张光珞 主编

海淀新设计

新课标 新大纲 新思路

解题技法全类

初中二年级

举一反三

适用于各版本

数学

内蒙古大学出版社
南京大学出版社

张光珞 主编

海淀新设计

新课标 新大纲 新思路

解题技法全类

初中二年级

举一反三

适用于各版本

数学

内蒙古大学出版社
南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

初二数学解题技法全类举一反三./葛静、瞿赛花编.
呼和浩特:内蒙古大学出版社,2004.5
ISBN 7-81074-665-0

Ⅰ.初… Ⅱ.葛… Ⅲ.数学课—初中—解题
Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第037779号

书　　名　初二数学解题技法全类举一反三
主 编 者　葛　静　瞿赛花
出版发行　内蒙古大学出版社　南京大学出版社
发　　行　内蒙古新华书店
印　　刷　涿州市京南印刷厂
开　　本　787×1092/16
总 印 张　21.25
字　　数　500千
版　　次　2005年第1版第1次印刷
标准书号　ISBN 7-81074-665-0/O·43
总 定 价　30.00元

编 者 的 话

提高学生综合素质，发展学生的个性特长，不能靠突击速成，更不能脱离实际，拔苗助长。学生智力的发展和能力的提高是一个循序渐进、长期训练、螺旋上升的过程。

为了配合初中数学的教学和应试，我们组织一批有丰富经验的骨干教师编写了这套丛书，通过独特的一例三练、举一反三的形式，帮助学生系统地掌握数学教材的全部内容，拓宽解题方法和技巧，提高应试和参赛能力。

本丛书编写力求体现以下特点：

内容全面，螺旋上升。丛书把初中数学教材全部内容，按年级分解，每个年级设置 80 个专题，每个专题作为一次训练。同时注意各个年级间的衔接，体现层次和梯度。

源于基础，着眼提高。各年级按照新课标通用教材教学内容的编排顺序，从学生的知识结构和思维发展水平的实际出发设置专题，便于学生在掌握课本单元基础知识的前提下自学，进行拓展训练。

一例三练，举一反三。每个专题，从浩翰的题海中精选【典型题例】，“思路”给出分析和点拨；“详解”给出详细的或不同的解法；“诀窍”对例题有关的知识、方法、技巧进行归纳和深化。【好题精练】配合例题的知识点，设置三道练习题，让学生独立完成，培养学生举一反三的能力。

与时俱进，紧跟时代。例题和练习题的内容吸收了近几年来各地数学竞赛出现的新题型，体现时代性、趣味性、开放性、探索性、实践性，并注意密切联系生活实际，引导学生在生活中学数学、用数学。

本丛书在编写过程中参考了同类书籍中的精华，谨表诚挚谢意。由于时间和编者水平的限制，书中错误和不足之处在所难免，恳望批评和建议。

《初中数学解题技法全类举一反三》

编　委　会

选题策划　高锦明

总 主 编　徐　伟　潘小云

主　　审　王大年

编　　委　徐　珍　梁国书　王宝林　徐　玲
施　荣　赵振海　刘小东　黄秀珍
戴志红　冯慧玉　顾　平　王炯英
何为祥　陈蕴中　赵行超　黄　静

编　　著　吴克桃　罗启明　葛　静　瞿赛花
史　莲　郝志增

美　　编　陈　奇　王原晴

版　　式　顾　林　黄　力

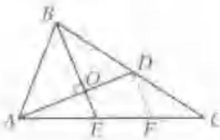
插　　图　姜　瑾　王文澍　何　宁　秦爱华

目　录

中位线的应用 1

三角形中位线定理和梯形中位线定理都有两个条件和两个结论，条件和结论中的某一个互换，得到的命题都是真命题. 这一点常用在解题之中.

举一 典型题例



如图所示，$\angle ABC$ 的平分线 BE 与 BC 边的中线 AD 垂直且相等，已知 $BE=AD=4$，求$\triangle ABC$ 的三边.

【思路】 D 是 BC 中点，可构造中位线 DF，可得 $DF=2$，BO 是等腰$\triangle ABD$ 底边上的高，由三线合一，得 $OD=\frac{1}{2}AD=2$，$BO=4-OE=4-\frac{1}{2}DF=3$，根据勾股定理可求 BD，从而求出 BC. $\text{Rt}\triangle ADF$ 中，可求出 AF，再求 FC，从而求 AC. 由于$\triangle ABD$ 是等腰三角形，可求出 AB，从而问题得解.

【详解】 过 D 作 $DF\parallel BE$ 交 AC 于 F. 由于 BE 平分$\angle ABC$，$BE\perp AD$，则 O 是 AD 的中点，而 D 是 BC 的中点，且 $DF\parallel BE$，则 F 是 EC 的中点，那么 DF 是$\triangle BEC$ 的中位线，OE 是$\triangle ADF$ 的中位线.

而 $BE=4$，则 $DF=2$，$OE=1$，这时 $OB=3$，$OD=2$，$BD=\sqrt{OB^2+OD^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，$BC=2\sqrt{13}$.

由于$\triangle ABD$ 是等腰三角形，$AB=BD=\sqrt{13}$.

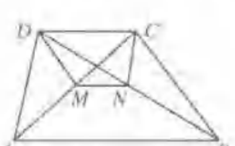
$\text{Rt}\triangle AOE$ 中，$AE=\sqrt{OA^2+OE^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$. 在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中，$AF=\sqrt{AD^2+DF^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，所以 $EF=FC=2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$，则 $AC=3\sqrt{5}$.

因此，$AB=\sqrt{13}$，$AC=3\sqrt{5}$，$BC=2\sqrt{13}$.

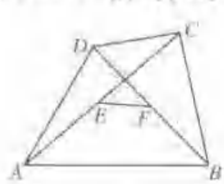
【诀窍】 由于 D 是 BC 的中点，故过 D 作已知边 BE 的平行线 DF，得出 F 是 EC 的中点，使题中的已知条件得到了充分利用.

反三 好题精练

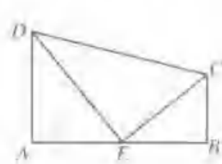
❶ 如图(1)，在梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，且 $AB=2CD$，M、N 分别是对角线 AC、BD 的中点. 设梯形 $ABCD$ 的周长为 l_1，四边形 $CDMN$ 的周长为 l_2，且 $l_1=nl_2$，试求出 n 的值.



(1)



(2)



(3)

❷ 如图(2)，在四边形 $ABCD$ 中，E、F 分别为对角线 AC、BD 的中点，那么 EF 与 $AB+CD$ 的关系是什么？

❸ 如图(3)，梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$\angle A=90^\circ$，E 是 AB 的中点，$\angle CED=90^\circ$，求证：E 到 CD 的距离等于 EA.

2 三角形中的不等关系

三角形的任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边；一个外角大于任一个与它不相邻的内角等不等关系应用非常广泛.

举一 典型题例

已知 a、b、c 是正数，且任意两数之和不等于第三数，$\sqrt{(a+b+c)^2}+\sqrt{(a-b-c)^2}+\sqrt{(b-c-a)^2}+\sqrt{(c-a-b)^2}=2(a+b+c)$. 试问以 a、b、c 为边，能否构成一个三角形？

【思路】 由等式 $\sqrt{(a+b+c)^2}+\sqrt{(a-b-c)^2}+\sqrt{(b-c-a)^2}+\sqrt{(c-a-b)^2}=2(a+b+c)$ 入手，看两边之和是否大于第三边，两边之差是否小于第三边.

【详解】 上述等式左边化为 $|b+c-a|+|c+a-b|+|a+b-c|=a+b+c$，观察此式知道，只有当 $b+c-a>0$，$c+a-b>0$，$a+b-c>0$ 同时成立时，该等式才能成立. 因此，以 a、b、c 为边可以组成一个三角形.

【诀窍】 凡是联系三角形三边 a、b、c 的问题，要充分利用"任意两边之和大于第三边"或"任意两边之差小于第三边"这一隐含条件中所能列出的不等式.

反三 好题精练

❶ 已知三角形的一边是另一边的 3 倍，求证：它的最小边在它周长的 $\frac{1}{8}$ 与 $\frac{1}{6}$ 之间.

❷ 已知三角形的三边是 3，$1-2x$，4，则 x 的取值范围是__________.

❸ 已知 $\triangle ABC$ 有两边长为 a，b，其中 $a<b$，则其周长 l 一定满足 （　　）

A. $3a<l<3b$　　B. $2b<l<2(a+b)$

C. $2a+b<l<a+2b$　　D. $2a<l<3b$

三角形的内角 3

三角形是最简单的封闭图形，为继续学习平面几何知识的基础，它融角、线段于一体，在中考和竞赛中考查较多.

举一 典型题例

在三边是连续自然数，周长不超过 100 的三角形中，锐角三角形的个数是 （　　）

A. 28　　B. 29　　C. 30　　D. 31

【思路】 先可求出所有三角形的个数为 31 个，再去掉其中钝角三角形和直角三角形各 1 个.

【详解】 设满足条件的三角形边长分别是 $n-1, n, n+1$，则 $\begin{cases}(n-1)+n+(n+1)\leqslant 100\\(n-1)+n>n+1\end{cases}$

所以 $2<n\leqslant 33$

即 $n=3,4,5,\cdots,33$，共 31 个.

当 $n=3$ 时，$2^2+3^2<4^2$，三角形为钝角三角形.

当 $n=4$ 时，$3^2+4^2=5^2$，三角形为直角三角形.

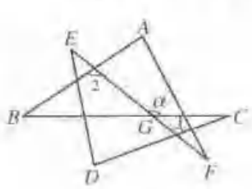
当 $n\geqslant 5$，由于 $(n-1)^2+n^2-(n+1)^2=n^2-4n=n(n-4)>0$，故此时三角形均为锐角三角形.

即锐角三角形个数为 $31-2=29$，选 B.

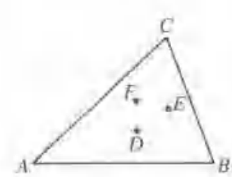
【诀窍】 在 $\triangle ABC$ 中，三边为 a,b,c，若 $a^2+b^2>c^2$，$a^2+b^2=c^2$，$a^2+b^2<c^2$，则依次可得锐角、直角、钝角三角形.

反三 好题精练

❶ 如图(1)，$\angle CGE=\alpha$，则 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=$____.



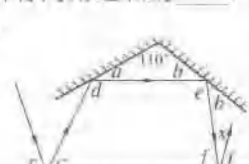
(1)



(2)

❷ 如图(2)，$\triangle ABC$ 内有三个点 D,E,F，分别以 A,B,C,D,E,F 这六个点为顶点画三角形，如果每个三角形的顶点都不在另一个三角形的内部，那么这些三角形的所有内角之和为____.

❸ 一束光线经三块平面镜反射，反射的路线如图所示，图中字母表示相应的度数，若 $c=60^\circ$，则 $d+e=$____，$x=$____.



4 无理数的判定

我们知道，有理数和无理数统称为实数. 给定一个实数 a，若能证明 a 不是有理数，则它必定是无理数. 要判定一个实数是无理数，只要证明它不是有理数，即只要证明它不能表示为分数就行了.

举一 典型题例

试证：$\sqrt{2}$是无理数.

【思路】 证明一个数是无理数，通常运用反证法，通过否定它是有理数来证得. 反证法的步骤是设$\sqrt{2}$不是无理数，然后由反设出发，推出与公理、定理、定义或题设相矛盾的结果，由此断定反设是错误的，即原命题必定成立.

【详解】 因为 2 不是完全平方数.

所以$\sqrt{2}$不是整数.

若$\sqrt{2}$为有理数，则可表示成$\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$ ①

其中 m、n 是互质的自然数，且 $m>1$.

将①式两边平方，得 $2=\dfrac{n^2}{m^2}$，即 $n^2=2m^2$ ②

由②式知 2 整除 n，所以可设 $n=2t$，代入②式，得$(2t)^2=2m^2$，即 $m^2=2t^2$.

由此又知 2 整除 m，故 2 是 n、m 的公约数，这与 m、n 互质相矛盾. 所以$\sqrt{2}$不是有理数，即$\sqrt{2}$必为无理数.

【诀窍】 用反证法可达到直接证法不能达到的目的，类似地可运用反证法证明$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt{6}$…是无理数.

反三 好题精练

❶ 设$\sqrt{m}$是无理数，a、b 是有理数，$b\neq 0$，试证：$a+b\sqrt{m}$是无理数.

❷ 设 A_1、A_2、B_1、B_2 是有理数，$\sqrt{D}$是无理数，且 $A_1+B_1\sqrt{D}=A_2+B_2\sqrt{D}$，则 $A_1=A_2$，$B_1=B_2$.

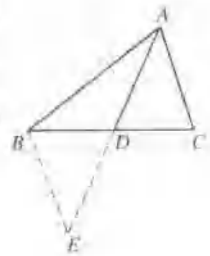
❸ 已知整数 a、b 满足$(2+\sqrt{3})^2=a-b\sqrt{3}$，求$\left(\dfrac{a}{b}\right)^2$的值.

倍长中线法 5

在一些数学问题中，通过延长中线至两倍能有效地将一些"分散"的条件汇聚到同一个三角形中，对解答有关三角形中线问题颇具奇效.

举一 典型题例

如图，已知$\triangle ABC$中，AD是BC边上中线，且$\angle DAC>\angle BAD$，求证：$AB>AC$.



【思路】 $\angle DAC$和$\angle BAD$分散在两个不同三角形中，不易看出它们之间的联系. 若把中线AD加倍，即延长AD到E，使$DE=AD$，连结BE，则显然可证$\triangle BDE\cong\triangle CDA$，于是$\angle E=\angle DAC$，从而把$\angle DAC$和$\angle BAD$汇集于同一个$\triangle ABE$中，由$\angle DAC=\angle E>\angle BAD$得$AB>BE=AC$.

【详解】 延长AD至E，使$DE=AD$，连结BE.

因为$AD=DE$，$\angle ADC=\angle BDE$，$BD=DC$

所以$\triangle BDE\cong\triangle CDA$

所以$\angle E=\angle DAC$

因为$\angle DAC>\angle BAD$

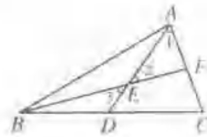
所以$\angle E>\angle BAD$

所以$AB>AC$

【诀窍】 巧用倍长中线法，可以把分散的条件$\angle DAC>\angle BAD$汇聚到同一个$\triangle ABE$中，从而利用"大角对大边"解决问题.

反三 好题精练

❶ 如图(1)，已知在$\triangle ABC$中，AD是中线，E是AD上一点，且$BE=AC$，延长BE交AC于F. 求证：$AF=EF$.

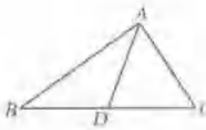


(1)

❷ 如图(2)，在$\triangle ABC$中，$AB=5$，$AC=3$，中线$AD=m$，那么(　　)

A. $m=4$　　　　B. $3<m<5$

C. $2<m<8$　　　　D. $1<m<4$



(2)

❸ 如图(3)，$\triangle ABC$中，周长$AB+BC+AC=2$，试证明：它一定能被一个直径为1的圆盖住.

(3)

6 排序在数学解题中的作用

有些数学题中涉及到多个元素，在解题时若能按照某些关系将它们排序，使它们之间的数量关系明朗化，那么就能给解题带来很大启示和方便.

举一 典型题例

将 2000 拆成 32 个不同的自然数的和，那么，其中最大数减去最小数的差，最小应是多少？

【思路】 先把 2000 写成 32 个连续自然数的和，再用最大数减最小数.

【详解】 设 $2000=a_1+a_2+\cdots+a_{32}$，不失一般性，设 $a_1<a_2<\cdots<a_{32}$，需求的是 $a_{32}-a_1$ 的最小值. 注意到 $a_{32}-a_1$ 最小，必须使 a_1 尽量大，a_{32} 尽量小，这样最好使 a_1、a_2、a_3、…、a_{32} 成为一个连续自然数列.

因为 $2000=16\times125$，即 2000 等于 16 个 125.

而 $125=62+63=61+64=\cdots=48+77=47+78$.

可见 2000 可写成如下 32 个连续自然数的和：47，48，…，60，61，62，63，…，77，78.

这时最大数减去最小数的差为 $78-47=31$.

【诀窍】 把 2000 先分成 16×125，再把 125 分成两个连续自然数的和，通过排序，使问题变得简单.

反三 好题精练

❶ 已知 x_1、x_2、…、x_7 为互不相等的自然数，又 $x_1+x_2+\cdots+x_6+x_7=159$，则最小三个数的和的最大值为多少？

❷ 若 x、y、z 为互不相等的正整数，且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a$，$a$ 为整数，求 x、y、z 的值.

❸ 已知 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边的长，m 是一个正实数，求证：$\frac{a}{m+a}+\frac{b}{m+b}>\frac{c}{m+c}$.

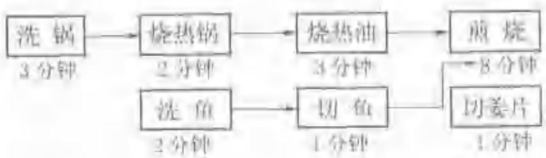
运筹问题 7

生产和生活中许多实际问题，如物资调运、工序控制、规划设计、决胜策略等，要从整体角度出发，选择最优方案，我们把这类问题统称为运筹问题.这里的“运”是运算，“筹”是筹划，“运筹”是制定策略、筹划的意思.

典型题例

妈妈杀好鱼后，小玲帮妈妈烧鱼，烧鱼需七道工序，每道工序所需时间如下：洗鱼 2 分钟，切鱼 1 分钟，切姜片 1 分钟，洗锅 3 分钟，烧热锅 2 分钟，烧热油 3 分钟，煎烧 8 分钟. 小玲估算了一下，完成这些工作需花 20 分钟，你认为烧好这道菜所需最短时间为多少分钟？

【思路】 首先把烧鱼的七道工序按照烧鱼的实际过程，用一幅图表示出来：



从起点到终点共有三条路线，分别把每条路线上的时间累加，所需时间最长的路线称为“关键路线”，关键路线上的时间之和即为所求的最少时间，最少时间为 $3+2+3+8=16$ 分钟.

【详解】 如果整个过程由一个人来操作，可以这样合理安排：先用 3 分钟把锅洗净，然后把锅烧热，再烧热油，在烧热锅和烧热油的同时，做洗鱼、切鱼、切姜片几件事，最后把鱼下锅煎烧. 按以上计划实施，只需 16 分钟就可把鱼煎烧好，这样烧好这道菜的时间最少.

【诀窍】 要使烧鱼时间最短，必须争取减少关键路上各道工序所用的时间. 在具体操作时，为了节省时间，凡能同时进行的工序，应当尽量同时进行.

好题精练

❶ 妈妈让小明给客人烧水沏茶. 洗水壶需用 1 分钟，烧开水需用 15 分钟，洗茶壶需用 1 分钟，洗茶杯需用 1 分钟，拿茶叶需用 2 分钟，小明估算了一下，完成这些工作需花 20 分钟. 为了使客人早点喝上茶，按你认为最合理的安排，多少时间就能沏茶了？

❷ 小兰放学后开始烧饭. 洗锅要 1 分钟，淘米要 2 分钟，烧饭要 10 分钟，洗菜要 3 分钟，烧汤要 15 分钟，炒菜要 5 分钟，她估算完成这些工作要半个小时. 为了能早点吃上饭，你设计一种方案，多长时间，她就能吃上饭了？

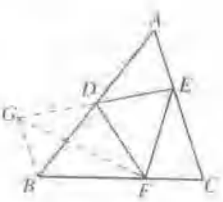
❸ 某同学早上起床后要听 20 分钟新闻，下楼拿牛奶要 5 分钟，煮鸡蛋需 5 分钟，收拾房间需 4 分钟，刷牙、洗脸要 3 分钟，吃饭需 3 分钟. 那么，从他起床到准备上学，至少需多少时间？

8 利用中心对称解决面积问题

如果把一个图形绕着一个点旋转 180°后，它和另一个图形重合，那么称这两个图形关于这个点对称，这个点叫对称中心. 利用中心对称可以解决面积问题.

举一 典型题例

如图，$\triangle ABC$ 中，D 是 AB 的中点，E、F 分别在 AC、BC 上，那么 $S_{\triangle DEF}$ ____ $(S_{\triangle ADE}+S_{\triangle BDF})$.（填表示大小关系的符号）



【思路】 要比较$\triangle DEF$ 与两个三角形$\triangle ADE$、$\triangle BDF$ 面积和的大小，设法把两个三角形$\triangle ADE$、$\triangle BDF$ 集中到一起. 已知 D 是 AB 的中点，A 与 B 关于点 D 对称，只要作出点 E 关于点 D 的对称点 G，$\triangle ADE$ 便全等于$\triangle BDG$ 了.

【详解】 作点 E 关于点 D 的对称点 G，连结 BG、GF.

因为 D 是 AB 的中点，$\angle ADE=\angle BDG$，G、E 关于点 D 对称

所以$\triangle ADE\cong\triangle BDG$

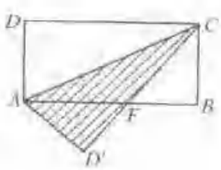
因为四边形 $BFDG$ 为凸四边形，且 $DE=DG$

所以 $S_{\triangle DEF}=S_{\triangle DGF}<S_{四边形BFDG}=S_{\triangle ADE}+S_{\triangle BDF}$

【诀窍】 要比较一个三角形与两个三角形的和之间的关系，运用对称，把两个三角形集中到一起，可使问题变得简单.

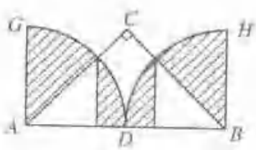
反三 好题精练

❶ 如图(1)，矩形 $ABCD$ 中，$AB=8$，$BC=4$，将矩形沿 AC 折叠，点 D 落在 D' 处，则重叠部分$\triangle AFC$ 的面积为______.



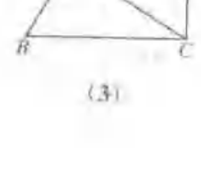
(1)

❷ 如图(2)，$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，D 为 AB 的中点，$AB=2$，扇形 ADG、BDH 的圆心角$\angle DAG$、$\angle DBH$ 都等于 90°，求阴影部分图形的面积.



(2)

❸ 如图(3)，在梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，E 是 AB 的中点，$\triangle DEC$ 的面积为 S，则梯形 $ABCD$ 的面积是________.



(3)

利用旋转求边角 9

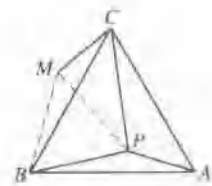
把一个图形绕着一个定点按一定方向旋转一个角度而得到另一个图形，这种变换叫旋转变换，这个定点叫旋转中心. 旋转是几何变换中的基本变换，一般求变换后新图形中的边、角等.

例举一 典型题例

如图，P 是等边三角形 ABC 内一点，$PA=2$，$PB=2\sqrt{3}$，$PC=4$，则$\triangle ABC$ 的边长是____.

【思路】 本题已知三条线段的长，求等边三角形边长. 故可利用旋转变换将三条线段放在同一个三角形中，比较容易求出.

【详解】 将$\triangle BPA$ 绕点 B 逆时针旋转 $60°$，则 BA 与 BC 重合，BP 移到 BM 处，PA 移到 MC 处.



所以 $BM=BP$，$MC=PA$，$\angle PBM=60°$

所以$\triangle BPM$ 是等边三角形

所以 $PM=PB=2\sqrt{3}$

在$\triangle MCP$ 中，$PC=4$，$MC=PA=2$，$PM=2\sqrt{3}$

所以 $PC^2=PM^2+MC^2$，且 $PC=2MC$

所以$\triangle PCM$ 是直角三角形，$\angle MPC=30°$

所以$\angle BPC=\angle BPM+\angle MPC=90°$

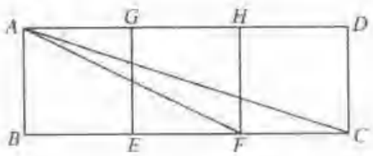
所以 $BC^2=BP^2+PC^2=(2\sqrt{3})^2+4^2=28$

所以 $BC=2\sqrt{7}$

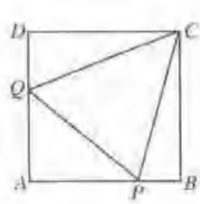
【诀窍】 运用旋转变换，使已知或所求的部分集中到一个基本图形中，能简便解决问题.

反三 好题精练

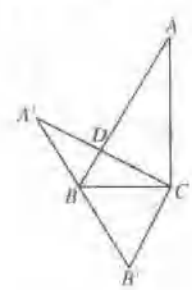
❶ 如图(1)，四边形 $ABEG$、$GEFH$、$HFCD$ 都是相等的正方形，那么$\angle AFB$ 与$\angle ACB$ 的和为____.



(1)



(2)



(3)

❷ 如图(2)，正方形 $ABCD$ 的边长为 1，AB、AD 上各有一点 P、Q. 若$\triangle APQ$ 的周长为 2，求$\angle PCQ$ 的度数.

❸ 如图(3)，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle ABC=66°$，$\triangle ABC$ 以 C 为中心旋转到$\triangle A'B'C$的位置，顶点 B 在斜边 $A'B'$ 上，$A'C$ 与 AB 相交于 D. 求$\angle BDC$.