


# 认知科学

## 建构主义与数学教育

数学学习心理学的现代研究

郑毓信 梁贯成 编著



RENZHI KEXUE  
JIANGOU ZHUYI  
YU SHUXUE JIAOYU

上海教育出版社

G447/6

# 认知科学 建构主义与数学教育

## 数学学习心理学的现代研究

郑毓信 梁贯成 编著



21543942

上海教育出版社

# 认知科学 建构主义与数学教育

——数学学习心理学的现代研究

郑毓信 梁贯成 编著

上海教育出版社出版发行

(上海永福路 123 号)

(邮政编码 200031)

各地新华书店经销 上海商务联西印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 9.25 插页 4 字数 218,000

1998 年 10 月第 1 版 1998 年 10 月第 1 次印刷

印数 1—3150 本

ISBN 7-5320-5981-2/G·6136 定价:(软精)13.00 元

## 序 言

这是一部酝酿了好几年的书,在即将出版之际,笔者愿意对这一过程及本书的写作思想作一简单的介绍,以帮助读者更好地了解这本书的性质和特点。

写一部数学学习心理学方面的著作这一愿望可以追溯到1991年,那时我有幸获得了美国联合基金会的研究基金,从而有可能对美国进行为期一年的学术访问。由于对数学教育的特殊兴趣,我就来到了著名的罗格斯大学(Rutgers, the State University of New Jersey)数学教育研究中心,希望能深入地了解一下美国数学教育、特别是理论研究的现实情况,以从中获得有益的启示。正是出于这样的考虑,我在当时花费了不少时间去阅读包括数学学习心理学方面的一些论著。这次出访的直接成果之一就是1994年出版的《问题解决与数学教育》(江苏教育出版社);另外,就数学学习心理学方面的学习而言,我则在很大程度上可以说经历了一个“范式转变”的过程,因为,尽管出国前我曾在这一方面作了些专门准备,包括阅读了若干由中国学者所撰写的数学学习心理学的专著,但在此时却仍然感到一种巨大的差异,或者说,即是真正体会到了现代科学哲学研究中所经常谈到的“不可通约性”,这也就是指,就国内外在这方面的研究而言,所使用的可以说是两个完全不同的概念框架(理论框架)。由于这一差异清楚地表明了国内在数学学习心理学研究方面的落后性,因此,我就十分自然地萌发了这样的想法,即是觉得应当写一部数学学习心理学的著作以对国外在这一方向上的现代发展作出综合的介绍,特别是,这一著作应从整体上对心理学现代发展的主要特征、也即认知心理学对于行为主义

的取代作出清楚的说明,因为,在笔者看来,正是这一转变为数学学习心理学的现代研究提供了直接的背景或必要的理论框架。

1992年回国后,由于首先从事了其他一些课题的研究,因此在相当一段时间内未能具体地去实行上述的写作计划;但是,我又始终保持了对于数学学习心理学现代发展的高度关注,特别是,其在整体上的主要特征和发展趋势。具体地说,笔者注意到,数学学习心理学的现代发展明显地表现出了以下两个特征:一是由理论向实践的过渡,也即人们更加关注如何用心理学的研究成果指导具体的教学活动。例如,关于认知心理学教学涵义的深入分析就是近年未十分热门的一个研究课题。二是达到了更大的理论高度,这也就是指,人们现已不再满足于思维活动的具体研究,而是力图从认识论的高度进一步去揭示数学学习活动的本质。例如,近年来新出现的“环境认知”和“分配认知”等概念在很大程度上就可被看成这样一种自觉的哲学探索活动的直接产物。

也正是从这样的角度去进行分析,笔者认为,我们就应给予建构主义特别的重视,因为,后者正是从认识论的高度对心理学、特别是认知心理学的研究成果进行深入分析的直接结果,而且,这在很大程度上又构成了对于传统教学思想的彻底否定,从而就将直接导致一场深刻的教育革命。显然,这事实上也就为我国的数学教育工作者提出了一个紧迫的任务,即是如何去紧跟这一革命性的变革。当然,我们在此不应盲目地去追随外部的潮流,特别是,我们更应清楚地看到这样的现实,即在“建构主义”这一旗号下事实上包含多种不同的观点,而一些极端的观点则就因其观点之“新颖”而具有很大的诱惑性,从而,我们也就应当十分注意防止成为各种“时髦”的错误观念的不自觉俘虏。事实上,就笔者在这一问题上的基本观念而言,也有一个不断学习和澄清的过程,对此读者只需与先期出版的《数学教育哲学》(四川教育出版社,1995年)中的有关部分稍作对照就可清楚地看出。

一般地说,以上的思考事实上并不完全局限于数学学习心理学的范围;勿宁说,这即是从一个更为广泛的角度为我们深入地开展数学学习心理学的研究提供了一个必要的理论框架.另外,与一般的学习心理学相比,数学学习心理学无疑又应具有自己的特殊性.特别是,我们应通过对于数学学习过程中内在思维活动的深入研究,正确地去揭示数学学习和教学的规律,从而,如何处理好特殊与一般的关系也就构成了对于笔者的一個直接挑战.正是出于上述的考虑,本书的论述就将集中于“认知科学、建构主义和数学教育”这样一个主题.

具体地说,在第一部分“认知科学与数学教育”中,笔者将首先对心理学的现代发展,特别是由行为主义心理学到认知心理学的转变作出简要的介绍,同时又将集中地对认知学习理论作出论述,从而,这就不仅为我們较好地理解数学学习心理学的现代发展提供了必要的背景知识,而且也為深入地开展后一方向上的研究提供了必要的理论指导;其次,我们将围绕“数学解题”和“高层次数学思维”这两个主题对关于数学学习活动的认知科学研究作出介绍,尽管这并不能被认为已经包括了数学学习心理学的全部内容,但是,读者仍可由此而获得关于如何去改善数学教学的重要启示,而且,这也為我们深入地开展独立的研究提供了直接的范例.

另外,在第二部分“建构主义与数学教育”中,我们将首先从一般的角度对建构主义的内涵及其教学涵义作出分析,特别是,建构主义现正经历着由一元论、极端主义向多元论、辩证的综合的重要转变,而且,从总体上说,这又构成了对于传统数学教学思想的严重挑战;其次,笔者又将针对数学教育的特殊性作出进一步的论述:建构主义不仅为数学的本体论问题提供了合理的解答,而且也直接促成了数学观的革命性转变,笔者将从这样的角度对“解释”与“理解”、形式与非形式、及“问题解决”与数学地思维等问题作出具体的分析.

综上所述,本书主要是一种理论性的探索,并有着较强的时代性质。笔者衷心地希望这一著作能直接促进我国数学学习心理学的研究,直至最终建立起数学教育学的科学理论体系。另外,笔者相信,广大的数学教师也能由这一著作得到有益的启示,从而对改进我国的数学教育发挥一定的积极作用。

最后,笔者十分高兴地提及,1995年对香港大学教育学院的学术访问直接促成了我与教育学院梁贯成院长在这一著作上的合作,我们不仅在写作的指导思想上很快取得了一致,而且,梁先生的合作也使这一著作无论在内容、或是文字表述上都有了较大的提高。事实上,由以上的论述我们即可看出,心理学、教育学、数学教育学与哲学等学科的相互渗透及有关工作者的密切合作正是数学教育、特别是数学学习心理学的研究得以不断深化的一个重要条件,而这也就是这一著作能够顺利问世的一个重要原因。

我并愿意借此机会表达我对 Gillian Goss、Donald Gillies 和张澄武等友人的谢意,感谢他们多年来对我的学术研究一直给予了很大的帮助,也感谢黄家鸣和陈茂松先生为本书的写作提供了不少有用的资料。上海教育出版社的各级领导和朋友对这一著作的出版给予了大力支持并付出了辛勤的劳动,对此特一并表示诚挚的谢意。

郑毓信

1997年4月于南京大学哲学系

## 目 录

第一部分 认知科学与数学教育	1
第一章 认知学习理论概要	5
1.1 从行为主义到认知心理学	5
1.2 认知学习理论概述	28
1.3 认知心理学与教学研究	61
第二章 数学学习活动的认知科学研究	72
2.1 数学解题的现代研究	74
2.2 高层次数学思维的研究	100
第二部分 建构主义与数学教育	133
第三章 建构主义及其教学涵义	137
3.1 建构主义述评	137
3.2 建构主义的教学涵义	169
第四章 建构主义与数学教育	197
4.1 建构主义的数学观	197
4.2 建构主义与数学教育	219
附录	257
【附录一】 心理学、人工智能与神经科学的整体性发展	257
【附录二】 两个解题记录	271
【附录三】 数学地谈论:现代数学教育的热点之一	284
后记	288



## 第一部分 认知科学与数学教育

一般的学习理论与数学学习心理学的专门研究是否存在任何重要的联系？为了对这一问题作出正确的解答，我们不妨先来看一下当前在数学教育领域中较为流行的一种意见，即“我们不应从普遍的、中性的学习理论出发去提出数学学习理论，而应集中注意特定内容的学习过程。”

笔者以为，就纠正先前的数学学习心理学研究所表现出的简单化、理论脱离实际等倾向而言，上述的主张是很有道理的，特别是，我们即应明确反对把数学学习心理学简单地等同于“一般(学习)心理学 + 数学的例子”，也即只是在学习心理学的一般理论框架中简单地嵌入若干数学的实例。恰恰相反，数学学习心理学如有其独立存在的必要，则就显然必须特别突出数学学习(相对于一般学习而言)的特殊性。

但是，作为问题的另一方面，笔者认为，我们又应注意对数学学习心理学与一般心理学之间的关系作出深入的分析，特别是，就上述的流行意见而言，则又直接涉及到了这样一个问题：我们是否就应以所谓的“中性事实”、也即完全没有受到一般学习理论“污染”的“经验事实”作为数学学习心理学研究的出发点和最终基础？

一般地说，这事实上就涉及到了心理学研究的方法论问题，而这又正是心理学历史发展过程中的一个重要转折点，即从 19 世纪后期开始人们逐步确立了这样的认识：应当对传统的心理学研究进行根本性的变革，也即应当用科学的方法去对心理现象作出深

人的研究,从而使心理学从哲学的领域中“解放”出来,并成为一门真正的科学.显然,这正是现代意义上的心理学得以建立的一个重要背景.但是,究竟什么又是这里所说的“科学方法”呢?从历史的角度看,人们在此所采取的往往是这样一种(素朴的)“经验主义”立场,即是认为以下的“经验方法”就构成了科学方法的核心:我们应当首先通过观察和实验去获得无可怀疑的基本事实(“经验事实”),然后,再通过对基本事实的归纳引出普遍的结论,最后,则又应当依据新的经验事实去对结论的可靠性作出检验.显然,上述关于应当如何去从事数学学习心理学研究的流行意见在很大程度上也就可以被看成所说的经验主义立场的一种直接反映.

考虑到经验主义在现代文明、特别是自然科学的历史发展中曾发挥过十分重要的作用,特别是,作为经验主义在现代的一种主要表现形式,“逻辑经验(实证)主义”作为一种哲学思潮更在西方学术界中长期占据了主导地位,上述现象的出现显然无足为奇;但是,从理论的角度看,笔者以为,我们在此仍应对上述立场的合理性作出自觉的反思.

一般地说,这事实上也就是科学哲学何以在现代得到迅速发展的一个直接原因,即这正是从理论的高度对科学活动进行自觉反思的一个直接产物,而后者的重要特征就是对于经验主义立场的深入批判.具体地说,除去对于归纳方法有效性的深入探究(这事实上可以追溯到19世纪的英国哲学家休谟(D. Hume))外,新的批判更直接涉及到了经验主义的基本立场,即是否存在有无可怀疑的经验事实?而这又正是科学哲学家们现今所普遍接受的一个基本结论,即是认为并不存在所谓的“中性事实”,因为,任何事实都必定包含有一定的“理论负荷”,也即都是受到理论“污染”了的.例如,我们只需对作为获取经验事实主要手段的观察和实验作出深入的分析就可清楚地看出上述结论的合理性:首先,任何观察或

实验都必定包含有一个选择的过程,即必须首先对哪些是“相关的因素”作出判断,而这事实上就是在一定的理论指导下进行的;其次,为了对客观事物和现象作出描述,我们又必须使用一定的概念,而后者也就是理论的一个重要组成成分,特别是,不同的理论可能具有不同的基本概念,而且,即使对同一个概念来说,在不同的理论中也完全可能有着不同的意义。从而,总的来说,在观察和实验之中就必然渗透有理论的因素(这也就是说,人们总是通过有色眼镜来观察世界的);而也正因为此,就根本不可能有完全不具有理论负荷的“中性事实”,或者说,经验事实并不能被看成科学研究的实际出发点和最终基础。

显然,从这样的角度去进行分析,我们也就可以看出,数学学习心理学的研究并不能完全脱离一般的学习理论乃至行为主义和认知心理学等基本理论,勿宁说,正是后者为数学学习心理学的具体研究提供了必要的理论框架。特殊地,我们在此并应清楚地看到心理学研究基本立场的转移对于数学学习心理学研究的重要性。例如,依据不同的心理学理论,我们就可能对数学学习活动中的同一现象(即如学习中的规律性错误)作出不同的解释。从而,就深入开展数学学习心理学的研究而言,我们就必须高度关注心理学的现代发展并以此作为自觉的指导。

正是出于这样的考虑,在第一章中我们就将首先对心理学的现代发展、也即由行为主义向认知心理学的转变作出论述,并进而对认知学习理论作出概要的介绍。另外,在第二章中我们则将集中地论及关于数学学习的认知科学研究。

最后,笔者在此并愿特别提及刚刚去世的著名数学教育家斯根普(R. Skemp)的学术发展道路。对此斯根普本人在其著名的《数学学习心理学》(《The Psychology of Mathematics Learning》, Lawrence Erlbaum, 1987年新版)一书中曾作了如下的描述:“这一心智之旅

历程三十多年,它开始于数学课堂,也终止于数学课堂,但中间却经过了发展心理学、动机论、情感论、控制论、进化论和人工智能等领域。”这就是指,为了搞好数学教学,在作了五年数学教师以后,斯根普又重新进入大学学习心理学,因为,在他看来,只有在心理学中我们才能找到对于由数学教学的实践所引出的问题的正确解答,也即“为数学学习提供一个合适的理论”;然而,由于当时的学习理论完全为行为主义学派所支配,因此,斯根普就未能在心理学领域中找到现成的令人满意的解答,从而,这就促使他开始了长达三十年之久,并涉及发展心理学、人工智能等多种学科的“心智之旅”。显然,斯根普的这一学术发展道路不仅可以被看成学习心理学、特别是认知学习理论历史发展过程的一个简单缩影,而且也清楚地表明了在学习心理学与一般学习理论之间的重要联系,从而也就是与本书第一部分所采取的立场十分一致的。

## 第一章 认知学习理论概要

就心理学的现代发展而言,我们无疑应当首先提及以下的事实,即从70年代开始心理学研究的基本立场已经发生了重要的转变,也即认知心理学现已取代行为主义而在心理学领域中占据了主导地位.导致这一发展有多种的因素:首先,认知心理学的兴起在一定意义上即可被看成信息时代科学整体性发展的一个必然产物,特别是,信息论和计算机科学的发展更可说是为认知心理学的产生提供了重要的外部条件;其次,尽管认知心理学的发展在最初主要是一种不自觉的行为,但是,这一发展却又直接促进了对于行为主义心理学基本理论立场的自觉反思与批判,而后者则就更为清楚地表明了上述历史性转变的合理性和必要性.在这一章中我们将首先对认知心理学发展的历史必然性作出论述,然后,在第二节中我们则将集中地对认知学习理论作出概要的介绍.

### 1.1 从行为主义到认知心理学

#### 一、行为主义的基本理论立场及其批判

##### 1. 行为主义的基本理论立场

正如前面所已提及的,在本世纪70年代以前,就西方、特别是美国的心理学研究而言,行为主义曾长期占据主导地位.那么,究竟什么是行为主义心理学的主要特征或是其基本的立场呢?

事实上,行为主义的兴起正是以上所提及的使心理学“科学化”这一运动的一个直接产物,特别是,后者更直接导致了行为主义者在心理学研究中采取了如下的基本立场:由于内在的思维活动或心理过程是不可能被直接观察到的,因此,在行为主义者看来,为了使心理学的研究达到科学的水平,我们就不应去涉及任何内在的思维活动或心理过程,而应使心理学的研究局限于可见的行为——这事实上也就是“行为主义”这一名称的直接来源。

特殊地,从历史的角度看,行为主义者的上述立场并可被看成对于在此以前的内省主义心理学家的基本立场的一个直接反对。例如,尽管内省主义的德国心理学家冯特(W. Wundt)曾在莱比锡创立了世界上第一个心理实验室,但他主要的指导思想却是认为应当用对可见行为的实验研究作为对传统的内省方法(所谓内省法,即是指给被试一个明确的指示,让他报告此时自己头脑中的活动形象或心理状态)的重要补充,也即是希望能借助于实验来对由内省所获得的材料作出确证,而后者即内在的心理活动则始终被看成心理学研究的主要对象,特别是,在冯特看来,我们就应依据内在的心理活动去对外部的可见行为作出必要的解释。与此相对立,行为主义则对所说的内省方法提出了直接的批评。具体地说,行为主义者正确地指出,内省方法由于完全依赖于个人的自我反省,因此就不可避免地带有很大主观性,由此所获得的结果显然也是不可重复的,因此,这就直接违背了科学研究的客观性和可检验性这样两个最为基本的要求。另外,又由于行为主义者坚持心理学的研究应当局限于可见行为,这也就是说,在心理学的研究中我们只应去对可见行为进行描述而不应作出解释,因此,即使就可见行为的实验研究而言,其所采取的基本立场也是与内省主义的心理

学家直接对立的。<sup>①</sup>这种纯粹“描述性”的立场在美国著名心理学家例如,上述的……

斯金纳(B. Skinner)那里就有着十分典型的表现。

具体地说,斯金纳认为,只有把心理学的研究对象规定为可以观察到的有机体的行为,即如移动、静立、抓握、推举、发音等,心理学才可以侧身于自然科学之林;进而,心理学的任务又应当是描述性、而不是解释性的,这也就是说,心理学中关于行为(“反应”)及其外部条件(“刺激”)之间的关系应当被看成一种纯粹的函数关系,而我们则完全不用去关心在所说的刺激与反应之间有机体内部究竟发生了什么。例如,斯金纳这样写道:“以行为为其函数的外部变量为我们提供了一种可以叫做函数的或原因的分析。我们对某个有机体的行为进行预测和控制。这种行为是‘因变量’,即我们打算找出其原因的那种结果。而我们的‘自变量’——行为的原因乃是各种外部条件,行为就是这种外部条件的函数。”(转引自吴文侃主编:《当代国外教学论流派》,福建教育出版社,1990年,第150页)

当然,由前面的分析我们已经知道,对于任何事物或现象的描述必须借助于一定的理论概念,而这事实上也就涉及到了行为主义的第二个主要特征,即正是所谓的“刺激-反应联结”为行为主义者对于可见行为的描述提供了最为基本的理论框架。

例如,以下就是行为主义者心理学实验的一个基本模式,即将被试置于某种特定的刺激环境之中以研究由此而引出的反应,特别是,我们应当高度重视与刺激的各种变化相对应的反应的变化,也即应当通过严格的定量分析来弄清控制行为的条件。(当然,由于个体之间必然存在一定的差异,因此,心理学实验在严格的意义上就不具有可重复性。但是,在行为主义者看来,只要将研究的对象由个体扩展到随机抽取的一组对象,并采用科学的统计方法,上述由个体差异所造成的影响就可忽略不计。)

从而,相对于先前的心理学研究而言,行为主义就不仅代表了

基本立场和方法论的重要转移,而且也包括了概念系统的重要转变.例如,行为主义的主要倡导者之一,美国心理学家华生(J. Watson)就曾明确提出,我们应当抛弃所有历史上遗留下来的含有主观成分的概念,并应用行为主义的概念去对此进行改造,即如以“辨别反应”代替“感觉”,以“内脏反应”代替“情感”,并应把思维看成“无声的语言”。

应当指出的是,行为主义对于“刺激-反应联结”的强调也并非一种完全盲目的行为,而有其一定的社会原因.具体地说,后者主要地就是指巴甫洛夫(Иван Петрович Павлов)基于动物实验所建立的“条件反应学说”在当时获得了巨大的成功;另外,又由于达尔文(C. R. Darwin)的进化论似乎已经表明在动物与人类之间存在明确的连续性,因此,在行为主义者看来,所说的“刺激-反应联结”也就为我们深入地去研究人类的行为提供了一个合理的理论框架。

从而,这事实上也就可以被看成行为主义心理学的又一重要理论前提,即是认为在动物与人类的行为之间并不存在任何重要的质的区别。

最后,也正由于唯一地局限于“刺激-反应联结”,因此,在心理学的实际研究中行为主义又明显地表现出了还原论(*reductionism*)的倾向,即是认为复杂的行为可以被还原(归结)成简单行为的简单组合。

例如,就所谓的“选择性反应”而言,在行为主义者看来,这就可以被看成以下几种行为的简单组合:“对刺激物的辨别”、“选择适当的反应”和“作出反应”。特殊地,在此并存在这样的定量关系:

选择性反应的时间 = 辨别的时间 + 选择的时间 + 反应的时间。



## 2. 行为主义的学习理论

以下我们再对行为主义的学习理论作一简要的介绍,而这主要是为以下关于认知学习理论(1.2节)与建构主义的教学涵义(3.2节)的讨论提供一个必要的背景。

就行为主义学习理论的建立而言,美国心理学家桑代克(E. Thorndike)和斯金纳作出了特别重要的贡献。事实上,对于教育问题的高度关注正是这两位学者的一个共同特征,而也正是他们的工作为现代意义上的教学理论(更为一般地说,即是教法设计理论)的建立提供了重要的理论基础(可参见3.2节)。

具体地说,桑代克的学习理论最初是通过一系列的动物实验发展起来的。例如,其所设计的最为成功的实验之一就是“猫开门”的实验:他把饿得发慌的猫关在笼子里,笼外放着食物,笼门用活动的门关着,被放进笼里的猫在笼子里躁动不安,试图从任何空隙中钻出来,它东碰碰、西撞撞,用爪抓一切可以抓到的东西,经过一阵乱碰乱抓,偶然碰到那个活动的门闩,门被打开了,在经过若干次尝试以后,猫的随机的紊乱的行为出现得少了,直到最后,只要把猫一放进笼里,它就立即以一定的方式去抓门闩打开笼门。作为对于这个实验的解释,桑代克认为,猫是通过多次尝试、不断减少无效劳动和不断舍弃错误动作而学会开笼门的。

其次,尽管桑代克也认识到在动物的学习和人类的学习之间存在有重要的区别,特别是,前者并非一种自觉的行为,但他同时又认为这主要是简单与复杂的区别,而两者的本质则是相同的。这样,他最终就发展起了以“刺激-反应联结”和“试误”为主要特色的一般性学习理论。这就是指,学习即是形成一定的“刺激-反应联结”,而这种联结主要地又是通过试误得以建立的:在重复的尝试中,错误的反应逐渐被摒除,正确的反应则不断得到加强,直至最终形成了固定的刺激-反应联结。