

# 海淀名题

*haidian mingti*

## 高中数学

## 完全解题

**CSJ**  
东师教辅

总主编：邓 均 蒋大凤

**Keketang**  
课课通丛书



90209882

# 高中数学完全解题



# 海淀 名题

Haidian Mingti

邓均 蒋大凤 总主编

北京市海淀区重点中学特级高级教师 编写

东北师范大学出版社

(吉) 新登字 12 号

- 出版人: 贾国祥  
 总策划: 唐峻山 东方春梅  
 总主编: 邓均 蒋大凤  
 责任编辑: 杨述春  
 封面设计: 魏国强  
 责任校对: 张中敏  
 责任印制: 张允豪 栾喜湖

敬请关注:

本书封面上贴有东北师范大学出版社激光防伪标志, 书内附有读者反馈卡。如果没有激光防伪标志和读者反馈卡, 可一律视为盗版, 请勿销售和购买。

课课通丛书

海淀名题

高中数学完全解题

北京市海淀区重点中学特高级教师 编写

东北师范大学出版社出版发行

长春市人民大街 138 号 (130024)

电话: 0431-5695744 5688470

传真: 0431-5695744 5695734

网址: <http://www.nenu.edu.cn>

电子信箱: [Chubs@ivy.nenu.edu.cn](mailto:Chubs@ivy.nenu.edu.cn)

东北师范大学出版社激光照排中心制版

沈阳新华印刷厂印刷

沈阳市铁西区建设中路 30 号 (110021)

广告许可证: 吉工商广字 2200004001001 号

开本: 880×1230 1/32 印张: 22.75 字数: 770 千

1999 年 6 月第 1 版 1999 年 6 月第 1 次印刷

印数: 00 001 - 40 000 册

ISBN 7 - 5602 - 2334 - 6/G · 1271 定价: 23.00 元

如发现印装质量问题, 影响阅读, 可直接与承印厂联系调换

**海淀  
名题**

# 名题典范

---

## 实用过人

### 关于《海淀名题》的编辑室报告

---

首先,感谢您选用《海淀名题》。编写、出版一套实用、好用、够用的中学生学习工具书,是我们的最大愿望,也是我们从最初的创意到最后的出版,一直坚持的最高原则。秉承东师图书一贯的优良品质,我们相信,《海淀名题》将帮助您学习进步,能力提高!

欢迎阅读下面的文字,它将有助于您深入地了解《海淀名题》,了解这一套质优价廉的中学生学习工具书确实是物超所值。

#### ■ 一、名题典范

选择“名题”是《海淀名题》编写的最高宗旨和最终目的。所谓“名题”是指那种知识含量高,具有典范价值特色的代表性考题。根据多年来行之有效的教学方式和一些尖子生的学习经验,深入理解这样的名题是扎扎实实提高学习水平,掌握解题能力的有效途径。《海淀名题》的创意即在于全面汇集并深入解剖这种综合性强、覆盖面大的考题,以使用最短的时间、最有效的方式来快速提高学生的分析问题的能力和解决问题的能力。

概括地讲,《海淀名题》的编写遵循了两种最基本、最简捷也是最有效的教学和学习的原则和方法。

1. 根据一种相当有效的教学程式, 教师在一堂课可以精讲一道题, 详尽解释出解答此题的种种可能性及其解答方法, 并总结出一般意义上的解答此类题的规律, 以便学生能够举一反三, 在遇到同类题及其简单的变形题时, 能够及时明白考察目的, 迅速找到解题思路, 正确解出答案。

2. 在讲解客观题时, 教师并不仅仅要告诉学生正确答案, 还要讲清原因; 同时针对其他错误选项也要说明错误原因, 以便使学生在解一道题的时候, 能够将许多知识和能力融汇贯通, 增强其解决问题的能力。

这两点, 就是编写《海淀名题》的两大原则。全套《海淀名题》内容的编写更是突出体现出这样两个特点:

1. 所选出的题具有代表意义、典型价值, 题型新, 难度大, 综合性强。

2. 《海淀名题》丛书为多重题解式编写, 能够一题多解的题都提供了多种解法及过程, 穷尽其解答的可能性。在把握基础的前提下, 荟萃精华, 集成经典, 真正做到实用、好用、够用。

## ■ 二、无敌指点

本着以一当十、一通百通的原则, 《海淀名题》着力于深度剖析、深度讲解教学的重点、难点和关键。全书解答思路明晰、详尽, 语言简捷。解题之后, 对解答过程进行简明而必要的总结, 尤其是对带有规律性的解题经验和技巧给予了必要的提供。并以三大专栏的方式全程指点。

1. 命题目的: 指出本题要考察的知识点。
2. 解题关键: 总结出解题的要点, 同时指出解题过程中值得横向推广的解题技巧和经验。
3. 错解剖析: 对学生在解题过程中带有普遍性的错误思路、方法性现象, 进行了简要剖析, 指出原因, 并提供切实可行的避免方法。

### ■ 三、实用过人

《海淀名题》以初中、高中教学大纲的教学必修章节、篇目的顺序为编写依据，以考试大纲为编写指导，以中考、高考的考试水平、出题难度为编写难度的参考界限，力求将基础知识、基本技能技巧、基本思想方法的学习融为一体，力求使大多数初中、高中学生，通过学习、思考，逐步提高自己独立解决问题的能力。

《海淀名题》依据人民教育出版社九年义务教育初中教材和新版高中教材编写，在按照中考、高考必考题型加以分类的同时，突出了同步的特点。全套丛书脉络清楚，实用性强，在使得学生树立题型观念的同时，充分考虑了最大的使用方便。

编写一套方便实用的学生学习工具用书并不是一件轻松的事。为此，全套丛书的作者和编辑尽了最大的努力。马宝敏、万俊英、邓均、王华、王建民、王忠钦、王爱莲、王景太、王德宝、王赞辉、石恂、兰茵、田李荣、田宝来、乔小光、刘红、刘哲、刘鸿、刘天华、刘双贝、刘玉贤、刘宝霞、刘国祥、刘树桐、刘晓京、陈平、杨立、李萌、李静、李公同、李伯荣、李桂春、李燕华、李慧敏、何玉春、张燕、张国贤、杜友明、严秀珍、吴勤智、郑颖、周速、周唤平、周敬贤、金玉清、茅庆年、胡宏、范宏怡、范纯智、赵惠英、莫慰、郭小丽、耿京波、袁淑清、聂雅文、钱力均、钱淑勤、黄万端、阎世东、阎达伟、崔德山、董爽、韩大年、韩乐琴、韩纪娴、蒋大风、程秋安、谢赢琛、詹少康、虞孝联等来自于北京市海淀区重点中学的特级、高级教师不辞辛苦地写作，披沙觅金般地梳理，并把他们多年来在一线教学实践中积累的宝贵经验，升华凝炼，最终成就了这一套《海淀名题》。

名题典范+实用过人=《海淀名题》!

东北师范大学出版社  
第二编辑室  
1999年6月

# 海淀 名题

## 《海淀名题》

### 编委会

- |     |                  |
|-----|------------------|
| 万俊英 | 北方交通大学附属中学高级教师   |
| 王建民 | 中国科技大学附属中学特级教师   |
| 邓均  | 北京大学附属中学高级教师     |
| 刘鸿  | 北京航空航天大学附属中学高级教师 |
| 刘双贝 | 北方交通大学附属中学高级教师   |
| 刘玉贤 | 中国矿业大学附属中学高级教师   |
| 刘宝霞 | 北京师范大学附属实验中学高级教师 |
| 何玉春 | 中国矿业大学附属中学高级教师   |
| 张燕  | 北京市 101 中学高级教师   |
| 杜友明 | 北京大学附属中学高级教师     |
| 严秀珍 | 北京市 122 中学高级教师   |
| 范宏怡 | 北京市第一中学高级教师      |
| 钱力均 | 北京师范大学附属实验中学高级教师 |
| 钱淑勤 | 中国科技大学附属中学高级教师   |
| 黄万端 | 北京大学附属中学特级教师     |
| 崔德山 | 北京师范大学附属实验中学高级教师 |
| 韩乐琴 | 北京师范大学附属实验中学高级教师 |
| 韩纪嫻 | 北京医科大学附属中学高级教师   |
| 蒋大风 | 北京大学附属中学高级教师     |

# 海淀 名题

# Mulu

# 目 录

## 第一部分 代 数

■ 选择题 .....	3
第一章 幂函数、指数函数和对数函数 .....	3
第二章 三角函数 .....	21
第三章 两角和与差的三角函数,解斜三角形 .....	28
第五章 不等式 .....	33
第六章 数列、极限、数学归纳法 .....	41
第八章 复 数 .....	51
第九章 排列、组合、二项式定理 .....	68
.....	
■ 填空题 .....	74
第一章 幂函数、指数函数和对数函数 .....	74
第五章 不等式 .....	94
第六章 数列、极限、数学归纳法 .....	98
第九章 排列、组合、二项式定理 .....	104
.....	
■ 解答题 .....	110
第一章 幂函数、指数函数和对数函数 .....	110



第二章	三角函数 .....	153
第三章	两角和与差的三角函数,解斜三角形 .....	181
第四章	反三角函数和简单三角方程 .....	281
第五章	不等式 .....	292
第六章	数列、极限、数学归纳法 .....	309
第八章	复数 .....	331
第九章	排列、组合、二项式定理 .....	381

## 第二部分 立体几何

■ 选择题 .....	395
第一章 直线与平面 .....	395
第二章 多面体与旋转体 .....	419
.....	
■ 填空题 .....	425
第一章 直线与平面 .....	425
.....	
■ 解答题 .....	439
第一章 直线与平面 .....	439
第二章 多面体与旋转体 .....	470

## 第三部分 平面解析几何

■ 选择题 .....	499
第一章 直线与圆 .....	499
第三章 参数方程和极坐标 .....	503
.....	
■ 解答题 .....	508
第一章 直线与圆 .....	508

---

第二章 圆锥曲线 .....	542
第三章 参数方程和极坐标 .....	611

## 第四部分 经典好题

---

■解答题 .....	641
------------	-----

# 海淀 名题

Haidian  
Mingti

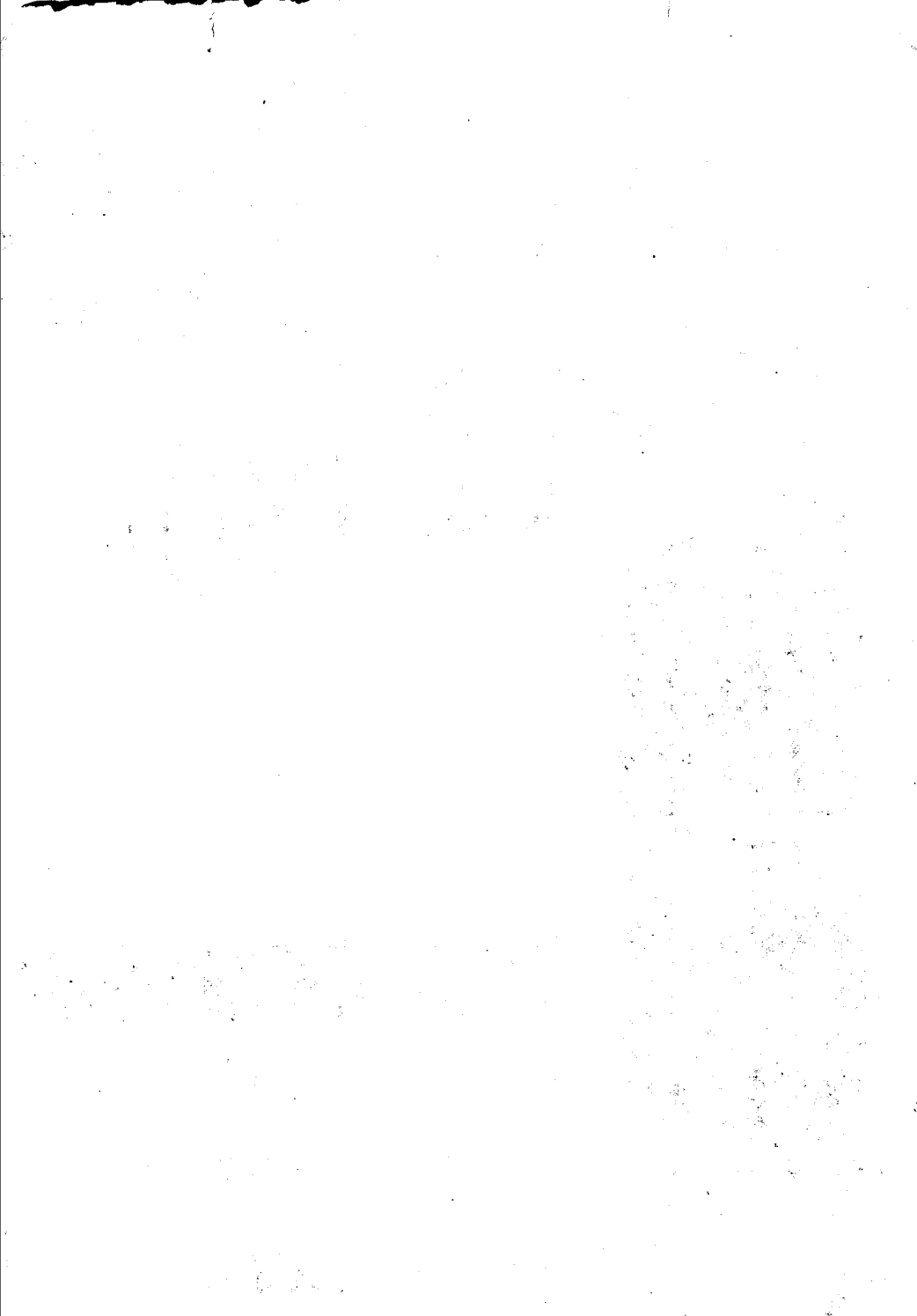
高中数学完全解题

第一部分 代数

第二部分 立体几何

第三部分 平面解析几何

第四部分 经典好题



# 海淀 名题

## 第一部分 代数

### 选择题

### 第一章 幂函数、指数函数和对数函数

1. 集合  $M = \left\{ x \mid x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z} \right\}$ ,  $N = \left\{ x \mid x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$ , 则 (A)

A.  $M \subset N$

B.  $M \supset N$

C.  $M = N$

D.  $M \cap N = \emptyset$

■解析 1: 代值验证, 分别令  $k = \dots, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ , 得

$$M = \left\{ \dots, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \dots \right\}$$

$$N = \left\{ \dots, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \dots \right\}$$

那么  $M \subset N$ , 故选 A.

■解析 2: 数形结合, 在直角坐标系中作出各集合角的终边, 那么集合  $M$  中的角的终边分别落在各象限的角平分线上, 而集合  $N$  中的角的终边分别落在各象限的角平分线上和  $x$  轴,  $y$  轴上, 故选 A.

■答案: A

□命题目的: 本题主要考查集合和任意角的概念, 以及灵活运用这些基本概念的能力.

□解题关键: 深刻认识集合  $M, N$  中的元素都是终边落在直角坐标系中特殊位置的一些角, 数形结合的方法解决此题比较直观, 如解析 2.

□错解剖析: 不考虑  $\frac{k\pi}{2}$  与  $\frac{k\pi}{4}$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) 的条件, 只是看到  $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ , 而误认为集合  $M$  中角多, 因而选 B. 故在审题中, 要全面考察题目已知条件.

2. 数集  $M = \{(2n+1)\pi, n \in \mathbf{Z}\}$  与数集  $N = \{(4m \pm 1)\pi, m \in \mathbf{Z}\}$  之间的关系是 ( )

A.  $M \subset N$

B.  $M \supset N$

C.  $M = N$

D.  $M \neq N$

■解析 1: 取  $n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$

得  $M = \{\dots, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, \dots\}$

取  $m = \dots, 0, 1, \dots$

得  $N = \{\dots, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, \dots\}$ , 故选 C.

■解析 2: 数形结合, 分别在直角坐标系中作出集合  $M, N$  中的角的终边, 也容易得出答案.

■解析 3:  $2n+1 = \begin{cases} 2 \cdot 2k+1 & n=2k, k \in \mathbf{Z} \\ 2 \cdot (2k-1)+1 & n=2k-1, k \in \mathbf{Z} \end{cases}$

即  $2n+1=4k+1$  或  $2n+1=4k-1$ , 所以  $(2n+1)\pi$  与  $(4k \pm 1)\pi$  所表示的数相同, 故选 C.

■答案: C

□错解剖析: 误认为  $2n+1$  和  $4m \pm 1$  是表示不同的整数, 实际上奇数既可用  $2n+1, 2n-1$  的式子来表示, 也可用  $4m \pm 1$  来表示, 当然其中的  $n, m$  必须为整数.

3. 已知全集  $I = \{a, b, c, d, e\}$ , 集合  $A = \{b, c\}$ ,  $B = \{c, d\}$ , 那么  $\bar{A} \cap B$  等于 ( )

A.  $\{a, e\}$       B.  $\{b, c, d\}$       C.  $\{a, c, e\}$       D.  $\{c\}$

■解析 1: 由已知  $\bar{A} = \{a, d, e\}$ ,  $B = \{c, d\}$ , 故  $\bar{A} \cap B = \{d\}$ , 故选 A.

■解析 2: 排除法, 由已知  $A = \{b, c\}$ , 故  $b, c$  二元素不能在  $\bar{A} \cap B$  中, 故不能选 B, C, D, 只能选 A.

■答案: A

4. 已知集合  $M = \{x | x^2 = 1\}$ , 集合  $N = \{x | ax = 1\}$ , 若  $N \subset M$ , 那么  $a$  的值是 ( )

A. 1      B. -1      C. 1 或 -1      D. 0, 1 或 -1

■解析 1: 由已知  $N \subset M$ , 根据空集是任意非空集合的真子集, 取  $N = \emptyset$ , 那么方程  $ax = 1$  无解, 推出  $a = 0$ . 若  $N$  不为  $\emptyset$  时, 集合  $N$  中必须只能含有  $M$  中的部分元素, 当  $x = 1$  可得  $a = 1$ ,  $x = -1$ , 可得  $a = -1$ , 故选 D.

■解析 2: 由已知  $M = \{1, -1\}$ , 然后将选项 D 中的值分别代入方程  $ax = 1$ , 均合题意, 故选 D.

■答案: D

□命题目的: 本题主要考查集合中有关空集, 真子集的概念, 以及方程的相关知识.

□解题关键: 由已知条件  $N \subset M$ , 必须全面考虑集合  $N$  既可含集合  $M$  中的部分元素, 也可为空集. 解析 1 就是根据以上思想来考虑方程  $ax = 1$  有解、无解两种情况得出正确结论的. 而解析 2 是依据这是一道选择题, 故可代值检验, 而 D 中的三个答案包括 A, B, C 的答案, 当然从 D 中考虑问题全面.

□错解剖析: 概念不清, 由已知条件  $N \subset M$ , 而误以为  $N$  中必须含有  $M$  中的部分元素, 忘记了  $\emptyset$  是任意非空真子集这一性质, 因而丢掉  $a = 0$  这种情况.

5. 同时满足(1)  $M \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , (2) 若  $a \in M$ , 则  $6 - a \in M$  的非空集合  $M$  有 ( )

- A. 32 个      B. 15 个      C. 7 个      D. 6 个

■解析: 根据已知条件, 集合  $M$  中的元素必须具有两个条件, 不妨假设  $1 \in M$ , 那么  $6 - 1 = 5$ , 也同时为  $M$  中的元素, 由此可知  $M = \{1, 5\}$ , 同理可推  $\{2, 4\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{1, 5, 2, 4\}$ ,  $\{1, 5, 3\}$ ,  $\{2, 4, 3\}$ ,  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  都是满足题目条件的集合, 故选 C.

■答案: C

□命题目的: 本题主要考查了集合的基本知识, 以及逻辑思维的深刻性.

□解题关键: 正确理解题目中两个已知条件给出的符号语言, 找出这两个条件的内在联系, 即  $M$  中的元素是  $1, 2, 3, 4, 5$  中的一部分或全部, 并且若  $a \in M$ , 那么  $6 - a$  也应在集合  $M$  中.

□错解剖析: 只看到条件(1), 而忽略了条件(2)的限制, 因此选中 A. 若根据题目条件, 找到了满足题目要求的集合  $M$  中的元素, 但对符号“ $\subseteq$ ”概念模糊, 误认为  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  不在所求之内, 又会误选 D.

6. 已知集合  $X$  满足  $\{1, 2\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 那么这样的集合  $X$  有 ( )

A. 7 个      B. 8 个      C. 9 个      D. 10 个

■解析: 由已知条件, 集合  $X$  中必有元素  $1, 2$ , 而从元素  $3, 4, 5$  中分别选 0 个, 1 个, 2 个, 3 个的方法数:  $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 2^3$  即为集合  $X$  的个数, 故选 B.

■答案: B

□命题目的: 本题既考查了集合的有关概念, 也考查了组合数公式以及数学转化思想方法.

□解题关键: 运用数学转化思想, 把求满足条件集合  $X$  的个数转化为从集合  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  中的元素  $3, 4, 5$  中选 0 个, 1 个, 2 个, 3 个元素的组合数.

7. 从集合  $A = \{a, b, c\}$  到  $B = \{1, 2\}$  的不同的映射共有 ( )

A. 9 个      B. 8 个      C. 6 个      D. 5 个

■解析: 根据映射的定义, 集合  $A$  中的每一个元素在映射下有唯一的象与之对应, 那么元素  $a$  有两种选择的方法,  $b, c$  也如此, 故共有  $2 \times 2 \times 2 = 8$  种不同的映射, 故选 B.

■答案: B

□命题目的: 本题主要考查了映射的概念及组合思想.

□解题关键: 根据映射定义可知集合  $A$  中的元素  $a$  在映射作用下若与 1 对应, 并不影响  $b, c$  与 1 对应. 因此由  $A$  到  $B$  的映射, 可分成三步, 第一步确定  $a$  对应的象, 有 2 种不

同的方法,然后再确定  $b$ ,最后确定  $c$ ,也分别有 2 种不同的方法,根据乘法原理共 2<sup>3</sup> 种不同的方法.

8. 集合  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{-1, 0, 1\}$ , 从  $A$  到  $B$  的映射  $f$  满足条件  $f(a) = f(b) + f(c)$ , 那么这样的映射  $f$  的个数是 ( )
- A. 2 个                  B. 7 个                  C. 5 个                  D. 4 个

■解析: 由已知  $\Rightarrow f(a) = 0 = 1 + (-1) = f(b) + f(c)$

$$f(a) = 0 = -1 + 1 = f(b) + f(c)$$

$$f(a) = 0 = 0 + 0 = f(b) + f(c)$$

$$f(a) = 1 = 1 + 0 = f(b) + f(c)$$

$$f(a) = 1 = 0 + 1 = f(b) + f(c)$$

$$f(a) = -1 = -1 + 0 = f(b) + f(c)$$

$$f(a) = -1 = 0 + (-1) = f(b) + f(c)$$

$\therefore$  满足条件的映射共有 7 个, 故选 B.

■答案: B

- 命题目的: 本题既考查了映射的定义, 同时也考查学生对数学语言的理解能力以及综合分析问题的能力.
- 解题关键: 准确地掌握了映射的定义, 即可推出  $f(a) = 0$  时,  $0 = -1 + 1, 0 = 1 + (-1)$ , 从而一一列出, 得出结论.
- 错解剖析: 对数学式子  $f(a) = f(b) + f(c)$  中的映射法则  $f$  不理解, 当然就无法下手解决此题. 又有一些同学能够看懂已知条件中的数学语言, 但是忽略了  $0 = 0 + 0$  这种情况以及其中若干情况, 而误选 A, C, D.

9. 下面四个集合中, 表示空集的是 ( )

A.  $\{0\}$

B.  $\{x \mid x^4 + 1 = 0, x \in \mathbb{C}\}$

C.  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 0, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

D.  $\{x \mid \sin x + \cos x = \sqrt{3}, x \in \mathbb{R}\}$

■解析:  $\{0\}$  中含有元素 0, 故不为空集.

方程  $x^4 + 1 = 0$  在复数集中应有四个解, 而 C 中的集合所含元素为  $(0, 0)$ , 故 B, C 中的集合都不是空集.

$$\therefore \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}.$$

$\therefore$  方程  $\sin x + \cos x = \sqrt{3}$  无实数解, 故选 D.



**■答案:D**

□命题目的:本题主要考查了集合、三角、复数等多方面的基本概念.

10. 函数  $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$  的值域是 ( )
- A.  $R$                       B.  $R^+$                       C.  $[0, +\infty)$                       D.  $[1, +\infty)$

**■解析:** 设  $u = x^2 - 6x + 10$   
 $= (x-3)^2 + 1 \geq 1$   
 $\therefore y = \sqrt{u} \geq \sqrt{1} = 1.$

**■答案:D**

□命题目的:本题考查了复合函数的值域和二次函数的有关概念.

11. 若函数  $f(x-1) = x^2 - 2x + 3 (x \leq 1)$ , 则函数  $f^{-1}(x)$  的草图是 ( )

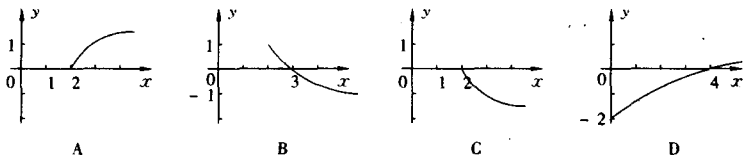


图 1-1

**■解析 1:**  $f(x-1) = (x-1)^2 + 2$  ①

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + 2 \quad \text{②}$$

又  $\because$  ①式中  $x \leq 1$

$$\therefore x-1 \leq 0$$

故②式中函数中自变量  $x \leq 0$ .

$$\text{设 } y = x^2 + 2 (x \leq 0),$$

那么  $x = -\sqrt{y-2}$ , 即  $f^{-1}(x) = -\sqrt{x-2}$ , 故选 C.

**■解析 2:** 同解析 1, 可得  $f(x) = x^2 + 2 (x \leq 0)$ ,

而  $f(x)$  的反函数  $f^{-1}(x)$  的值域应为  $y \leq 0$ , 故选 C.

**■解析 3:** 同解析 1 可得  $f(x) = x^2 + 2 (x \leq 0)$ , 作出其图像如图 1-2, 根据两个互为反函数的函数图像关于直线  $y = x$  对称, 故选 C.

**■答案:C**

□命题目的:本题考查了函数的基本概念, 互为反函数的函数图像间的关系, 定义域与值域的关系以及分析解决问题的能力.

□解题关键:本题要注意  $f(x)$  的定义域为  $x \leq 0$ , 值域为  $y \geq 2$ , 它们分别为反函数  $f^{-1}(x)$  的