数理化基础知识丛书

初中数学基础知识

平面几何（第 二 册）

北京教育出版社

数理化基础知识丛书

初中数学基础知识
平面几何

第 二 册

北京实验中学数学教研室编

北 京 教 育 出 版 社

数理化基础知识丛书
初中数学基础知识平面几何第二册
北京实验中学数学教研室编
*
北京教育出版社出版
（北京北三环中路6号）
新华书店北京发行所发行
安平印刷厂印刷
*
787×1092毫米 32开本 8.125印张 176,000字
1988年8月第1版 1988年8月第1次印刷
印数 1—7,300
ISBN 7-5303-0031-8/G·26
定价：2.20元

编写说明

为了帮助广大青年和在校学生学好数、理、化，我社约请了北京市人大附中、北大附中、清华附中、北京实验中学等校的有经验的教师共同编写数理化基础知识丛书。

《初中数学基础知识》共分六册与课本相对应。各册均分章编写，每章包括内容提要，重点、难点解析，典型例题，习题和自我检查题，最后附答案或提示。书中对初中数学基础知识和概念作了由浅入深的剖析，对学生学习初中数学中不易理解之处，易出差错、常混淆的内容，作了详尽的讲解和辅导，对解题的思路、方法、技巧进行了全面的介绍。

本书是《初中数学基础知识平面几何》第二册，可以作为在校学生学习数学的辅导书，也可以作为中学数学教师的教学参考书。

《初中数学基础知识》编写组成员是北京师范大学附属实验中学蔡晓东、杨淑云、金元、张春条、李芳宜、张继林、任孝娟、储瑞年。

由于我们的水平有限，难免出现一些错误和缺点，希望读者批评指正。

目　　录

第六章　相似形

第六章　相似形

学习《相似形》这一章，能使我们对第一册中所讲的直线形的理论有更加深刻的认识，并且能更加直接、更加广泛地应用于实际．在《相似形》这一章中，无论是基本理论还是各种习题，在图形结构上要比以前复杂，在推理论证中寻求思路也要比以前难．因此，学习《相似形》这一章，对于提高我们逻辑思维能力具有很重要的作用．

本章内容包括《成比例的线段》和《相似形》两大部分．

第一单元　成比例的线段

一、内容提要

研究相似多边形及相似三角形的定义、判定和性质，都要涉及对应边的比和对应边成比例的问题，因此，有关比例线段的知识是研究相似形必不可少的理论基础．

首先要正确理解两条线段的比及四条线段成比例的概念；要熟悉比例的性质，并且能熟练地应用这些性质进行比例式的变形，借助于这些变形来解决线段的计算和比例式的推证．

平行线是构成比例线段的基本条件，也是得到相似三角形的基本条件．因此，《平行线分线段成比例定理》是全章的基本定理．应当能熟练运用这一定理进行有关理论及比例问

题的推证．它的推论的逆定理提供了推证平行线的新方法、新途径的理论依据．

《三角形内(外)角平分线性质定理》既作为《平行线分线段成比例定理》的重要应用，又是构成比例线段的重要条件，它的逆定理又为判断“一条射线是否平分一角”提供了新方法．

二、重点、难点解析

1．线段的长度和线段的量数

线段是直线上两点间的部分．为了量得一条线段 a 的长度，首先要选定一条线段 u 作为长度单位，然后用线段 u 去量线段 a (如图 6-1)，量出线段 a 含有线段 u 的多少倍，所得的倍数就叫做以线段 u 作长度单位去量线段 a 所得的量数．

说明：(1) 线段的量数和线段的长度是有区别的．线段的量数只是一个倍数，是一个正实数；在量数后面添加上长度单位才是线段的长度．如图 6-2．线段 $AB=3$ cm，是说 AB 的长度是 3 cm，而 3 是用长度为 1 cm 的线段为长度单位去量线段 AB 所得的量数．

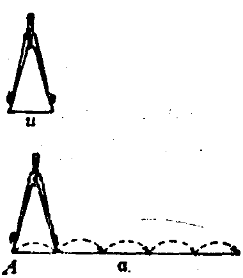


图 6-1

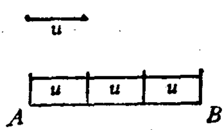


图 6-2

（2）线段的量数与所选择的长度单位有关，选择不同的长度单位去度量同一条线段所得的量数是不相同的。图6-2中，$AB=3\ \mathrm{cm}$，用1 cm的线段为长度单位去量AB所得的量数是3，改用1 mm的线段为长度单位去量AB所得的量数就应当是30．如果再改用1 m的线段为长度单位去量AB所得的量数就是0.03．但是，改变长度单位只会改变量数而不会改变线段的长度．

（3）为什么线段的量数是正实数？我们可以分两种情况加以讨论：

① 用长度单位u去度量线段a，如果线段a恰好被u量尽，那么线段a的量数是一个正整数；如果量不尽，那么再用$\frac{1}{10}u$作为长度单位去量第一次剩余的线段，还量不尽时，再用$\frac{1}{100}u$作为长度单位去量第二次剩余的线段，再量不尽时，继续用$\frac{1}{1000}u$作为长度单位去量第三次剩余的线段，…如此继续下去．如果某一次的剩余线段恰好被量尽，那么线段a的量数是正有限小数．

② 如果上述的度量过程可以无限止地继续下去，这时，线段a的量数可能是一个正的循环小数或者正的无限不循环小数——正无理数．

综上所述，线段的量数一定是正实数．

2．两条线段的比和两个数的比

对于给定的两个数a和b，用a除以b（或者说用b去除a）所得的商叫做a和b两个数的比，记作$a:b$或$\frac{a}{b}$，被

除数 a 叫做比的前项，除数 b 叫做比的后项.

两个数的比的概念可以扩充到两条线段的比：用同一长度单位度量两条线段所得量数的比叫做这两条线段的比. 两条线段 a 和 b 的比也记作 $a:b$ 或$\frac{a}{b}$，线段 a 叫做比的前项，线段 b 叫做比的后项.

说明：(1) 计算两条线段的比，必须用相同的长度单位，但与选用什么样的线段作为长度单位没有关系，这是因为：每改变一次长度单位，两条线段的量数各扩大或缩小同样的倍数，那么对于这两条线段的比来说，恰好是把它的前项和后项都扩大或缩小同样的倍数，比值不变.

例如 $a=5\text{ cm}=50\text{ mm}=0.05\text{ m}$，

$b=10\text{ cm}=100\text{ mm}=0.1\text{ m}$，

那么，$\frac{a}{b}=\frac{5}{10}$或$\frac{50}{100}$或$\frac{0.05}{0.1}$，它们是相等的，都等于$\frac{1}{2}$.

(2) 两条线段 a 和 b 的比$\frac{a}{b}$是一个正实数，这个正数恰好就是以 b 作为长度单位去度量线段 a 所得的量数.

(3) 两条线段的比和两个数的比一样，有前后项的顺序之分；如果交换前后项的顺序，所得的比就是原比的倒数，$\frac{a}{b}$和$\frac{b}{a}$称作互为反比.

例如，在图 6-3 中，$\triangle ABC$ 是直角三角形. $\angle C=90°$，$\angle A=30°$，求以斜边 AB 为长度单位度量直角边 AC 的量数和以 AC 为长度单位度量直角边 BC 的量数.

$\because$ 在此 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle A=30°$，

$\therefore$ $BC=\frac{1}{2}AB$.

由勾股定理可得

$$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\sqrt{3}BC,$$

$$\therefore\quad \frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{AC}{BC}=\sqrt{3},\ \frac{BC}{AC}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

即以 AB 为长度单位度量 AC 的量数是$\frac{\sqrt{3}}{2}$，以 AC 为长度单位度量 BC 的量数是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

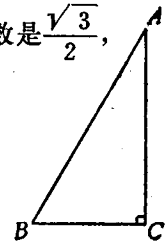


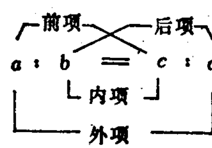
图 6-3

3. 成比例的线段和成比例的数

如果两个数 a 和 b 的比等于另外两个数 c 和 d 的比，那么就说 a，b，c，d 四个数成比例，记作

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\quad 或者\ a:b=c:d.$$

其中 a 和 c 是两个比的前项，b 和 d 是两个比的后项；a 和 d 叫做比例的外项，b 和 c 叫做比例的内项.



四个数成比例的概念可以扩充到四条线段成比例：在四条线段 a、b、c、d 中，如果 a 和 b 的比等于 c 和 d 的比，这四条线段叫做成比例线段，实际上，线段 a 和 b 的比就是在用同一长度单位度量 a 和 b 所得量数的比，因此，四条线段成比例实际

上就是四个量数成比例．成比例的线段中，有两个概念值得注意．

（1）当 $a:b=c:d$ 成立时，线段 d 叫做线段 a、b、c 的第四比例项．

（2）当 $a:b=b:c$ 成立时，线段 b 叫做线段 a 和 c 的比例中项．

成比例线段，无论在我们的生活中，还是在以前我们已见到过的几何图形中，都有很多的实例．

例如，我们放大一张照片时，自然要求原底片的横向尺寸及纵向尺寸和放大后照片的横向尺寸及纵向尺寸是成比例的，否则，就会象照哈哈镜那样，令人发笑．

再如，在图 6-4 中，当 $AD=DM=MB$，$DE\parallel MN\parallel BC$ 时，由«平行线等分线段定理»可得 $AE=EN=NC$．

因此 $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$（都等于$\dfrac{1}{3}$），

$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$（都等于$\dfrac{1}{2}$），

$\dfrac{AB}{DM}=\dfrac{AC}{EN}$（都等于 3 ）．

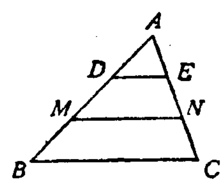


图 6-4

说明 AD、AB、AE、AC 四条线段成比例，AD、DB、AE、EC 四条线段成比例，AB、DM、AC、EN 四条线段成比例（在图 6-4 中，还有其它成比例线段，请读者自己找一找）．

应当注意：

（1）当四条线段成比例时，写出的比例式并非是唯一的．例如，$a=4.5\text{cm}$，$b=7.5\text{ cm}$，$c=3\text{ cm}$，$d=5\text{ cm}$ 时，$a:b=c:d$，所以 a、b、c、d 四条线段成比例，这时，$c:a=d:b$，$b:a=d:c$ 也是成立的．但是，并不是说不管 a、b、c、

d 的顺序怎样排列所组成的比例式都一定成立，$a:c$ 与$d:b$ 就不相等，比例式 $a:c=d:b$ 就不成立，因此，和两条线段的比不能随意更改顺序一样，四条线段组成的比例式也同样不能随意更改顺序.

（2）当四条线段之间写出了一个不成比例的关系时，也不能轻易判断它们不成比例.例如 $u=1.2$ cm，$v=1.44$ cm，$x=6$ cm，$y=5$ cm 时，从$u:v\neq x:y$ 就判断这四条线段不成比例，那就错了. 事实上，$u:v=y:x$ 是成立的，因此还应当判定这四条线段是成比例的.

（3）当已知四条线段的长度时，怎样能够比较快地判断出它们是否成比例呢？一般来说只需把四条线段按大小顺序排好，然后分别计算出前两条线段的比和后两条线段的比，如果比值相等就可以断定这四条线段成比例；如果比值不相等就可以断定这四条线段不成比例. 或者是分别计算出最大和最小的两条线段之积以及中间两条线段之积，积相等就可以断定这四条线段成比例，否则，就不成比例.

例如，$a=2\frac{1}{2}$cm，$b=2$ cm，$c=7$ cm，$d=8\frac{3}{4}$cm，先把它们按照从小到大的顺序排列为 b、a、c、d，然后由

$$b:a=2:2\frac{1}{2}=4:5,$$

$$c:d=7:8\frac{3}{4}=28:35=4:5,$$

可以判定这四条线段成比例.

或者由 $b\times d=2\times 8\frac{3}{4}=\frac{35}{2}$，$a\times c=2\frac{1}{2}\times 7=\frac{35}{2}$ 也可以判定这四条线段成比例.

又如 $x=4\,\text{cm}$，$y=\frac{1}{2}\text{cm}$，$u=\frac{1}{3}\text{cm}$，$v=4\frac{3}{4}\text{cm}$，先按大小顺序排列成 u、y、x、v，然后由

$$u\times v=\frac{1}{3}\times 4\frac{3}{4}=\frac{19}{12},$$

$$x\times y=4\times\frac{1}{2}=2,$$

可以判定这四条线段不成比例.

4. 熟练掌握、灵活运用比例的性质

比例的性质共包括七个定理，其中比例的基本性质、反比定理和更比定理是小学已经学过的，而其余各个定理是第一次出现在我们面前．这些定理，在今后推证定理及解题过程中，经常要用到，是研究相似形的重要的预备知识，必须熟练掌握、灵活运用.

(1) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longleftrightarrow ad=bc$.

这个比例的基本性质，揭示了比例式与等积式之间的等价关系，反比定理和更比定理就是这种等价关系的推论.

事实上，与 $ad=bc$ 等价的比例式共有 8 个：

①$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$；　②$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$；　③$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$；　④$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$；

⑤$\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$；　⑥$\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$；　⑦$\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$；　⑧$\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$.

它们都和 $ad=bc$ 等价，其依据就是比例的基本性质——内项积等于外项积．由于它们都和 $ad=bc$ 等价，因此，它们彼此之间也是等价的，①和②、①和③的等价关系就是更比定理，①和④的等价关系就是反比定理．请读者自己找出这