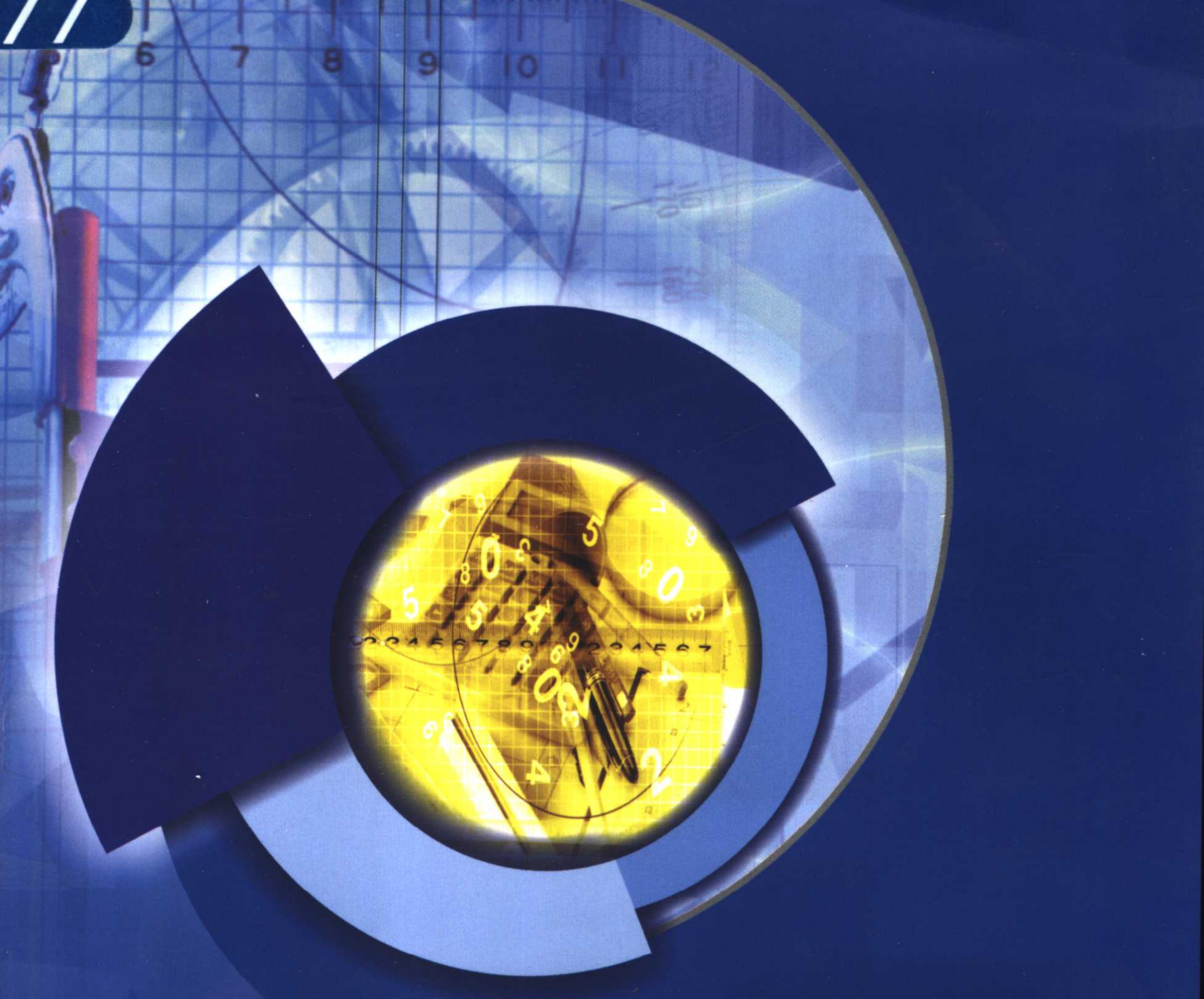


21世纪高等院校创新教材

胡端平 主编

高等数学（上）

科学出版社
www.sciencep.com

·21世纪高等院校创新教

高等数学

（上）

胡端平　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书为高等院校高等数学课程教材，参照教育部工科数学课程教学指导委员会制定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》编写而成. 本教材分上、下两册，上册内容包括：极限论、微分学、积分学和级数理论，每章含有复习题和数学实验，每节后配有一定数量各种类型的习题，书末附有参考答案.

本书具有特色，体系结构新颖，重视数学思想的陈述，充分运用直观的方法展现数学的概念、理论和方法，注意数学发生、发展中的关联性，在保持理论高度的前提下，陈述和论证推理的难度有较大的降低. 故本教材是普通高等院校工科类本科各专业高等数学课程的理想教材，也可作为其他类别学生的相同课程教材，还可作为有关人员的教研参考书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上/胡端平主编. -北京：科学出版社，2005
（21世纪高等院校创新教材）
ISBN 7-03-015416-9

I.高… II.胡… III.高等数学-高等学校-教材 IV.O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第037537号

责任编辑：冯贵层
责任印制：高 嵘／封面设计：李梦佳

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
武汉大学出版社印刷总厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2005年5月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2005年5月第一次印刷 印张：26 1/4
印数：1~8 000 字数：520 000

定价：32.80元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前 言

在高等教育大众化的过程中，高等数学教学的问题突现，引起我们的反思. 这套教材，以全新的教育理念与教学方法，为高等教育大众化条件下的高等数学教育作些探讨.

呈现数学思想，揭示数学理论与方法产生的背景，展现数学发展过程，无疑是数学教材中至为重要的，我们在本书中始终坚持这样做. 在教学理念中，如何把握形式逻辑与辩证逻辑，严格论证与拟真推理之间的平衡点，书中作了充分的尝试. 数学是如何产生的固然重要，然而其应用对于学生更是一种学习的动力和目的，我们注重数学在这方面的作用. 数学实验不但能帮助学生直观地了解数学，而且是一种现代技术的应用，所以我们以单元的方式介绍了数学实验.

似乎理论的高度与教学的难度是正相关关系：若要求理论有一定高度，就导致教学难度的增加；若要降低教学难度，就导致理论的降低. 我们试图在保证理论高度不降的情况下，使教学难度降低，这一目的在书中得到了较好的实现.

同时，我们也追求一种生动活泼、亲切可人的风格，使人们将原本非常美感的数学学科误认为是枯燥乏味(至少是非数学专业的部分人士的感觉)的学科的观念有所改变. 因此，书中除有关数学史料外还有些人文精神的体现.

本书上、下两册均由胡端平主编，上册由柳翠华、孙霞林任副主编，共四章，包括极限论、微分学、积分学、级数理论；下册由李小刚、王志宏、刘华国任副主编，共六章，包括空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、场论初步、微分方程初步. 第一章、第三章和第九章由胡端平编写，第二章由柳翠华编写，第四章和第六章由孙霞林编写，第五章和第十章由刘华国编写，第七章和第八章由王志宏编写，数学实验单元由李小刚编写. 全书由胡端平进行统稿，并由李小刚对全书进行了校审.

书中打“*”号的部分可视学生接受能力及专业要求由教师决定是否讲授. 大部分章节的习题分为 A，B，C 三组，其难度依次递增，A 组习题是最低要求，C 组习题视学生的能力而取舍. 定义、定理、例题、公式和图形均以节为单位编号.

我们深知，在高等数学这样经典的课程里，写出一套别具风格而受到欢迎的教材是非常困难的. 这套教材是我们工作的开始，我们将坚持不懈地探索，为我国高等数学教育尽一份力量. 因此，我们诚恳地希望得到同行们的批评、指教.

编 者

2005 年 3 月

目　　录

第一章 极 限 论

欧洲文艺复兴以后，随着人类社会工业化的起步，科学观点有了重大突破. 哥白尼(Nicolaus Koppernigk，1473~1543)提出了“日心说”，在天文学引起了一场革命，它震撼了人们的宇宙观，也震撼了宗教，同时在科学思想上也引起了一场革命. 哥白尼是位数学家(数学是他否定“地心说”的武器，建立“日心说”的工具)，他希望从数学上描述各行星的运动规律. 稍晚，约翰·开普勒(John Kepler，1571~1630)归纳出行星运动的三个定律：行星运行的轨道是椭圆的，太阳在一个焦点上；太阳中心与行星中心的连线在轨道上所扫过的面积与时间成正比；行星绕太阳运动一周的时间的平方与其至太阳的平均距离的立方成正比. 与开普勒同时代对科学起着巨大作用的人物是伽利略(Galileo Galilei，1564~1642)，他划时代的主要成就是得到了自由落体运动方程 $s=\frac{1}{2}gt^2$，即自由落体的速度与时间成正比，从而奠定了动力学的基础.

稍比伽利略年轻的笛卡尔(Ren'e Descartes，1596~1650)把代数的方法应用于几何，产生了解析几何，使数学大大前进了一步. 对于曲线而言，有两个基本问题：一是求切线；另一个就是求曲线围成的面积. 当时很多杰出的数学家进行了艰难的工作，如笛卡尔、费马(Pierre de Fermat，1601~1665)、牛顿(Isaac Newton，1642~1727)在剑桥的导师伊索克·巴罗(Isaac Barrow，1630~1677)、罗伯瓦尔(Gilles persone de Roberval，1604~1675)等等.

一是要研究物体的运动，二是要研究各种曲线，这些问题的研究靠算术、代数和欧几里得几何方法是解决不了的. 经过几代人的艰苦探索，微积分诞生了，其创造者是英国人牛顿和德国人葛特福莱·威尔赫姆·莱布尼茨(Gotlfried Wilhelm Leibniz，1646~1716). 他们总结了前人的工作，利用“无穷小分析”，使微积分学成为新的数学方法. 但他们的理论不严格，概念上还有一些含糊，这些正是受到批评的原因. 一百多年后，法国年轻的数学家柯西(Augustin Louis Cauchy，1789~1857)建立了严格的理论基础.

微积分的基础是极限理论. 极限的思想方法很早就有，在我国约 3 世纪的刘徽在他所著的《九章算术·圆田术》注中，就提出了割圆术，即以圆内接正多边形的面积逼近圆的面积. 而《九章算术》相传至少在公元前 1100 年由周公姬旦所作，但至今无从考证. 无独有偶，在公元前 200 多年以前，古希腊数学家阿基米德(Archimedes，前 287~前 212)在他的《圆的度量》中研究了圆的面积，他利用增加圆的内接多边形和外切多边形的边数而使它们逐步逼近圆的面积，后人称之

为割圆术. 直到后来，柯西才建立了严格的极限理论，成为分析学的基础.

极限的概念与理论贯穿于高等数学的始终，可以毫不夸张地说，高等数学主要就是研究了某些不同形式的极限. 因此，较好地掌握极限的概念、性质以及极限的运算，不仅对高等数学的学习至关重要，而且对学习其他数学学科也至关重要.

§1.1 映射与函数

大千世界，纷纷扰扰，各种现象之间存在错综复杂的关系，在哲学层面上，各自然现象、各社会现象之间是有机地互相关联的，我们的目的是从量上描述这种关联.

1. 映射

映射是两事物或多事物之间的一种关系. 例如，到电影院看电影，观众为一个集合 A，电影院的座位为另一个集合 B，对 A 中的每个观众，B 中有惟一的一个座位与之对应；又如矩形的面积由其长和宽决定. 总结这些现象或事物之间的联系，我们有

定义 1.1 设 A，B 为两非空集合，A，B 之间存在一个对应关系 f，称 f 为 A 到 B 的一个映射；如果对 A 中每一个元素 a，通过 f，B 中存在惟一的元素 b 与之对应，称 b 为 a 的像，a 为 b 的原像. 我们记作

$$f:\ A\to B,\quad a\mapsto b \text{ 或 } b=f(a)$$

称 A 为 f 的定义域，记为 $D(f)$；B 为 f 的值域，记为 $R(f)$. 见图 1.1.

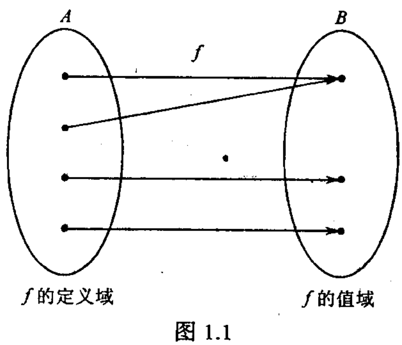


图 1.1

注 两非空集合 A，B 之间的关系 f 是映射必须满足以下三个条件:

(1) A 中所有元素都有像；

(2) A 中所有元素的像都在 B 中(B 中每个元不必为 A 中元素的像)；

(3) A 中每个元素的像是惟一的.

例 1.1 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$为 4 个人，$B=\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$为 5 个座位集

合. 判断下面的关系是否为 A 到 B 的映射:

$f_1: a_1 \mapsto b_1, a_2 \mapsto b_1, a_3 \mapsto b_1, a_4 \mapsto b_2$;

$f_2: a_1 \mapsto b_1, a_2 \mapsto b_2, a_3 \mapsto b_3, a_4 \mapsto b_5$;

$f_3: a_1 \mapsto b_1, a_2 \mapsto b_2, a_3 \mapsto b_3$;

$f_4: a_1 \mapsto b_1, a_2 \mapsto b_2, a_3 \mapsto b_3, a_4 \mapsto b_4, a_1 \mapsto b_5$;

$f_5: a_1 \mapsto b_1, a_2 \mapsto b_2, a_3 \mapsto b_3, a_4 \mapsto c_4$.

解 f_1, f_2 均为 A 到 B 的映射, 而 f_3, f_4, f_5 则不是 A 到 B 的映射, 这是由于在 f_3 下, a_4 没有像, 在 f_4 下 a_1 有两个不同的像 b_1 和 b_5, 在 f_5 下 a_4 的像不在 B 中.

例 1.2 我们观看一个地图, A={东, 南, 西, 北}为 4 个方向的集合, 而 B={上, 下, 左, 右}是相对于看地图的 4 个方位, 则

$$f: 东 \mapsto 右, 南 \mapsto 下, 西 \mapsto 左, 北 \mapsto 上$$

为 A 到 B 的一个映射.

现在我们来考察 f_1, f_2 和 f 不同之处(共性均为映射), 见图 1.2.

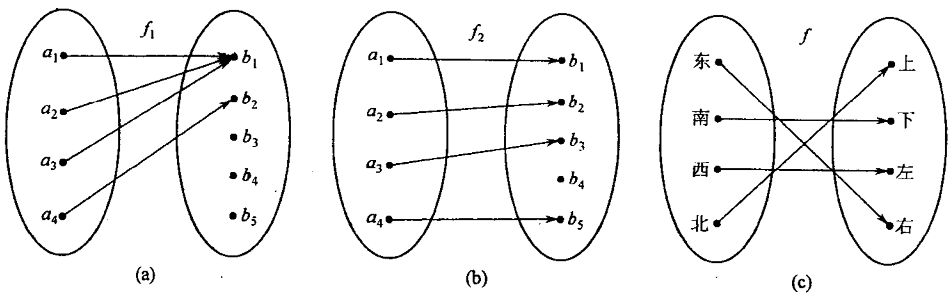


图 1.2

关于 f_1, a_1, a_2, a_3 有相同的像 b_1(可以多对一); 关于 f_2, a_1, a_2, a_3, a_4 的像均不相同, 但 A 中没有元素与 b_4 对应; 关于 f, A 中不同的元素像也不同, 并且 B 中每个元素, A 中有元素与之对应. 我们将以上的映射进行分类:

定义 1.2 设 f 为集合 A 到集合 B 的映射, 如果 A 中任意两不同的元素($a_1 \neq a_2$), 它们的像也不同($f(a_1) \neq f(a_2)$), 称 f 为单射; 如果对于 B 中的任意一个元素 b, A 中有元素(可能不止一个)a 与之对应, 即 $f(a)=b$, 称 f 为满射; 如果 f 既是单射又是满射, 称 f 为双射或 1-1 对应(映射).

显然例 1.1 和例 1.2 中, f_2 为单射不是满射, 而 f 既是单射也是满射, 从而 f 为双射

2. 函数

(i) 定义与例

我们考虑特殊的映射——函数.

定义 1.3 设 f 为集合 A 到 B 的映射，如果 B 为数集，称 f 为函数. 当 B 为实数集时，称 f 为实值函数；当 B 为复数集时，称 f 为复值函数.

当 $x \in A$，称 $f(x)$为 x 的函数值. 这里函数的定义域 A 可以为数集，也可以不是数集. 当 A 为实数集时，f 称为实变量函数；当 A 为复数时，f 称为复变量函数. 见图 1.3. 在本教材中，我们只讨论 A，B 均为实数集合或其子集的函数. 将定义域 A 置于坐标系横轴，值域 B 置于纵轴，当然定义域可以为横轴，值域也可以为纵轴. 称平面点集

$$G(f)=\{(x,\ f(x))|x \in A\}$$

为 f 的图像. 一般 f 的图像为平面曲线，如图 1.4 所示.

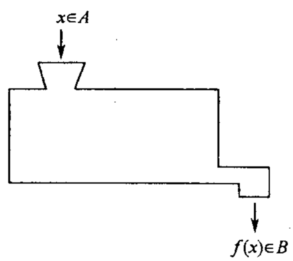


图 1.3

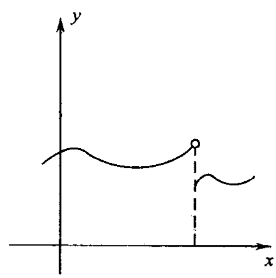


图 1.4

注 若曲线 l 为函数 f 的图像，则垂直于 x 轴的任意一条直线与 l 至多只有一个交点. 如图 1.5 中的曲线为函数的图像；而图 1.6 中的曲线不是函数的图像，这是由于 x_0 的像有 y_1，y_2，y_3，不惟一.

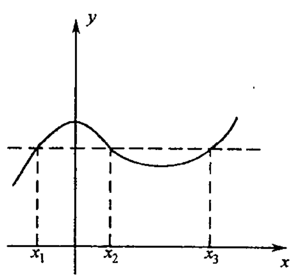


图 1.5

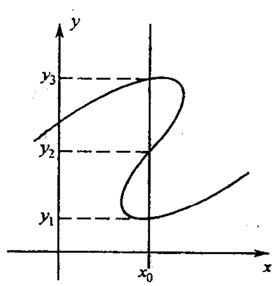


图 1.6

例 1.3(取整函数) $\forall x \in R$(R 为实数集合，$\forall x$ 意为对于任意取定的 x)，定义

$$f(x)=[x]=n \quad (n \leqslant x<n+1,\ n \text{ 为整数})$$

即$[x]$为不大于 x 的最大整数，如$[-1.3]=-2$，$[0.5]=0$，$[3.9]=3$，$[5]=5$. 称$[x]$为取整函数，如图 1.7 所示.

显然有

$$[x]\leqslant x<[x]+1 \tag{1.1}$$

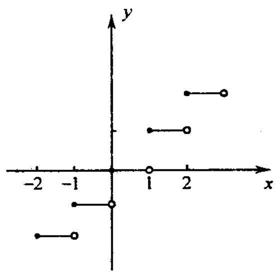


图 1.7

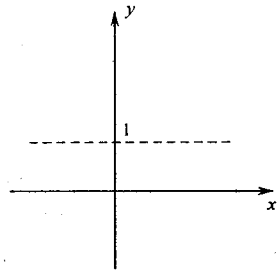


图 1.8

例 1.4 Dirichlet[①]函数

$$D(x)=\begin{cases}1, x\text{ 为有理数}\\0, x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

如图 1.8 所示．这个函数有很多“奇怪”的性质(以后会涉及)，以前见到的函数总可以通过一个解析式表达，这个函数的出现意味着数学从研究“算”到研究“概念、性质、结构”的转变．

例 1.5 符号函数

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\0, & x=0\\-1, & x<0\end{cases}$$

如图 1.9 所示．符号函数可以简化某些函数的表达式，如$|x|=x\operatorname{sgn} x$.

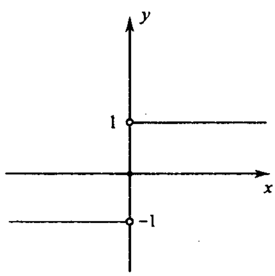


图 1.9

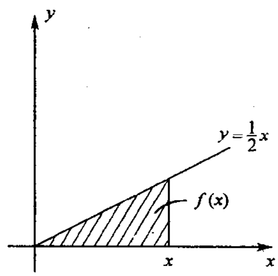


图 1.10

例 1.6 设直线 l：$y=\dfrac{1}{2}x$，则由 x 轴、l 和过 x 点且垂直于 x 轴的直线($x\geqslant 0$)所围成的面积是 x 的函数：

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2\quad (x\geqslant 0)$$

① 狄利克雷(P. G. L. Dirichlet，1805~1859)，德国数学家．22 岁任布雷斯劳大学讲师，24 岁任柏林大学讲师，34 岁晋升为教授．他对数学的贡献涉及各方面，其中在数论、分析、位势论尤为突出．

如图 1.10 所示，$f(x)$的定义域为$[0,+\infty)$.

我们将上例推广成

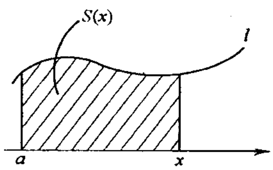


图 1.11

例 1.7 设 x 轴上方有一曲线 l，由 l、x 轴、过 x 轴两点 a、$x(x>a)$垂直于 x 轴的直线围成的图形称之为曲边梯形，见图 1.11，则曲边梯形的面积为 x 的函数 $S(x)$. 也就是说，任给 $x\geqslant a$，则曲边梯形存在惟一面积 $S(x)$与之对应. $S(x)$的定义域为 $x\geqslant a$.

例 1.8(所得税函数) 我国个人所得税以个人按月收入超过起征点 a 元分 9 级征收. 税率表如下(表示的区间不含左端点，但含右端点)：

月收入>a	0~500	500~2000	2000~5000	5000~20000	20000~40000	40000~60000	60000~80000	80000~10万	10万以上
税率%	5	10	15	20	25	30	35	40	45
速算扣除数	0	25	125	375	1375	3375	6375	10375	15375

个人所得税=应纳税额×适用税率−速算扣除数

某单位职工月收入不超过 5000 元，所在地区所得税起征点 a=800 元，则该单位职工每月交纳个人所得税金是月收入的函数

$$f(x)=\begin{cases}0.05(x-800), & 800<x\leqslant 1300\\ 0.1(x-800)-25, & 1300<x\leqslant 2800\\ 0.15(x-800)-125, & 2800<x\leqslant 5800\end{cases}$$

我们从例 1.5 和例 1.8 看到，有的函数的解析式的表达不单一，在定义域内不同的区间内有不同的表达式，人们俗称为分段函数，其实分段函数没有严格的定义. 同时我们还指出，对于同一个函数，其解析式表达是不惟一的，例如

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

也可表示成$|x|=\sqrt{x^2}$.

(ii) 数列

记 $N^+=\{1, 2, \cdots\}$，即 N^+为正整数集合，称 N^+上的函数

$$f:\ N^+\to R,\ a_n=f(n)$$

为数列，f 在 n 的函数值 $a_n=f(n)$为数列的通项，一般记成数列$\{a_n\}$(之所以加定语“数列”，是防止与集合$\{a_n\}$相混淆).

对数列$\{a_n\}$的几何表示一般有两种：一是将点列$(n, f(n))$ $(n=1,2,\cdots)$作在平面上成为平面点图，如图 1.12 所示；二是将 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$依次在实数轴上以点的方式给出，如图 1.13 所示.

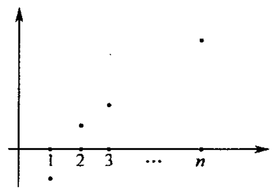


图 1.12

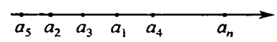


图 1.13

例 1.9 写出以下数列的通项并判断它们的变化趋势:

(1) $1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{4},\cdots$

(2) $1,-1,1,-1,\cdots$

(3) $1,2,3,\cdots$

(4) $1,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{7},\dfrac{1}{8},\cdots$

解 (1) $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$随着 n 的增加接近于零.

(2) $a_n=(-1)^{n-1}=\begin{cases}1, & n\text{为奇数}\\ -1, & n\text{为偶数}\end{cases}$,点列 $a_n\,(n\geqslant 1)$在 1 与-1 两点交错跳跃.

(3) $a_n=n$,随着 n 的增加而变大(大到什么程度以后讨论).

(4) 我们观察奇数项的数列为$1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\cdots$,从而

$$a_{2n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}\quad (n=1,2,\cdots)$$

再看偶数项的数列为$\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{7},\cdots$,从而

$$a_{2n}=\frac{1}{2n+1}\quad (n=1,2,\cdots)$$

总之有

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{k-1}}, & n=2k-1\\ \dfrac{1}{2k+1}, & n=2k\end{cases}$$

并随着 n 的增加而趋近于零. 见图 1.14(a~d).

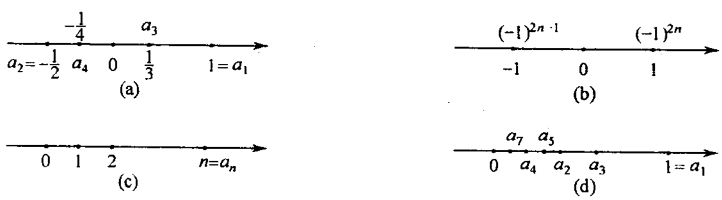


图 1.14

例 1.10 在数值计算中，常用一种迭代法，即给定 a_0 称为初始值，有一个已知的算式

$$a_n = f(a_{n-1}),\ a_0 = a,\ n \geqslant 1 \tag{1.2}$$

(1.2)式称为一阶递归方程. 若将 a_0 代入式中便可算出 $a_1 = f(a_0)$，将 a_1 代入式中算出 $a_2 = f(a_1), \cdots$ 如此下去，便可算出 a_n，这种算法称为迭代法. 如取 $a_0=2$，$a_n = a_{n-1}^2$，则

$$a_1 = a_0^2 = 4,\ a_2 = a_1^2 = 16,\ a_3 = a_2^2 = 16^2 = 256, \cdots$$

(iii) 基本初等函数

作为本节的结束，我们将在高中所学的几种函数提炼出来，称下列函数为基本初等函数：常数 C；幂函数 x^α；指数函数 $a^x(a>0，a\neq 1)$；三角函数 $\sin x$，$\cos x$，$\tan x$，$\cot x$；对数函数 $\log_a x$；反三角函数 $\arcsin x$，$\arccos x$，$\arctan x$，$\operatorname{arccot} x$.

基本初等函数可以构造一些较复杂函数，在微分和积分中主要是研究由基本初等函数构造出来的函数.

习 题 1.1

1. 设 A 为一年中的 365 天，下列关系是否为映射？若是映射，试求出值域.

(1) $\forall x \in A$，x 对应到它的降水量；

(2) $\forall x \in A$，x 对应到它的所属月份；

(3) $\forall x \in A$，x 对应到它的出生的婴儿数；

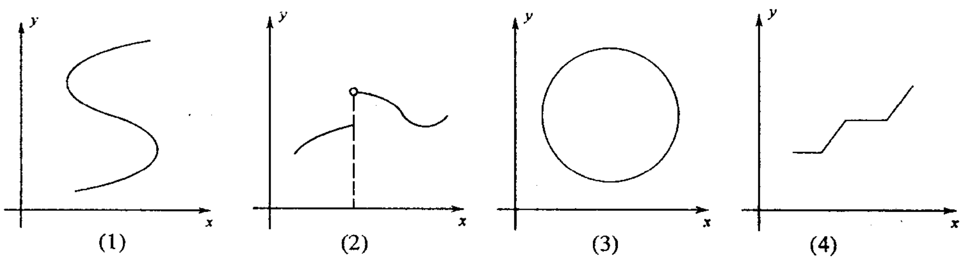
(4) $\forall x \in A$，x 对应到单日或双日.

2. 设 A=人类，下列关系是否为映射？

(1) $\forall x \in A$，x 对应到他的子女；

(2) $\forall x \in A$，x 对应到他的母亲.

3. 习题图 1.1 中哪些是 x 的函数?哪些不是?



习题图 1.1

4. 下列各题中的映射是否相同？为什么？

(1) 令 A=多边形集合，N 为自然数之集，f：$A \to N$，$x \mapsto x$ 的边数，g：$A \to N$，$x \mapsto x$ 的角的个数；

(2) $f(x)=\ln x^2$，$g(x)=2\ln x$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$ ， $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

5. 下列映射中哪些是单射？哪些是满射？哪些是双射？为什么？

(1) f_1: $N\to N$, $f(x)=x+1$;

(2) f_2: $Z\to Z$, $f_2(x)=x+1$, Z 为整数集；

(3) $A=\{小学生\}$ ， $B=\{小学\}$, $\forall x\in A$ ，将 x 对应到他所在的学校；

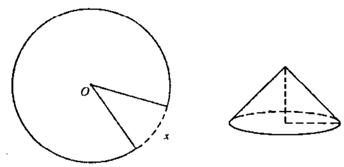
(4) f_3: $R\to R$, $f(x)=x^2$.

6. 作函数 $f(x)=x-[x]$ 的图像，并求 $f(n)$ $(n\in N)$ 和 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

7. 设 $f(x)=\begin{cases}3\sin^2 x+1, & x\geqslant 0\\ \mathrm{e}^x, & x<0\end{cases}$ ，求 $f(0)$, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

8. 将等边三角形的面积和周长表示为边长 x 的函数.

9. 将半径为 R 的圆片切掉弧长为 x 的扇形，将剩下部分的两条边相拼成为一个圆锥，如习题图 1.2 所示.



习题图 1.2

(1) 将圆锥底周长用 x 表示；

(2) 将圆锥底半径用 x 表示；

(3) 将圆锥容积用 x 表示.

10. 写出下列数列的通项，并指出其发展趋势：

(1) 0, $\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{8}{9}$, $\dfrac{15}{16}$, $\cdots$;

(2) 0.9，0.99，0.999，…；

(3) 0, $\dfrac{3}{2}$, $-\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{5}{4}$, $-\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{7}{6}$, $-\dfrac{6}{7}$, $\cdots$;

(4) −1，2，−3，4，−5，6，⋯.

§1.2 函数的运算

对于常数 a 和 b，有加、减、乘、除四则运算，那么对于两个函数 f 和 g 能否有这样的运算呢？事实上，对于给定的 x，$f(x)$ 和 $g(x)$ 均为数值，它们的四则运算就是常数的四则运算．例如 $f(x)=x^2$, $g(x)=\ln x$(以数 e 为底的对数)，当取 $x>0$ 时，$f(x)$, $g(x)$ 均有意义，即 $f(x)$, $g(x)$ 共同的定义域为 $(0,+\infty)$. 对于给定的 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)$，$g(x)$ 的四则运算是确定的，因此，我们可以用逐点的方式定义函数 f, g 的四则运算．记

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2+\ln x,\qquad x\in(0,+\infty)$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x^2-\ln x,\qquad x\in(0,+\infty)$$

$$(fg)(x)=f(x)\,g(x)=x^2\ln x, \qquad x\in(0,+\infty)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2}{\ln x}, \qquad x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$$

并分别称它们为f，g的加、减、乘、除运算.

另外，我们认为 $\sin 2x$ 是将 $u=2x$ 代入 $\sin u$ 而得到的函数，称之为由 $\sin u$ 和 $u=2x$ 复合而成的函数. 此节我们将介绍函数的两种运算——四则运算和复合运算.

1. 函数的四则运算

定义 2.1 设函数f，g的定义域分别为$D(f)$和$D(g)$，若$D(f)\cap D(g)\neq\varnothing$，$\forall x\in D(f)\cap D(g)$，如图 2.1 所示，定义$f$，$g$的四则运算：

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(fg)(x)=f(x)\,g(x)$$

$$(af)(x)=af(x) \quad (a\text{ 为常数})$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x)\neq 0)$$

在工程技术中，我们常碰到一类所谓双曲函数，它们是由指数函数 e^x 和 e^{-x} 通过四则运算生成的. 定义如下：

双曲正弦 $\qquad \operatorname{sh}x=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$，$x\in R$

双曲余弦 $\qquad \operatorname{ch}x=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$，$x\in R$

双曲正切 $\qquad \operatorname{th}x=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，$x\in R$

双曲余切 $\qquad \operatorname{coth}x=\dfrac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$，$x\in R-\{0\}$

$y=\operatorname{sh}x$ 和 $y=\operatorname{ch}x$ 的图像如图 2.2 所示.

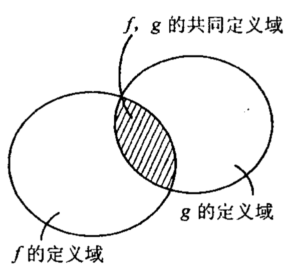


图 2.1

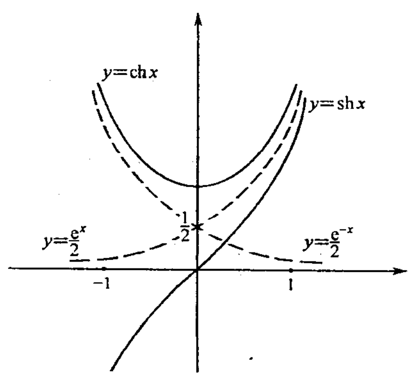


图 2.2

双曲函数有以下性质：

$$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1 \tag{2.1}$$

$$\mathrm{sh}(x\pm y)=\mathrm{sh}x\mathrm{ch}y\pm\mathrm{ch}x\mathrm{sh}y \tag{2.2}$$

$$\mathrm{ch}(x\pm y)=\mathrm{ch}x\mathrm{ch}y\pm\mathrm{sh}x\mathrm{sh}y \tag{2.3}$$

$$\mathrm{th}(x\pm y)=\frac{\mathrm{th}x\pm\mathrm{th}y}{1\pm\mathrm{th}x\mathrm{th}y} \tag{2.4}$$

$$\mathrm{coth}(x\pm y)=\frac{1\pm\mathrm{coth}x\mathrm{coth}y}{\mathrm{coth}x\pm\mathrm{coth}y} \tag{2.5}$$

我们只证(2.1)和(2.2)，其余留给读者.

$$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2-\frac{1}{4}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2=\frac{1}{4}[(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}+2)-(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}-2)]=1$$

由于 $\mathrm{sh}(x+y)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^{-(x+y)})$，而

$$\begin{aligned}\mathrm{sh}x\mathrm{ch}y+\mathrm{ch}x\mathrm{sh}y&=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-y})+\frac{1}{4}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y})\\&=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^{x-y}-\mathrm{e}^{-x+y}-\mathrm{e}^{-x-y})+\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^{x-y}+\mathrm{e}^{-x+y}-\mathrm{e}^{-x-y})\\&=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^{-(x+y)})\end{aligned}$$

故

$$\mathrm{sh}(x+y)=\mathrm{sh}x\mathrm{ch}y+\mathrm{ch}x\mathrm{sh}y$$

对于 $\mathrm{sh}(x-y)=\mathrm{sh}x\mathrm{ch}y-\mathrm{ch}x\mathrm{sh}y$ 同理可验证.

例 2.1 设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x\leqslant 0\\ \sqrt{x}, & x>0\end{cases}$，$g(x)=\sqrt{x+9}$，求 $f\pm g$，fg，$\dfrac{f}{g}$.

解 先求出 f, g 的共同定义域. 因 $D(f)=R$，$D(g)=[-9,+\infty)$，故 $D(f)\cap D(g)=[-9,+\infty)$. 于是我们有

$$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x\pm\sqrt{x+9}, & -9\leqslant x\leqslant 0\\ \sqrt{x}\pm\sqrt{x+9}, & x>0\end{cases}$$

$$(fg)(x)=f(x)\,g(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x\sqrt{x+9}, & -9\leqslant x\leqslant 0\\ \sqrt{x}\sqrt{x+9}, & x>0\end{cases}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x+9}}, & -9<x\leqslant 0\\ \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+9}}, & x>0\end{cases}$$

2. 复合运算

我们知道，一个复杂的事物是由诸简单事物构成的，自然科学工作者就是要揭示出这种构成规律，将一个复杂的数学问题进行分解是数学思想方法的重要体现. 例如，$y=\ln(\sin x)$可以分解为 $y=\ln u$，$u=\sin x$，显然后两个函数是基本初等函数. 而