E_0$ 上的可测函数 f,使得

$$\sup_{x\in E-E_0}|f_n(x)-f(x)|\to 0\quad(n\to\infty).$$

在 E_0 上令 $f=0$,于是 f 可看作 E 上的可测函数. 注意到

$$\sup_{x\in E-E_0}|f_n(x)|\leqslant\sup_{x\in E-E_n}|f_n(x)|=\|f_n\|_\infty,$$

且由$\{f_n\}$是 Cauchy 列易知$\{\|f_n\|_\infty\}$有界,所以$\{f_n\}$在 $E-E_0$ 上一致有界,从而 f 在 E 上有界,故 $f\in L^\infty(E)$,并且

$$\rho(f_n,f)\leqslant\sup_{x\in E-E_0}|f_n(x)-f(x)|\to 0\quad(n\to\infty).$$

2.2 完备空间的重要性

欧氏空间中许多结论均依赖于空间的完备性，如直线上的闭区间套定理，平面内的闭矩形套定理等. 在完备的距离空间中，许多与欧氏空间情形类似的结论仍然成立.

定义 2 设(X,ρ)是距离空间，$x_0\in X$，

$$S(x_0,r)\triangleq\{x\in X\mid\rho(x,x_0)<r\}\quad(r>0)$$

称为以 x_0 为中心，r 为半径的**开球**；

$$\overline{S(x_0,r)}\triangleq\{x\in X\mid\rho(x,x_0)\leqslant r\}\quad(r>0)$$

称为以 x_0 为中心，r 为半径的**闭球**.

命题 1(闭球套定理) 设(X,ρ)是完备的距离空间，$\overline{S_n}=\{x\in X\mid\rho(x,x_n)\leqslant\varepsilon_n\}$是一串闭球：

$$\overline{S_1}\supset\overline{S_2}\supset\cdots\supset\overline{S_n}\supset\cdots,$$

如果球的半径 $\varepsilon_n\to 0$，则存在唯一的点 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{S_n}$.

证明 由命题的条件，不难看到球心组成的序列$\{x_n\}$是一个 Cauchy 列. 事实上，对任意 n,m，若 $n\geqslant m$，则由 $x_n\in\overline{S_n}\subset\overline{S_m}$ 得

$$\rho(x_n,x_m)\leqslant\varepsilon_m.$$

由此立得$\{x_n\}$是一个 Cauchy 列. 由 X 是完备的知存在 $x\in X$，使得 $\rho(x_n,x)\to 0$，在不等式

$$\rho(x_m,x)\leqslant\rho(x_n,x)+\rho(x_m,x_n)\leqslant\rho(x_n,x)+\varepsilon_m$$

中，固定 m 并令 $n\to\infty$ 得 $\rho(x_m,x)\leqslant\varepsilon_m$. 这说明 $x\in\overline{S_m}$，$m=1,2,\cdots$，故 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{S_n}$.

若另有 $y\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{S_n}$，且 $y\neq x$，则对任意 n，有

$$\rho(y,x_n)\leqslant\varepsilon_n,$$

由不等式

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,x_n)+\rho(x_n,y)\leqslant 2\varepsilon_n$$

及 $\varepsilon_n\to 0$ 立得 $\rho(x,y)=0$，从而 $x=y$，这就得到矛盾，所以 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{S_n}$ 必是单点集. 证毕.

在直线上的闭区间套定理中，即使区间的长度不趋于 0，所有区间的交仍然是非空的. 然而，在一般距离空间中，即使空间是完备的，假如闭球套的半径不趋于 0，则其交可能是空集.

从直线上 Cauchy 准则与闭区间套定理的等价性，人们自然会提出这样的