

高联考研

2006^年李永乐·李正元考研数学⑨

数学

数学二

【理工类】

全真模拟 经典400题

主编 李永乐 李正元 刘西垣
清华大学 北京大学 清华大学 北京大学

国家行政学院出版社



2006 年李永乐·李正元考研数学⑨

数学全真模拟经典 400 题

(理工类·数学二)

主 编 清 华 大 学 李永乐
北 京 大 学 李正元
北 京 大 学 刘西垣

编 者 (以姓氏笔画为序)

北 京 大 学	刘西垣
北 京 大 学	李正元
清 华 大 学	李永乐
中 国 人 民 大 学	严 颖
北 京 大 学	范培华
中 国 人 民 大 学	袁荫棠
空 军 雷 达 学 院	徐宝庆
东 北 财 经 大 学	龚兆仁
天 津 财 经 学 院	鹿立江

国家行政学院出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学全真模拟经典 400 题. 数学. 2: 理工类/李永乐, 李正元主编.

- 北京: 国家行政学院出版社, 2004

ISBN 7-80140-342-8

I. 数… II. ①李… ②李… III. 高等数学-研究生-入学考试-习题

IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 058910 号

数学全真模拟经典 400 题

[理工类·数学二]

李永乐 李正元 主编

*

国家行政学院出版社出版发行

北京市海淀区长春桥路 6 号

邮政编码: 100089

发行部电话: 88517082

新华书店经销

北京市朝阳区印刷厂印刷

*

787 × 1092 1/16 开本 13.25 印张 340 千字

2005 年 8 月第 2 版 2005 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 7-80140-342-8/O · 36 定价: 19.00 元

版权所有 侵权必究

前 言

本套书（李永乐、李正元考研数学系列——《数学复习全书》及《数学全真模拟经典 400 题》等，国家行政学院出版社）出版、修订多年以来，深受全国广大考生的好评和厚爱，受到专家同行的肯定，认为在编写体例和内容上有“自己的特色”和“较高的水准及较强的针对性”，较“适合考生的需要”，我们深感欣慰。《2006 年考研数学全真模拟经典 400 题》根据 2006 年考试大纲的考试内容、考试要求及试卷结构重新编写，将以更高的质量和新的面貌呈现在广大考生的面前。

本书特点：

1. 每题均全新优化设计，综合性强

为使考研同学考前多一些查漏补缺的机会，多见一些新题型，多一些针对性，考试中多一份把握，我们特优化设计或改编了 10 套模拟试题，这 10 套题完全不同，没有重复题；在内容设计上，每道题均涉及两个以上知识点，有些综合题甚至涉及到 3 个考点或更多，这些题涵盖新大纲所有考查知识点。通过这 10 套全新优化设计的试题训练，我们相信一定能提高您的数学的分析问题、解决问题的能力。

2. 注重归纳总结，力求一题多解，解答规范、详细

我们在设计这 10 套试题时，无论是填空题、选择题，还是计算题与证明题，每道题设有：①分析——该题的解题步骤和解题思路、方法；②解答——该题的详细、规范解题过程；③评注——该题所考查的知识点（或命题意图）、解题思路归纳总结和延伸、常见错误和注意事项。同时，在解题过程中，力求一题多解，扩展考生的视野和思路，比较各种解题方法的特点和适用范围，从而提高考生的应试水平。

本书使用说明：

1. 本书是依据 2006 年考研数学大纲为 2006 年考研读者全新优化设计的一本训练题集，本书中的试题难度略高于 2005 年考研试题，解答题与证明题体现了考试重点、难点内容，综合性比较强；填空题与选择题着重考查考生对基本概念、基本公式、基本定理的理解和运用，适用于第二阶段复习训练之用。

2. 本书中的每道题均有较透彻的分析、详细解答、归纳总结的评注，因此希望考生在做题时，如果遇到了困难，不要急于看分析和解答，一定要多思考，只有这样才能达到本书编写的目的，才能提高应试水平，才能取得好成绩。

3. 考生在使用本书之前，应仔细研读《2006 年考研数学复习全书》（理工类），

弄清《考试大纲》中要求掌握的基本概念、基本定理和基本方法，掌握《2006 年考研数学复习全书》（理工类）中所介绍的解题方法、技巧和思路。

特别提醒考生注意：①本书编撰者长期从事于清华大学、北京大学、中国人民大学等重点高校的相关教学，考研辅导经验丰富，并且是各自领域的专家学者，具有足够的专业素养。更重要的是，本书编撰者不辞辛苦，认真钻研考试大纲的考试内容和考试要求，归纳总结考生在学习中的不足及近年来考研数学考试的命题规律，尽力做到考研辅导和考研辅导资料的编写具有很强的针对性和有效性。在编写本书的过程中，编撰者都从头到尾坚持自己亲自完成本书的编写任务，决不假手他人，更不会“借”他人的东西。在这个意义上，“经典”两字实际上是本书编撰者对自己的严格要求。

②为了提高同学数学分析和解决问题的能力，本书所编题目难度较大，有的题目涉及 3 个以上的考点、综合运用性比较高，概念运用性较强，如果考生在做本书试题感到棘手时，请不要急，更不要泄气，应静下心来，仔细分析题目所考查的是哪些知识点，回忆《数学复习全书》（理工类）所介绍的解题方法，然后再动手做题。我们希望考生一定要动手做题，不要一看了事。

鉴于以上两点，我们希望考生认真对待本书中每道题，对本书中的每套题至少要做二至三遍。我们相信在 2006 年考研数学考试中，您肯定会感到有些题“似曾相识”、甚至“一见如故”。

在本书的编写、编辑和成书过程中，由于时间紧、任务重，尽管我们认真对待和严格要求，仍难免有不尽如意的地方，诚请广大读者和同行批评指正。

愿这本《经典 400 题》能对广大考生有所帮助，为实现考研目标助一臂之力！

说明：为了使本书更具有针对性，减轻考生的经济负担，我们将原《数学全真模拟经典 400 题》（数学一、数学二合订本）改为数学一、数学二单行本，书名继续沿用《数学全真模拟经典 400 题》。

编 者

2005 年 8 月

目 录

第 1 部分 考生必须了解的信息

一、2006 年考研数学考试大纲修订情况	(1)
二、考研数学试题特点剖析	(1)
三、考研数学命题的基本原则	(2)
四、考研数学《参考答案及评分标准》的制订说明	(2)
五、考研数学题型分析	(3)
六、考研数学考试内容覆盖面的要求	(10)
七、思考与建议	(11)

第 2 部分 新增考点专题训练

一、高等数学	(12)
二、线性代数	(16)

第 3 部分 全真模拟经典试题

模拟试题 (一)	(27)
模拟试题 (二)	(34)
模拟试题 (三)	(41)
模拟试题 (四)	(48)
模拟试题 (五)	(55)
模拟试题 (六)	(62)
模拟试题 (七)	(69)
模拟试题 (八)	(76)
模拟试题 (九)	(83)
模拟试题 (十)	(90)

第4部分 全真模拟经典试题答案及详解

模拟试题（一）	答案及详解	（98）
模拟试题（二）	答案及详解	（109）
模拟试题（三）	答案及详解	（119）
模拟试题（四）	答案及详解	（131）
模拟试题（五）	答案及详解	（141）
模拟试题（六）	答案及详解	（151）
模拟试题（七）	答案及详解	（162）
模拟试题（八）	答案及详解	（173）
模拟试题（九）	答案及详解	（185）
模拟试题（十）	答案及详解	（195）

考生必须了解的信息

一、2006 年考研数学考试大纲修订情况

1. 高等数学部分

(1) 将“二、一元函数微分学”的考试要求中第 5 条“……,了解柯西中值定理”改为“……,了解并会用柯西(Cauchy)中值定理”。

(2) 在“三、一元函数积分学”考试要求的第 6 条中增加了“质心”内容。

2. 线性代数部分

(1) 在“二、矩阵”考试要求的第 1 条中增加了“了解正交矩阵及其性质”。

(2) 在“三、向量”考试内容中增加了“向量的内积”、“线性无关向量组的正交规范化方法”,在其考试要求中增加了“5. 了解内积的概念,掌握线性无关向量组正交规范化的施密特(Schmidt)方法”。

(3) 将“五、矩阵的特征值和特征向量”考试要求的第 2 条“了解相似矩阵的概念、性质及矩阵可相似对角化的充分必要条件,会将矩阵化为相似对角矩阵”及第 3 条“了解实对称矩阵的特征值和特征向量的性质”中的“了解”均改成“理解”。

二、考研数学试题特点剖析

1. 全面考查,加强综合

数学概念的定义及其性质是解决数学问题的起点,2005 年的四份试卷考查了数学的基本概念、基本方法和基本原理,考查的重点知识包括极限、导数、偏导数、积分、矩阵、线性方程组、条件概率、二维随机变量的分布、相关系数、矩估计、极大似然估计等内容。这四份试卷重点考核了课程中的重要基本概念、基本方法和基本理论,如高等数学中的几个重要定理:中值定理、泰勒定理及隐函数存在定理等,每份试卷都没有偏题、怪题,淡化了解题技巧的考核,适当增加了一题多解的题目。2005 年数学考试还注意了四份数学试卷考核内容、考核要求的层次差异,较好地适应了不同学科的选拔要求和考生群体的特点。例如,数学三的第(21)题是属于理论推导的试题,考生只有熟练掌握分块矩阵的运算规律,理解正定二次型的概念,才能够给出正确的证明。

2. 考查掌握概念的灵活性和解题方法的多样性

试题注重考查考生灵活掌握概念的程度和计算的熟练程度。试题中有一定量的定量计算,定

量计算是工科学生解决问题必须具备的能力,同时对经济类的学生也是非常必要的,考生只有具备扎实的基本知识和熟练的计算能力,才能较好地完成试题.

数学解题过程是思维能力作用于数学活动的心理过程,考生解题的切入点不同,运用的思想方法不同,就会体现出不同的思维水平.数学试题往往注意研究题目信息的配置,考虑从不同角度运用不同的思想方法,创设多条解题路径,使不同思维层次的考生都有表现的机会,从而有效地区分出考生的数学能力.

解题方法的选择表现出考生的思维水平,思维敏捷的考生往往善于抓住问题的本质,解题过程简便、快捷,减少错漏且赢得后继的解题时间,展现其较高的数学素养.数学三、四的概率统计试题与2004年试题相比,减少了计算量,强调了概念的理解和应用,如在计算随机变量函数的数学期望时,既可以通过常规计算得到正确答案,也可以利用期望的性质直接得到正确答案.

3. 注重能力考查

近年来,在试卷中着重考核考生的逻辑推理能力、抽象思维能力、几何直观能力、计算能力以及应用数学知识和方法解决问题的能力.考生要把握住“数学活动是一项思维活动”的特征,通过多种推理方法的合理运用,培养思维的准确性、深刻性和灵活性;要通过对推理过程的合理表述,培养思维的逻辑性、完整性和流畅性.例如数学三、四中微积分的证明题,就要求考生正确掌握引进辅助函数的方法,或者熟练掌握分部积分的方法与技能,才能给出正确的证明.

三、考研数学命题的基本原则

1. 严格按照教育部颁布的《2006年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(简称《数学考试大纲》)规定的考试内容和考试要求进行命题.

考试大纲是教育部颁布的法规性文件,是命题工作和考生复习的唯一依据.按照考试大纲命题是指考查的内容不超过大纲的规定,各科目在试卷中的占分比例、题型比例与大纲要求基本一致,试卷的难易度与样卷的难易度基本一致,试卷中不出现超纲题、偏题和怪题.

2. 试题以考查数学的基本概念、基本方法和基本原理为主,在此基础上加强对考生的运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想像能力和综合运用所学知识解决实际问题的能力的考查.

3. 试题编制要符合各种题型编制原则.

4. 保持历年试题难度的稳定.

5. 试题编制应科学、公正、规范.

四、考研数学《参考答案及评分标准》的制订说明

制订《参考答案及评分标准》是命题工作的一个重要组成部分,它为全国范围内统一的评卷工作提供了一个公正、科学的量表和尺度,是考试公平性的重要保证.

1. 数学填空题要求答案是确定的和唯一的,参考答案只给出应填的结果,不给出推导计算过程.一般每题4分,答对4分,答错0分.

2. 对于四选一的多项选择题有A、B、C、D四个备选项,其中三个是干扰项,一个是正确选项,参考答案只给出正确选项前的字母,不给出推导过程.选对得满分,选错得0分,不倒扣分,鼓励考生在不会作答时猜测选项.若有多道选择题,正确选项的字母的排列要求是随机的,即不要特地把各

题正确选项的字母设定在同一个位置上,如都为C项或都为B项,以免少数考生凭运气猜测得太多的分数而影响考试的公平性和效度.

3. 对于计算题、证明题以及其他解答题一般提供一至两种参考解答和证明,有些试题有更多的解法甚至包括初等解法,但所提供的参考解答必须是与考试大纲规定的考试内容和考试目标相一致的解法和证明方法:参考答案的文字表述必须规范,推理过程必须表述清楚,避免因参考答案表述不清而造成评分误差.每题分值的设置与完成该题所花费的平均时间以及考核目标的层次有关,一般地说,综合性较强的试题、推理过程较多的试题、应用性的试题赋分的权重较大,分值较高.基本计算题、常规性试题或简单应用题的分值较低.各题的分值设定之后,就需要确定评分标准,即运算过程中关键步骤的赋分权重.计算题和证明题的评分标准是按照计算或推理的过程连续赋分的,比如,完成一道分值为10分的计算题需要三个关键步骤,完成到第一步骤给3分,完成到第二步骤给6分,三个步骤全部完成给10分.对于文科试题常常是按照要点单独赋分.为什么数学题不宜按每个步骤单独给分呢?这是考虑到对于数学计算或证明题,只有做对了前面步骤,才能完成后面的步骤这一特点.对于有多个解法的试题,一般到达同一结果给相同的分数,每一步骤分的给定不是随意的,如同确定每题分值一样,需要考虑该步骤在解答和证明过程中的复杂和重要程度,关键的步骤分值较高,反之较低.

《参考答案与评分标准》是评分的原则依据,一般各地在试卷评阅前,组织专家依照《参考答案与评分标准》对部分考卷进行试评,对评分标准作进一步的细化,制订评分细则,使评卷工作更具可操作性.

评分标准的制订直接关系到试卷的平均分,一份由很难的试题构成的试卷,可以通过较松的评分标准使其平均分较高,反之亦然.因此,评分标准制订的科学性和逐年稳定性是试卷质量的重要组成部分.

五、考研数学题型分析

数学考试试题主要包括填空题、选择题、解答题(包括计算题、应用题和证明题(包括判断题)).其中填空题和选择题由于标准答案唯一或提供选择,评分时不存在主观性误差,故称为客观性试题.由于客观性试题评分的随机误差小,因此,有利于提高考试的信度,但对高层次能力的考核功能不强,不利于考试的效度.解答题称为主观性试题或自由反应题型,是由于该类题型要求考生根据题目给出的条件计算结果或论证,解答过程由考生提供,评分人根据考生作答情况相对于评分标准给分,存在一定的主观性误差,故称为主观性试题.主观性试题是目前我国数学的传统题型,有利于考查考生的逻辑推理能力、空间想象能力、运算能力以及运用所学知识解决实际问题的能力.

在数学的四份试卷中,主客观性试题的比例均为5:3,这一比例符合数学学科特点和教育测量要求的.

(一) 填空题

1. 数学填空题的特点

数学填空题通常是一个不完整的句子,要求考生填写一些关键性的内容,使之成为完整的句子,或一段话.数学填空题通常要求填写计算结果或主题中某个特定字母的数值.其特点是命题较容易,答案唯一,评分客观,但不易考查考生的思维过程和较高层次的能力.

数学试卷中一般要求有6个填空题,共24分.它们在试卷中所起的主要作用有四个方面:一是加大试卷的长度,增加考查内容的知识点,扩大考试内容的覆盖面,提高考试的内容效度;二是提高客观性试题的比例,减少评分误差,提高考试的信度;三是用其考查部分较低层次要求的内容;四是有利于考生缓解考试的紧张心理,逐步进入答题状态,从而充分发挥水平,这也有利于提高考试的信度和效度.

数学填空题主要考查考生对数学的基本概念、定义、公式、基本定理、基本性质和基本方法的识记、理解、掌握和简单运用.同时,可以考查考生快捷、准确的运算能力和简单的推理能力.

2. 数学填空题编制的基本要求

(1) 无论是题干还是解题过程中所涉及的内容应是《考试大纲》中规定考查的内容,即内容不超纲.

(2) 要求填写的内容必须是关键性的.

(3) 填空题所要求填写的空白一般放在题尾.

(4) 推导的过程步骤不宜过多,涉及的知识点不宜过杂,综合性不宜过强,难度不宜过大.一般要求考生运用基本概念、定义、性质和常用的计算方法、公式就能正确计算、推导或判断出结果.

(5) 不宜用填空题考查层次较高的证明推理能力,也不用填空题代替考查含有较高能力因素的复杂计算题;以考查记忆、理解、领会等较低能力为主.

(6) 填空题的答案必须是唯一的.

3. 数学填空题的主要类型及其考核功能

(1) 利用数学概念、定义、定理、性质进行简单推理和运算从而得出结论的填空题,主要考查考生对数学基本概念的定義和性质、重要定理的结论记忆、理解和掌握的程度.

【例1】 设函数 $f(x)$ 有连续的导函数, $f(0) = 0$,且 $f'(0) = b$,若函数

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x) + a \sin x}{x}, & x \neq 0, \\ A, & x = 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处连续,则常数 $A =$ _____. (1990年试题)

【简析】 本题不仅考查了函数在一点处的导数定义,而且考查了函数在一点处连续的充要条件,以及重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(2) 计算型填空题.考查重要的数学公式和重要的数学方法.

【例2】 函数 $y = x + 2\cos x$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为_____. (1992年试题)

【简析】 本题通过计算找出区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 内的驻点,比较函数在驻点及区间端点处的值,从而找到函数的最大值.主要考查区间上的极值与最大值概念的区别和求法.计算简单,但要求概念明确.

【例3】 微分方程 $y' + y \tan x = \cos x$ 的通解为 $y =$ _____. (1992年试题)

【简析】 一阶线性非齐次微分方程的通解公式是要求考生熟练掌握的,考生应能熟练的应用这一公式.这类试题考查考生对重要公式记忆的准确性以及快速、精确计算出答案的能力.

(二) 选择题



选择题是标准化考试的一种主要题型,是客观性试题的一种.它由题干、若干备选项组成,符合题目要求的备选项称为正确选项,其余的称为干扰项.一般每题给出四个备选项,其中只有一个备选项是正确的或符合题目要求的,要求考生从中选出.

1. 数学选择题的分类

数学选择题大致可以分成三类:第一类是计算性的选择题,第二类是概念性的选择题,第三类是理论性的选择题.计算性选择题是计算题的变式,主要考核基本方法、运算能力和某些典型计算错误,由于其考核功能可以通过填空题和计算题实现,在研究生入学考试中一般较少采用.概念性选择题主要考核对基本概念的定义和本质属性的理解,概念内涵和外延的理解和掌握.理论性选择题主要考核对基本定理、性质、法则和公式条件与结论的理解和掌握,并考核分析、判断、类比、归纳等逻辑思维能力.第二类和第三类选择题涉及概念和定理的各种变式,迷惑性较强,难度较大,全国硕士生入学考试的选择题多属此类.

2. 数学选择题的特点

第一,选择题考核的知识点既是考试大纲规定的基本概念和基本定理,同时也是教学中的重点、难点,这些都是考生必须掌握又不易掌握的内容.第二,选择题具有形式和逻辑关系的统一性,在分析知识点所涉及的基本概念的内涵和外延,基本定理的条件和结论的基础上,试题题干和选项在形式和逻辑上相统一,选项之间一般要求有相似的语言结构,题干和选项之间存在形式上合乎逻辑的推理关系,使得选择题具有一定逻辑思维能力的考核功能.选择题干扰项设计要有较强的迷惑性.干扰项设计充分注意考生对基本概念和基本定理的认知和识记过程中容易出现的歧见或模糊性,紧扣概念的内涵和外延,定理的条件和结论,将概念的内涵和外延稍作变化,对定理的条件和结论略加修改,暗中设置一时不易辨别的错误,使得选择题具有辨别和诊断概念性和理论性错误的考核功能.

理论上,选择题可以考核各层次的知识 and 能力.但实际上,选择题主要是用于考查低中层次的能力,即记忆、理解、分析比较等.在内容上重点考查基本知识、基本概念、基本原理和方法.数学选择题主要用于考查考生对数学基本概念、基本方法的掌握程度以及比较、判别能力.数学选择题还可以用于鉴别考生易于出现的方法和概念性的错误.它是数学中最难命制的一种题型.

3. 数学选择题编制的基本要求

(1) 数学选择题所考查的知识点应是大纲要求考查的重要概念,这些数学概念应是明确定义过的并且是考试大纲要求考查的.

(2) 数学选择题一般仅考查一个或相关的几个知识点.

(3) 一般不要把计算题改成选择题,即把计算题的结果改变一下形式成为若干备选项.但如果所给的每个干扰项是考生在某种典型错误解法下得出的结论,这样的有计算性质的选择题是可以出的.

(4) 题干中给出的条件对于问题解决必须是充分的.

(5) 备选项的长度、结构、语言表达要尽量一致;在各备选项中共同使用的文字或术语应反映在题干上.

(6) 备选项之间没有逻辑包含或排除关系,不要出现某个备选项正确,另一备选项必正确的情况.

(7) 如以数值作为备选项,其数值顺序应按逻辑关系排列.

【例4】 设 $f(x) = 3x^3 + x^2 |x|$, 则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶导数 n 为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. 【 】

(8) 每个干扰项的设置必须紧紧围绕题干中主考目标,有其各自的考核目的,而不能随意设置.干扰项应似是而非,正确选项在逻辑上应与题干一致.

(9) 题干尽量少用否定式,对题干和备选项中的否定词应特别予以强调.强调的方式是在否定词的下面加上着重号.

【例 5】 下列无穷级数中哪个不是绝对收敛的?

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{3/2}}$.
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln^2 n}$. 【 】

(10) 试卷中正确选项的字母必须随机排列,避免因某些考生猜选某一项而得到太多的分数.

4. 数学选择题考核功能实例分析

(1) 考核对基本概念理解的程度.

概念是数学教学的基础.数学基本理论的建立,数学运算、逻辑推理等能力无一不是以明确、清晰的概念为基础.概念是事物本质属性的反映,数学概念通常是以定义形式给出,包括概念的内涵和外延部分.所谓概念的内涵是指概念所反映事物的本质属性,概念的外延是指适合这个概念的一切对象,即概念的适用范围.概念明确,就是概念的内涵明确,概念的外延也明确.概念性选择题主要考核对基本概念的理解和掌握,对概念内涵和外延的理解和掌握,明确对概念种和属的区别和联系.选择题针对概念的内涵和外延设计一些变异形式的迷惑选项,考核考生对概念理解和掌握程度.一道选择题往往涉及若干概念,只有深刻理解了各种概念的本质属性和关系,才可能以清晰的逻辑关系辨别出正确与错误的选项.

【例 6】 设 A, B 都是 n 阶非零矩阵,且 $AB = O$,则 A 和 B 的秩(1994 年试题)

- (A) 必有一个等于零. (B) 都小于 n .
(C) 一个小于 n ,一个等于 n . (D) 都等于 n . 【B】

【分析】 本题是概念性的选择题.解答此题涉及到以下基本概念和知识点:

- ① 矩阵秩的概念和性质;
- ② 基础解系的概念和性质;
- ③ 齐次线性方程组的解和性质.

要求考生对矩阵秩的概念、基础解系的概念和齐次线性方程组解的概念及其性质理解清楚,并以这些概念作为基础进行正确的推理,才能在四个选项中选出正确答案.解答本题的关键,是在关系式 $AB = O$ 中,把矩阵 B 的列向量视为齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解.并且,在关系式 $B^T A^T = O$ 中把 A^T 的列向量,即 A 的行向量作为齐次线性方程组 $B^T X = 0$ 的解.根据条件矩阵 A, B 都是非零矩阵,推出 A 和 B 的秩都小于 n 的正确结论(B).

对于大多数考生,解答此题存在一定难度.究其原因,第一,考生必须对矩阵秩、基础解系和齐次线性方程组解等概念及其相互关系有较深的理解和掌握,一道选择题涉及若干概念,无疑对大多数考生是不低的要求.第二,解答本题的关键是将矩阵 B 和 A^T 的列向量视为齐次线性方程组的解,由关系式 $AB = O$ 联想到齐次线性方程组 $AX = 0$ 和 $B^T X = 0$ 的解与矩阵的关系,这本身在逻辑思维上就存在一定跨度,要求考生有较强的逻辑思维能力,这正是本题存在一定难度的主要原因.第三,干扰项的设计与正确选项(B)都是以矩阵 A, B 的秩与数 n 和 0 关系的形式出现.判断和推理中仅考虑矩阵 A 的秩是不够的,而判断矩阵 B 的秩需要转置,并不直截了当,这就进一步增加了试题

的迷惑性和难度. 仅此一道3分的选择题, 考核了若干线性代数的基本概念, 齐次线性方程组存在非零解的充要条件, 并考核了应用这些基本概念进行推理判断的能力.

对于基础较好的考生, 也可以利用已知关系式: 秩 $r(A) + \text{秩 } r(B) \leq n$, 推导出 A 和 B 的秩都小于 n 的结论. 也可以利用 $|AB| = |A||B|$ 和排除法解答.

(2) 考核对基本理论掌握的程度.

数学的基本理论, 通常是以定理、性质、法则、公式等形式出现. 掌握这些基本定理、性质、法则和公式, 必须明确它们的适用范围, 条件和结论是什么, 这些条件对于结论成立, 是充分条件、必要条件还是充要条件. 为了测试考生对于上述各项要求掌握的程度, 根据考试大纲对基本理论的不同层次要求, 设计各种不同形式的理论性选择题, 或改变它们的适用范围, 或将命题的条件稍加变化, 或将命题的结论略微修改, 或将条件的充分性和必要性作适当调整, 编制变化多样、形式各异的选项, 在具有迷惑和干扰性的推理过程中, 测试考生对基本理论掌握的程度.

【例7】 非齐次线性方程组 $AX = b$ 中未知量个数为 n , 方程个数为 m , 系数矩阵 A 的秩为 r , 则(1997年试题)

- (A) $r = m$ 时, 方程组 $AX = b$ 有解.
- (B) $r = m$ 时, 方程组 $AX = b$ 有唯一解.
- (C) $m = n$ 时, 方程组 $AX = b$ 有唯一解.
- (D) $r < n$ 时, 方程组 $AX = b$ 有无穷多解.

【A】

【分析】 本题是理论性选择题, 主要测试考生对于非齐次线性方程组解存在定理掌握的程度. 解答本题涉及到以下知识点:

- ① 非齐次线性方程组有解的充分必要条件;
- ② 矩阵秩的概念和性质;
- ③ 非齐次线性方程组的解与系数矩阵的秩、未知量个数的关系.

本题要求考生掌握非齐次线性方程组解的存在定理, 理解矩阵秩的概念和性质, 并对非齐次线性方程组解的个数与矩阵秩 r 、未知量个数 n 三者之间关系十分清楚, 由条件 $r = m$ 推出秩 $(A) = \text{秩}(Ab)$, 才能作出正确判断选择选项(A). 本题编制基于非齐次线性方程组解的存在定理, 对定理的条件和结论作了适当处理, 给出题干和选项, 要求又高于对存在定理的理解和掌握. 分析其原因, 其一, 在题干中仅给出系数矩阵 A 的秩为 r , 没有明确指出增广矩阵的秩, 要求考生思考系数矩阵与增广矩阵秩的关系. 否则容易形成判断推理中的思维障碍. 其二, 在选项中给出系数矩阵的秩 r 与行数 m 、列数 n 的种种关系, 要求考生根据矩阵秩的概念和性质, 由条件 $r = m$ 推出秩 $(A) = \text{秩}(Ab)$, 对于大多数考生这也是一种较高的要求. 其三, 在选项设计中, 注意到考生在判定齐次和非齐次线性方程组有解、有唯一解和无穷多个解的存在条件时, 容易产生的错误和模糊, 要求考生掌握解的判定条件和内在联系. 由于试题对于存在定理的条件和结论作了适当的变化, 增加了试题的考核功能和综合性.

(3) 考核对分析、判别等逻辑思维能力的训练程度.

数学是一门逻辑性很强的学科, 常被誉为训练思维的体操. 全国硕士研究生入学考试数学考试大纲明确指出, 要求考生具有逻辑推理能力. 逻辑推理包括相关的逻辑知识和推理方法. 逻辑知识诸如概念、定义、分类、命题、定理、条件、结论等, 推理方法诸如观察、分析、综合、比较、抽象、演绎、类比等. 要求考生具备应用相关基本知识和理论进行抽象概括、逻辑推理外, 同样, 选择题也具备类似的考核功能. 特别是在容易出现概念和方法上的模糊性错误方面, 测试考生的分析、比较、判别等逻辑思维能力, 选择题具有其他题型试题难于替代的功能.

【例8】 设矩阵 $A_{m \times n}$ 的秩为 $r(A) = m < n$, E_m 为 m 阶单位矩阵, 下述结论正确的是(1995 年试题)

- (A) A 的任意 m 个列向量必线性无关.
- (B) A 的任意一个 m 阶子式不等于零.
- (C) 若矩阵 B 满足 $BA = O$, 则 $B = O$.
- (D) A 通过初等行变换, 必可化为 (E_m, O) 的形式.

【C】

【分析】 本题属于概念性和理论性结合的选择题. 除了考核基本概念和基本理论之外, 由于几个选项有的是考生容易出现的概念性模糊和错误之处, 本题具有比较、分析、判别能力的测试功能. 本题涉及的知识点:

- ① 矩阵秩的概念及其判定;
- ② 矩阵秩与行、列向量组线性相关性之间的关系;
- ③ 矩阵的初等变换及性质;
- ④ 齐次线性方程组解的性质.

要求考生对矩阵的秩及其性质、矩阵初等变换及性质、齐次线性方程组解的性质有较深的理解和掌握, 才能作出正确的选择. 解答本题的关键, 在于理解齐次线性方程组 $AX = 0$ 仅有零解的充要条件是秩 $r(A)$ 等于未知量的个数. 选项 (C) 中, 条件写成 $BA = O$, 要求考生通过转置得到 $A^T B^T = O$, 而且秩 $r(A^T) = \text{秩 } r(A) = m$. 齐次线性方程组 $A^T X = 0$ 仅有零解, 推出 $B^T = B = O$, 从而选项 (C) 正确. 选项 (A), (B), (D) 的设置具有较大的迷惑性, 均是考生容易产生概念性模糊和错误的地方. 选项 (A), (B), 要求考生理解矩阵秩的概念, 矩阵秩与矩阵的行向量组、列向量组线性相关性之间的关系. 秩 $r(A) = m$, 未必 A 的任意 m 个列向量必线性无关, 未必 A 的任意一个 m 阶子式不等于零. 选项 (D) 要求考生对矩阵的初等变换与矩阵秩的关系有较深的理解, 初等行变换不改变矩阵的秩, 化为标准形后, 其中的单位矩阵 E_m 未必位于矩阵的前 m 列. 在编制本题时, 题干部分给出矩阵 A 的行、列数分别为 m 和 n , 并一反常规, 使秩 $r(A)$ 等于行数 m , 这样可以将试题考查知识点的覆盖面扩大. 在设置选项时, 不刻意追求形式结构上的工整对称, 而是紧扣矩阵秩的概念, 分析与矩阵紧密相关的基本概念和知识, 结合考生容易产生错误的结合点, 设置有关部分选项, 其目的在于实现测试考生分析、比较和判断的逻辑思维功能.

实际操作中, 选择题三个方面的考核功能往往不是单独存在的, 在同一个试题中, 可以根据命题的要求, 强化某一个或两个方面的考核功能, 综合交叉实现上述功能.

5. 选择题与其他题型功能的比较

填空、选择、解答和证明四种题型的功能各有不同. 概括地说, 填空题多为简单的计算题和概念题, 主要考查考生对某些最基本的概念、性质、公式掌握的熟练程度, 快捷、准确的运算能力以及正确的判断能力和推理能力. 解答题(包括计算题和应用题) 主要考查考生对数学有关部分内容的基本概念、基本原理和方法的掌握程度, 灵活运用以及数学运算、抽象概括、分析和解决实际问题的能力. 证明题除考查对数学的基本原理和方法的掌握程度外, 主要考查逻辑推理能力. 选择题则主要考查分析、比较、鉴别和判断能力.

选择题一般围绕着有关内容的重要或关键环节、主要特点和性质、容易出错的概念或方法命制的, 考查考生对有关内容理解的深度, 是否抓住了有关问题的关键, 是否掌握了有关内容与其他相关内容的联系和区别所在.

对于求解数学选择题, 除了形式逻辑方面的能力外, 还必须要有必要的直观“感觉”. 这里所指的感觉指的是理性认识阶段的“感觉”, 因为“感觉到了的东西, 我们不能立刻理解它, 只有理解了

东西,才更深刻的感觉它.”求解选择题时,首先要有“感觉”(见【例6】~【例8】),这种“感觉”是对问题深入思考、理解和认识的结果,是思维深刻性的表现.求解计算题,一般可以按照一定的程序和方法完成运算.选择题主要考查考生思维的深刻性,对于问题的认识是否完成了“感性认识——理性认识——感性认识”的过程,只有有了更高层次的感性认识,才能有较强的鉴别力和判断力.有的考生有时不能作出正确的分析和判断,一个重要的原因就是对于问题没有真正的理解,还处于低级的感性认识阶段.求解选择题首先对问题有“感觉”(这种“感觉”在数学文献中通常用“显然”或“易见”表述),即要有一个初步的判断,否则就无从下手,因为考试时一般没有很长的思考时间.因此,选择题不但考查知识的掌握程度,更重要的是考核能力.

6. 选择题的解法

选择题的求解过程也反映其考核功能.求解选择题一般可从两个方面入手:判断并选择“正确选项”和排除“错误选项”.作出正确的判断——快捷地选出正确选项或迅速地排除错误选项,要求考生对题中所涉及的有关内容、基本概念、性质和原理有较全面、深入的理解,融会贯通灵活运用.还要求考生思维深入和敏捷,有较强的记忆力、分析、比较并迅速作出判断的能力.做选择题原则上不需要进行大量和复杂的计算.当然,有时为了进行鉴别和验证,也要进行一些必要的计算.此外,假若可以确信某个选项是正确的,则无须证明其他选项不成立;同样,运用排除法时,也无须证明正确选项成立.

【例9】 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则下列必收敛的级数为

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$.
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$. 【 】

【例10】 设 A 是 n 阶可逆矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵,则

- (A) $|A^*| = |A|^{n-1}$. (B) $|A^*| = |A|$.
(C) $|A^*| = |A|^n$. (D) $|A^*| = |A|^{-1}$. 【 】

【例11】 对于任意 x 恒有

- (A) $e^{-x} \leq 1 - x$. (B) $e^{-x} \leq 1 + x$.
(C) $e^{-x} \geq 1 - x$. (D) $e^{-x} \geq 1 + x$. 【 】

【分析】 求解【例9】宜采取直接选取正确项的方法:由收敛级数的基本性质及 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,可

见 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} u_n$ 也收敛,从而 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$ 收敛,于是不用进行计算,就可以直接选出(D).

求解【例10】只需要进行如下的简单计算:由伴随矩阵的一般性质,有 $AA^* = |A|E$; $|A||A^*| = |AA^*| = ||A|E| = |A|^n$;因此,应选(A).这里虽然有一些简单计算,但要考查的并非计算能力,而是矩阵和行列式的基本性质.

求解【例11】可以通过一般方法,如通过计算选出正确的不等式.但是借助于函数 e^{-x} , $1-x$ 和 $1+x$ 的图形,可以更快地选出正确选项.由图1可见应选(C).

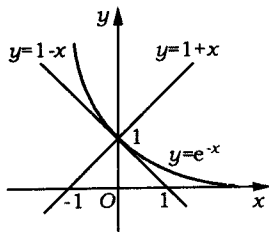


图 1

7. 数学选择题的命题原则示例

选择题在四种题型中是比较难命制的一种,我们结合具体的实例,讨论一下命制选择题的原则,同时也涉及选择题的命制技巧和考核功能.

(1) 选项不宜是计算题答案.

一般,选择题不宜用计算题的答案做选项.这并不是说,选择项完全排除计算.事实上,许多多计算题或证明题都可以改造成选择题.

(2) 各选项间应避免包含关系.

选择题的各个选项之间应避免有逻辑包含关系,即不应有“一个选项成立,则另一个选项也成立”的关系.

(3) 各选项间应避免排除关系.

选择题的各个选项之间应避免相互排除关系,即不应有“若一个选项成立,则另一个选项一定不成立”的关系.

(4) 干扰项应与主考项协调.

单项选择题的四个备选项中,只有一个是正确的选项即主考项.而其余三个干扰项不能随意编排,更不能勉强凑数,应紧密围绕着主考项,起到“干扰”和“迷惑”的作用.在保证科学性的前提下,应力求各选项在形式上的一致性,且逻辑上力求合乎情理.此外,在选项的表述上,文字应确切和精炼,格式要尽量划一.

【例 12】 设非负函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,则方程

$$\int_a^x f(t) dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)} dt = 0$$

在开区间 (a, b) 内有

(A) 0 个根. (B) 1 个根. (C) 2 个根. (D) 无穷个根. 【 】

【例 13】 设函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 内有定义, $f(x)$ 是连续函数,且 $f(x) \neq 0$, 而 $\varphi(x)$ 有间断点,则下列各函数必有间断点的是

(A) $\varphi[f(x)]$. (B) $f[\varphi(x)]$. (C) $[\varphi(x)]^2$. (D) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$. 【 】

【简析】 【例 12】和【例 13】的四个选项的内容都紧密地围绕着同一个问题,表达形式上一致,逻辑上合乎情理,格式也整齐划一.

(三) 解答题和证明题

解答题和证明题是数学考试的主要题型,一般由条件和结论两部分组成,要求考生根据条件计算出结果或推导出结论.解答题主要考查考生对数学的基本原理、方法、公式掌握和熟练运用的程度,能有效地考查考生的数学运算能力、抽象概括能力、运用所学知识解决实际问题的能力.证明题主要考查考生对数学主要定理、原理的理解和掌握的程度,能有效地考查考生的逻辑推理能力、空间想象能力.

六、考研数学考试内容覆盖面的要求

所谓考试内容覆盖面是指试题所考查的知识点占考试大纲要求考查的知识点比例.由于数学考试一般设计几个学科,涉及的知识点非常多,加之数学试题的特点,一份试卷中试题题量不可