21世纪高等院校教材

国家级精品课程教材

大学数学教程

（下册）

姜东平　江惠坤　编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

大学数学教程

（下 册）

姜东平　江惠坤　编

科学出版社
北 京

内 容 简 介

本书分上、下两册. 上册内容包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程和差分方程简介、级数中的常数项级数、函数项级数、幂级数和傅里叶级数. 在附录里介绍了双曲函数、极坐标和复数的基本概念.下册内容包括空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线与曲面积分、场论初步、 线性代数中的行列式、矩阵与向量、线性方程组、矩阵的对角化和实二次型. 本书将微积分、空间解析几何、线性代数纳于一体， 内容安排上经过新的组合， 注意各知识之间的联系，更加合理、更加精炼.

本书可供理、工、农、医类中除数学、物理、天文等对数学要求特高的专业以外的本科生作教材和参考书用.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学教程. 下册 / 姜东平，江惠坤编. —北京：科学出版社，2005
(21世纪高等院校教材)
ISBN 7-03-015233-6

I.大… II.①姜… ②江… III.高等数学-高等学校-教材 IV. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2005) 第044991号

责任编辑：姚莉丽／责任校对：宋玲玲
责任印制：安春生／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销
*

2005年7月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2005年7月第一次印刷 印张：20 1/4
印数：1—3 000 字数：385 000

定价：25.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉)

前　言

本书是为南京大学的化学、化工、生化、医学、地学及环境科学所属各专业编写的基础课教材，也可作为普通高等院校理工农医类学生的数学基础课教材和教学参考书. 本书2004年成为国家级精品课程教材之一. 编者曾在南京大学有关各系的教师、学生中作过广泛的调查研究，在准确了解了后续的专业课对数学的要求的基础上，于 1994 年完成了初稿.在此后十年的使用过程中，根据教学改革过程中课程设置及教育部关于硕士生入学统一考试对数学二、三、四类考生的要求的不断变化，做了多次修改，形成了目前的版本.

本书分上、下两册，共 12 章. 上册 7 章，内容包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、广义积分、微分方程与差分方程、级数.下册 5 章，内容包括空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线与曲面积分、场论初步、线性代数. 全书教程约需 160~200 授课学时，可根据各不同专业要求和课时计划取舍部分内容.

在成书过程中，编者注意到：

一、将微积分、空间解析几何、线性代数纳于一体. 这样，既能比较好地阐述彼此的联系，对教师及学生使用起来也比较方便. 对空间解析几何不作深入讨论，仅围绕多元函数微积分的需要作必要的介绍. 对线性代数不追求体系上的完整，凡可以合并处理的均合并处理，减少平行的论述， 以求用尽量少的篇幅涵盖尽量多的内容.

二、不追求理论上的严密而着重于方法的阐述，目的在于为学生的专业课的学习提供必要的足够的数学知识和常用的基本的数学方法. 虽然若干定理的证明被删去，但为理解这些定理所必需的概念及由这些定理所导出的公式、方法都力求阐述清楚，以求读者熟练掌握和灵活运用.

三、注意全书各个部分之间的联系. 例如：全微分方程与线积分，矩阵的对角化与一阶线性微分方程组，级数与极限，向量与矩阵……指出这些联系，为的是加深读者对相关内容的理解，从而灵活、有效地运用有关方法.

四、将少量并非各专业都需要的内容以小字排印，教师可以按不同专业决定取舍.

五、在每册书的最后，给出了大部分习题的答案，供读者核对之用.

由于水平、能力所限，不当之处在所难免，恳请同行、专家不吝赐教.

编　者

2005 年于南京大学

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 8 章　空间解析几何

空间解析几何的任务是用代数的方法研究空间图形的性质. 这在工程技术上有广泛的应用. 此外, 就高等数学课程本身而言, 空间解析几何不但能给多元函数以直观的几何解释, 而且也为多元函数的积分学提供必要的准备. 因此, 在进入多元函数微积分的学习以前, 首先要了解空间解析几何的若干基础知识.

为了学习空间解析几何, 本章还要介绍少量的有关二阶行列式、三阶行列式及向量代数的基本知识, 而有关行列式与向量的进一步讨论, 将在第 12 章进行.

8.1　二阶和三阶行列式

8.1.1　二阶行列式, 二元一次方程组

我们来讨论二元一次联立方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \tag{8.1}$$

大家知道, 解这个方程组, 可以采用消元法. 为了消去 y, 以 b_2 乘第一个方程, 以 b_1 乘第二个方程, 然后两者相减得:

$$(b_2a_1 - b_1a_2)x = b_2c_1 - b_1c_2. \tag{8.2}$$

用同样方法可消去 x, 得

$$(a_2b_1 - a_1b_2)y = a_2c_1 - a_1c_2. \tag{8.3}$$

由此, 当 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ 时, 方程组 (8.1) 有唯一的解

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{8.4}$$

(8.4) 实际上就是方程组 (8.1) 的求解公式. 为了使这个公式便于记忆, 我们引用记号

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},$$

并称之为二阶行列式. 它的值定义为 $A_1B_2 - A_2B_1$. 即

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1,$$

其中数 A_1, B_1, A_2, B_2 称为行列式的元素，横排称为行，从上向下依次为第一行、第二行；纵排叫列，从左到右依次为第一列第二列，二阶行列式含有两行两列共 4 个元素. 按定义，二阶行列式的值是两个积的代数和，其构成方法可通过下图来记忆：

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

一个积由图中实线相连的两个元素相乘，冠以正号；另一个积由图中虚线相连的两个元素相乘，冠以负号. 例如：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - (-3) \times 2 = 10,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1.$$

于是，利用二阶行列式，方程组 (8.1) 的解 (8.4) 可以写为

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

这些公式中的分母是方程组 (8.1) 中 x, y 的系数按原来位置组成的二阶行列式 (称为**系数行列式**)，不妨记为 Δ. 而 x 的右端分子中的行列式是把 Δ 中的 a_1, a_2(组 (8.1) 右端中 x 的系数) 换成 (8.1) 的常数项 c_1, c_2 而成，不妨记为 Δ_x. 同样，y 右端分子中的行列式是把 Δ 中的 b_1, b_2(组 (8.1) 中 y 的系数) 换成常数项 c_1, c_2 而成，记为 Δ_y. 于是，组 (8.1) 的解可以写成简单明了便于记忆而且还便于推广的形式：

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad (\Delta \neq 0). \tag{8.5}$$

公式 (8.5) 要求 $\Delta \neq 0$, 当 $\Delta = 0$ 情形又如何呢？采用记号 Δ, Δ_x 和 Δ_y, (8.2) 和 (8.3) 可写为

$$x\Delta = \Delta_x, \quad y\Delta = \Delta_y.$$

如果 $\Delta = 0$, 而 Δ_x, Δ_y 不都为零，则无论 x 和 y 取什么值，上两式都不能同时成立，故此时方程组 (8.1) 无解.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

如果 Δ, Δ_x 以及 Δ_y 都等于零，即同时成立

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0, \quad c_1b_2 - c_2b_1 = 0, \quad a_1c_2 - a_2c_1 = 0,$$

于是

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

因而方程组 (8.1) 中的一个方程可由另一方程乘以适当常数得到. 两个方程实质上成了一个方程，但未知数却是两个，因而方程组有无穷多组解.

综上所述，可得下述结论：

1) 若 $\Delta \neq 0$, 则方程组 (8.1) 有唯一的解：

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

2) 若 $\Delta = 0$, 但 Δ_x, Δ_y 不全为零，则方程组 (8.1) 无解.

3) 若 $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, 则方程组 (8.1) 有无穷多组解.

例 8.1.1　解方程组

$$\begin{cases} 3x + 4y = -1 \\ 2x - 3y = 5. \end{cases}$$

解

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 8 = -17 \neq 0,$$

故方程有唯一的一组解：

$$x = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \frac{-17}{-17} = 1, \quad y = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{17}{-17} = -1. \qquad \square$$

例 8.1.2　解方程组

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 4x + 2y = -2. \end{cases}$$

解

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

故方程组有无穷多组解. 实际上，方程组只含一个方程

$$2x + y = -1,$$

由此可知，方程的解可表为 $y = -(2x + 1)$, x 取任意值.　$\square$

例 8.1.3　讨论方程组

$$\begin{cases} 3x+2y+1=0, \\ 6x+4y-1=0 \end{cases}$$

是否有解.

解

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

可见方程组无解. 事实上由第一个方程得 $6x+4y=-2$, 与第二方程 $6x+4y=1$ 是矛盾的. □

彼此矛盾的方程称为 **不相容的方程**.

8.1.2　三阶行列式, 三元一次方程组

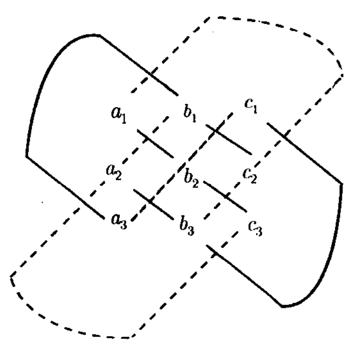
现在, 我们来推广 8.1.1 的结果. 称记号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

为一个三阶行列式, 它的值定义为

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1. \tag{8.6}$$

(8.6) 的右端是 6 个积的代数和, 可按下图所示的 **对角线法则** 记忆:



凡用实线相连的三个数的积, 均冠以正号, 而凡以虚线相连的三个数的积, 均

冠以负号. 例如:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 1+(-1)\cdot(-2)\cdot 2$$
$$+2\cdot 3\cdot 0-2\cdot 2\cdot 2-1\cdot(-2)\cdot 3-1\cdot(-1)\cdot 0$$
$$=2+4+0-8+6-0=4.$$

和二阶行列式一样, 三阶行列式的横排自上而下称为第一行、第二行、第三行, 竖排自左到右称为第一列、第二列、第三列, 三阶行列式由三行三列共 9 个元素组成.

利用二阶行列式的定义, (8.6) 的右端可以变形为:

$$\begin{aligned} &a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1 \\ &=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-b_1(a_2c_3-a_3c_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2) \\ &=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

于是 (8.6) 可以写为

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{8.7}$$

用公式 (8.7) 计算三阶行列式的值称为 **按行列式的第一行展开**. 其规则是:

将第一行的三个数各自乘以一个二阶行列式, 而这个二阶行列式是由原三阶行列式划去该数所在的行和列后留下的 4 个元素保持原有的相对位置构成的. 在如此得到的三个积中, 第一个、第三个冠以正号, 第二个冠以负号, 求它们的代数和. 例如:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=8-4=4.$$

两种算法算出的结果相同.

类似地, 还可以按第三行展开:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

第 12 章将指出按任何一行或任何一列展开行列式的一般方法.

现在，对于三元一次联立方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \tag{8.8}$$

陈述若干结果. 称

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

为方程组 (8.8) 的系数行列式，类似于二元一次方程组，在 (8.8) 的 3 个方程中，以常数项分别代替 x, y, z 的系数得行列式：

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

1) **若**$\Delta\neq 0$, **则方程组**(8.8)**有唯一的解**

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

2) **若**$\Delta=0$, **而**Δ_x, Δ_y, Δ_z**不全为 0, 则组**(8.8)**无解**.

3) **若**$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$, **则组**(8.8)**可能无解也可能有无穷多组解**(这与二元的情形不同 !)

我们暂时不来证明这些结论. 这一节所讲的一切都是第 12 章所要讲到的 n 阶行列式及 n 元线性方程组的特例，在那里，我们将较深入地讨论 n 阶行列式的丰富多采的性质及 n 元线性方程组的基本理论.

习　题　8.1

1. 利用对角线法则，求下列行列式的值：

1) $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$;　　2) $\begin{vmatrix} a-b & -b \\ b & a+b \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$;　　4) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$;　　6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$.

2. 按第一行元素展开，求下列行列式的值：

1) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$； 2) $\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ a & b & 0 \\ 0 & b & c \end{vmatrix}$.

3. 解下列方程：

1) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$； 2) $\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ 2x & 5 & 3 \\ 9 & 10 & 8 \end{vmatrix} = 0$.

4. 解下列方程组：

1) $\begin{cases} 3x - y = 3, \\ x + 2y = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 5y = 4, \\ 9x - 15y = 12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x + 5y = 4, \\ 6x + 10y = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - y - 10 = 0, \\ x + 3y - 5 = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + 2y + z = 0, \\ 2x - y + z = 1, \\ x - y + 2z = 3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x - y + z = a, \\ x + y - z = b, \\ -x + y + z = c; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x - y + z + 2 = 0, \\ x + 2y + 3z + 1 = 0, \\ x - 3y - 2z - 3 = 0. \end{cases}$

8.2 空间直角坐标系

8.2.1 空间直角坐标系

在平面解析几何中，为了确定平面上任意一点的位置，曾经建立起平面直角坐标系. 这实际上就是两条互相垂直的有相同单位长度的数轴. 借助于这两条数轴，平面上任何一点的位置可以用一对有序实数 (x, y) 表示出来. 可是对于空间的点，单有两个有序实数 (x, y) 已经不能确定其位置了. 粗糙地说，还需要知道所讨论的点离开“地面”多少高度. 为此，我们在平面直角坐标的基础上，再增加一条数轴，建立空间直角坐标系.

具体地说，在空间某点 O 引三条两两垂直的具有共同单位长度的数轴 Ox, Oy 和 Oz(称之为坐标轴，它们的交点 O 称为坐标原点)，各轴的正向通常按右手法则确定：即以右手握住 Oz 轴，让握轴的四指从 Ox 轴的正向转向 Oy 轴的正向所经过的角度为 $\frac{\pi}{2}$，则拇指伸直所指的方向规定为 Oz 轴的正向. 这样就确定了一个空间直角坐标系 (见图 8.1)，Ox 轴，Oy 轴，Oz 轴分别称为横轴、纵轴和竖轴. 为了在平面上作出立体图，习惯上让 Ox 轴的正向指向前方 (即指向阅读者)，Oy 轴

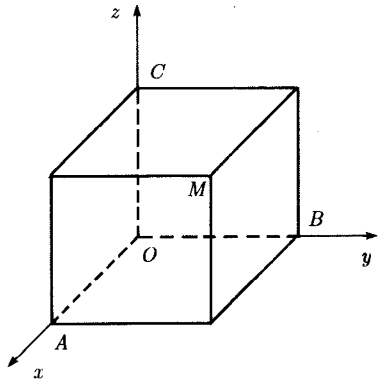


图 8.1

的正向指向右方，而 Oz 轴的正向指向上方. 三个坐标轴两两决定一个平面，这三个平面称为坐标平面. Ox 轴与 Oy 轴所确定的平面记为 xOy 平面，类似地有 yOz 平面和 zOx 平面. 三个坐标平面把整个空间分成 8 个部分，称之为 **卦限**, 在 xOy 平面第一、第二、第三、第四象限上方的那 4 个卦限依次称为第一卦限、第二卦限、第三卦限和第四卦限，而在它们下方的那些卦限则依次称为第五、六、七、八卦限.

设 M 为空间一点，过 M 作三个平面分别垂直于三个坐标轴，依次以 A, B, C 记这些平面与 Ox, Oy 轴，Oz 轴的交点，则 A, B, C 在各自所在的坐标轴 (数轴) 上有确定的坐标 x, y, z, 于是 M 唯一地决定一组有序实数 x, y, z; 反之，给定三个有序实数 x, y, z, 在坐标轴 Ox, Oy, Oz 上可以各自确定一点 A, B, C, 它们在各自所在的轴上分别以 x, y, z 为坐标，于是依次过 A, B, C 作与轴 Ox, Oy, Oz 垂直的三个平面交于唯一的一点 M. 这样一来，空间的点就与三个有序实数 x, y, z 建立了一一对应的关系. 这三个实数称为点 M 的 **直角坐标** 也简称 **坐标**. x 称作 **横标**, y 称作 **纵标**, z 称作 **竖标** 或 **立标**, 横标为 x, 纵标为 y, 竖标为 z 的点 M 记作 $M(x,y,z)$.

如果点 M 在坐标面上，则它的三个坐标至少有一个为 0. xOy 平面上 $z=0$, yOz 平面上 $x=0$, zOx 平面上 $y=0$. 如果点 M 在坐标轴上，则它的三个坐标至少有两个为 0：Ox 轴上 $y=z=0$, Oy 轴上 $z=x=0$, Oz 轴上 $x=y=0$. 原点 O 的三个坐标均为 0.

8.2.2　两点间的距离

设已知空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$, 为了利用这两点的坐标计算它们的距离 $|M_1M_2|$, 过 M_1 和 M_2 各作三个平面分别垂直于三个坐标轴，这六个平面构成一个长方体 (见图 8.2), 线段 M_1M_2 就是这长方体的对角线. 由于 ΔM_1QM_2 和 ΔM_1PQ 都是直角三角形，利用勾股定理，得

$$\begin{aligned}|M_1M_2|^2 &= |M_1Q|^2+|QM_2|^2\\ &= |M_1P|^2+|PQ|^2+|QM_2|^2\\ &= |M_1'P'|^2+|P'M_2'|^2+|QM_2|^2\\ &= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\\ &\quad +(z_2-z_1)^2.\end{aligned}$$

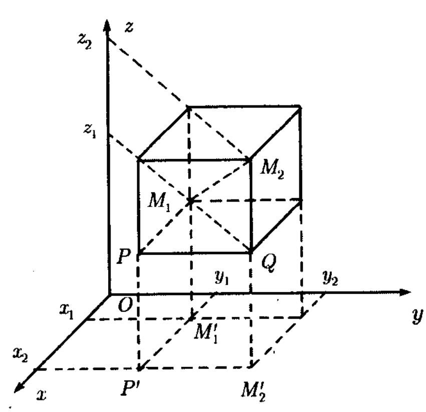


图 8.2

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com