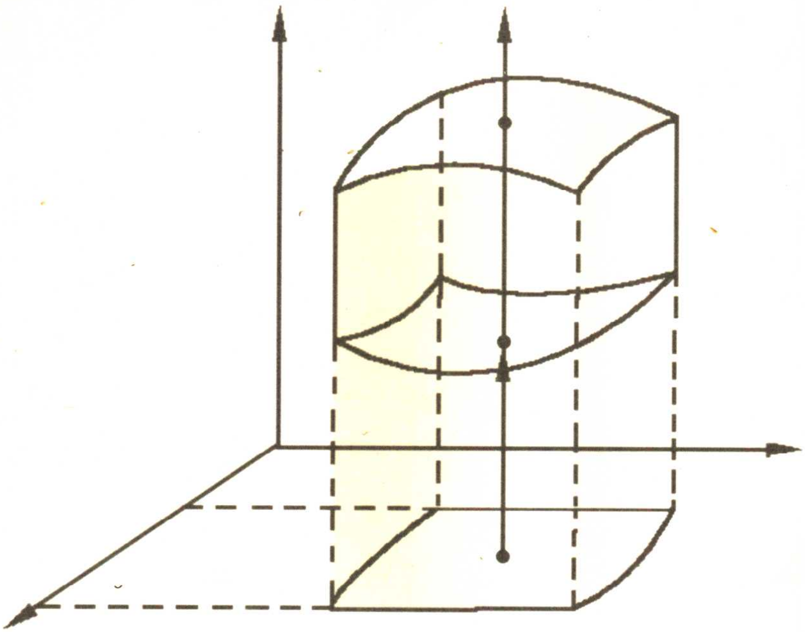
高等数学

（下册）

GAODENGSHUXUE

X I A C E

殷锡鸣 许树声 李红英 王 刚 编著



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

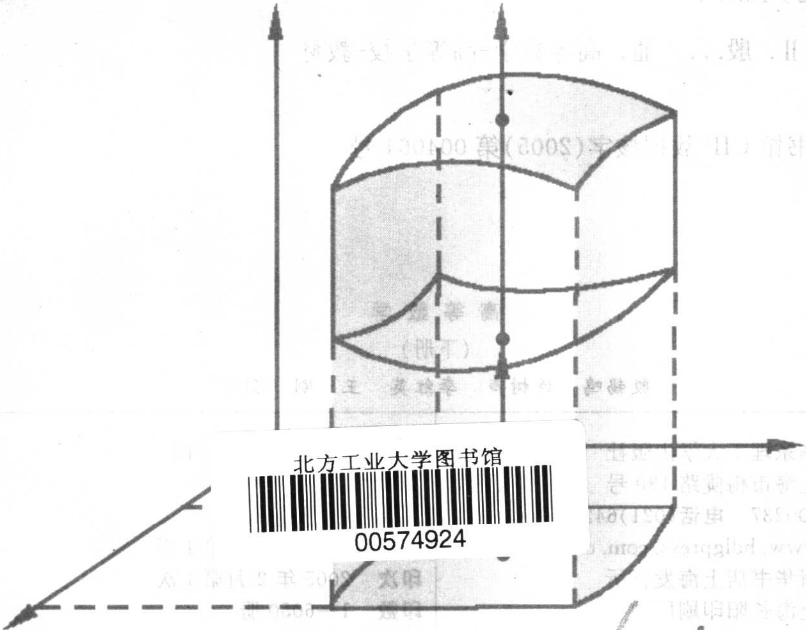
高等数学

（下册）

GAODENGSHUXUE

X I A C E

殷锡鸣　许树声　李红英　王　刚　　编著



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书是按照教育部2004年颁布的“高等数学课程教学基本要求”，并结合华东理工大学原有教材和多年教学改革实践经验编写而成的教材. 全书共15章，分上、下两册出版. 下册介绍微分方程、空间解析几何及多元函数微积分，内容，包括微分方程、向量与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、第一型曲线积分与曲面积分、第二型曲线积分与曲面积分、傅里叶级数. 书中加强了对基本数学概念、基本数学思想和数学方法的阐述，注重于应用数学能力的培养，增加了有关数学模型与数学实验、数学软件应用的内容，力求满足新世纪人才培养的需要. 全书例题丰富，叙述注重几何和物理直观，通俗易懂，并含有丰富的有关微积分发展的历史资料，具有较好的可读性. 全书在节末配有大量的习题，章末配有总习题和有关的数学建模与数学实验的习题.

本书可作为高等院校理工科、经济、管理等各专业高等数学课程的教材，也可作为教师和学生的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下册)/殷锡鸣等编著. —上海：华东理工大学出版社，2005.2

ISBN 7-5628-1655-7

Ⅰ. 高...　Ⅱ. 殷...　Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材
Ⅳ. 013

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第004064号

高 等 数 学

(下册)

殷锡鸣　许树声　李红英　王　刚　编著

出版	华东理工大学出版社	**开本**	787×1092　1/16
社址	上海市梅陇路130号	**印张**	35.75
邮编	200237　**电话**(021)64250306	**字数**	825千字
网址	www.hdlgpress.com.cn	**版次**	2005年2月第1版
发行	新华书店上海发行所	**印次**	2005年2月第1次
印刷	上海长阳印刷厂	**印数**	1—6050册

ISBN 7-5628-1655-7/O·128　　定价：39.00元

序 言

众所周知，作为“高等数学”核心内容的微积分是人类智慧最伟大的成就之一. 它包含着处理连续量的基本理论和众多的科学思维方法，既是学习其他自然科学和工程技术的重要基础，也是培养理性思维的理想载体，是高等学校理工、经管乃至农林、医文等各类专业的最重要的基础课程之一.

“高等数学”课程的建设和改革历来受到各类学校的高度重视. 近年来，随着教学改革的不断深入，大批各具特色、固化教改新成果的教材不断涌现. 本书是华东理工大学近年来“高等数学”课程教学改革成果的结晶.

本书力求体现“学数学是为了用数学”的课程培养目标，将抽象思维与形象思维有机结合. 教材中穿插了数学建模与数学实验，使用数学软件等内容，在加强应用数学能力培养等方面，进行了不少有益的新探索，具有鲜明的特色. 在内容的选取上，理论与应用并重，强调概念的实际背景、理论与方法的形成过程和思维方法的讲解. 在体系的编排处理上也具有一定的新颖性.

数学建模与数学实验已被确认为是培养学生创新意识、提高应用数学能力的行之有效的重要途径. 本书在这方面做了很大的努力. 结合教学内容在每章都安排了数学建模与数学实验方面的内容和习题，并提供了四个研究性的小课题供学生们课外学习和研讨. 这些尝试将会引导与激励学生参与和探索，在培养学生运用数学知识进行研究、创新和解决实际问题的能力方面产生良好的作用.

本书在解决某些数学问题时还引入了数学软件的使用，这为学生适应时代发展需要、掌握现代计算技能提供了发展空间. 书中还穿插了一些有关“高等数学”发展历史等人文知识，丰富了教材的可读性. 本书的出版为“高等数学”改革教材增添了具有特色的新版本. 相信将有助于推动“高等数学”的课程建设与教学改革，为提高“高等数学”课程的教学质量发挥积极的促进作用.

马知恩

2004 年 7 月于西安交通大学

编者的话

进入21世纪以来，随着科学技术的飞速发展、经济竞争的日益激烈，对技术、人才提出了更高的要求.在高素质科技人才的培养过程中，数学教育正日益显示出其独特的、不可替代的重要作用.高等数学是高等院校绝大多数专业的一门重要的基础课程，它为学生学习后继课程，进一步从事工程技术和科学研究提供必要的数学基础.高等数学不仅是一种工具，而且是一种思维模式；不仅是一种知识，而且是一种素养和文化.能否运用高等数学的观念去进行定量的思维，切实解决遇到的实际问题是衡量人才的科学文化素质和数学素质的一个重要标志.

长期以来，我们在高等数学课程的建设方面，开展了以课程体系、教学内容和教材建设为核心的教学改革，取得了不少成果.本教材就是在此基础上，结合原有的谢国瑞教授编写的教材，参照教育部2004年颁布的“高等数学课程教学基本要求”，并融入了我们多年来对这门课程的改革实践和设想而组织编写的.旨在传授数学知识的同时，着力于提高学生的数学素养和能力，培养学生应用数学知识解决实际问题的能力，提高学生学习数学的兴趣，为他们在将来更新知识，科技创新，学习现代数学方法提供必要的数学基础.本书力求在保证教学要求、遵循教学规律的前提下，在教材的体系、选材和编写中突出以下的特点.

1. 贯彻“学数学是为了用数学”的课程培养目标

选材以培养理工科应用型人才为出发点，重视数学思想方法和演绎、归纳素质的培养.对定义、定理及有关理论的介绍，注重它们的几何直观和物理背景，力求阐明问题产生的原由、需要解决的问题以及处理问题的基本思想和过程.当“严格”和“直观”相矛盾时，我们选择直观，不过于追求严格而复杂的数学证明.这样做可以潜移默化地使学生了解数学概念来自于实践，是从具体问题中抽象出来的；了解如何从“直观形象”到“数学抽象”，再经数学演绎和归纳产生“数学结论”后，再回到“直观形象”解决“具体问题”的全过程；从而达到培养学生数学思维能力和运用数学知识能力的目的.

2. 突出问题，突出方法，对内容体系进行重新整合

在原有教材的基础上，我们根据突出问题，突出方法的指导思想，按照问题和方法进行

分类,对课程的内容体系进行了重新的整合. 例如,在以质量计算为背景的积分问题中,根据物体类型以及处理问题的方法把它们分为重积分和第一型曲线积分与曲面积分两部分内容来处理,而将有关向量场在曲线与曲面上的积分(即第二型曲线积分与曲面积分)以及涉及的积分公式和特殊向量场的积分问题放在同一章里一起讨论. 这样安排,既可以突出第二型曲线与曲面积分与其它类型积分之间的区别,又可以突出这类积分本身所具有的一些共性,从而可以帮助读者对格林公式、高斯公式、斯托克斯公式以及曲线积分与路径无关等难点问题进行统一的综合理解. 再如,在本书中适当加强了有关向量场的一些内容的讨论. 特别对向量场的散度和旋度等概念,突出了对它们的实际背景的描述. 通过这样的处理,力求进一步加深学生对格林公式,高斯公式和斯托克斯公式以及对通量、环量等量的理解,并且能更好地反映出这些概念和公式的背景以及运用数学语言描述客观现象的思想和方法. 在例题的选择上力求全面、典型,在论述的方式上做到通俗易懂,突出对问题难点的分析以及解决问题的思想方法的阐述. 我们还增加了多元函数微分学在经济学中的应用,差分方程等内容,这部分内容主要是为经济类和工商管理类专业的学生编写的,其他专业的学生可选读.

3. 突出数学模型的思想和方法

数学模型几乎是一切应用科学的基础,数学建模和与之相关的计算正在成为科学研究和工程设计的关键工具. 我们在这方面作了较大的探索:除了在例题中引入大量的实际应用问题之外,我们还在大部分篇章中安排了与该章内容相关的数学模型的内容和习题. 在书中另外还安排了"小课题研讨",供有兴趣的学生学习或课堂研讨. 我们认为在高等数学的早期学习中,渗透数学建模的思想和方法是极为重要的,它不仅能培养学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力,而且能提高学生学习高等数学以及掌握更多数学知识的兴趣和积极性. 可以说,具备良好的数学建模能力是未来高素质创新人才的必备条件.

4. 引入数学实验和数学软件的运用

与数学模型紧密相连的就是数学实验和数学软件的运用. 长期以来人们总认为数学是不需要做实验的,数学就是凭脑袋、纸和笔进行推理、证明和计算. 但是随着计算机和数学软件的发展,数学软件已经成为科学研究的一种基本工具. 因此对未来的高素质人才来讲,具备良好的运用数学软件的能力对他们将来的发展是非常重要的. 我们在本书中介绍了 Mathematica 数学软件的使用,并在许多章节都安排了运用这一数学软件进行计算的内容和习题,以提高学生对数学实验的认识和运用数学软件的能力.

5. 例题较多、习题丰富,拓展学生的自学空间

本书选编了较多的例题,给使用本教材的教师提供了较大的选择余地,也为使用本教材的学生拓展了自学空间. 每节末配备了大量习题,每章末配备了总习题. 为了满足各专业不

同层次的教学要求,我们把习题进行了分层安排:习题(A)适合于一般要求的学生使用,习题(B)适合于有较高要求的学生使用,而每章末的总习题适合于考研要求的学生使用.

6. 高等数学发展历史的介绍

在本书中,还穿插了一些有关高等数学发展历史等人文知识的内容,我们希望这些资料可进一步丰富教材的可读性和文化氛围.

这里还需要说明,本书中打 * 号的内容不属于高等数学的教学要求,只供对数学有兴趣的学生课外学习和教师组织课外活动使用.其中"小课题研讨"中的练习题答案没有给出,因为它不是惟一的.

本书由华东理工大学组织编写.全书共分 15 章,分上下两册出版,其中下册的第 9 章由王刚、殷锡鸣编写,第 10 章由龚成通编写,第 11 章由许树声编写,第 12 章由龚成通、殷锡鸣编写,第 13 章、第 14 章由殷锡鸣编写,第 15 章由王刚、龚成通编写,李红英编写了每一章的数学模型与数学实验内容,殷锡鸣、龚成通对全书进行了统稿,最后由殷锡鸣定稿.

在这里我们要特别感谢编写组顾问龚成通教授,他在退休之后,不辞辛劳,积极地和我们共同策划并参加了本书的编写.同时我们还要特别感谢王宗尧教授、谢国瑞教授,由于他们的积极支持和杰出工作为本书的编写提供了良好的基础和条件.

本书是教研室全体高等数学任课教师教改实践和教学研究的共同成果.参加过教材建设立项及编写工作研讨活动的有陈秀华、曹宵临、蒲思立、江志松、苏纯洁、宋洁、刘朝晖、方民、黄文亮、唐雪芬、张明尧、李继根等教师,他们为本书的编写工作提供了许多宝贵的意见和有用的素材,在此向他们表示衷心的感谢.

还要感谢华东理工大学理学院领导鲁习文教授和教务处领导刘百祥同志,是他们的大力支持和关心,使本书得以顺利编写出版.

最后要特别感谢原全国工科数学课程教学指导委员会主任马知恩教授,感谢他对本书的编写提出的许多具体的修改意见及为本书作序.

由于编写者水平有限,书中难免留存错、漏和不妥之处,敬祈专家、读者予以指正.

编 者

2004.12

目录

9 微分方程

10 向量与空间解析几何

11　多元函数微分学

12 重积分

13 第一型曲线积分与曲面积分

15 傅里叶级数

附录Ⅰ 行列式与线性方程组

附录Ⅱ 习题参考答案 …… 541

9 微分方程

从前面几章的讨论中已经看到,微积分是研究函数的有力工具.然而,在应用微积分解决实际问题时,首先需要确定微积分研究的对象——函数.在科学研究和工程实践中,人们常常通过以下两条途径建立函数关系:

(1) 经科学实验获得实验数据,对实验数据进行数学处理(例如寻求对数据具有较好逼近的简单函数等方法)获得量与量之间的对应关系.

(2) 建立函数满足的数学模型,这些数学模型通常是各种各样的函数方程,而微分方程就是其中最重要的函数方程之一,通过求解数学模型(方程)获得函数关系.

建立数学模型,求解微分方程是人类认识客观世界的一个重要手段.在解微分方程中出现的问题已经成为微积分以及其他一些数学分支发展的重要的源泉,尤其是近 50 年来,微分方程越来越多地出现在工程,生物学,经济学以及社会科学的许多领域之中.

本章主要介绍微分方程的基本概念,几种常见的微分方程的解法,一些微分方程的应用以及差分方程.

9.1 微分方程的基本概念

9.1.1 定义

为了引进微分方程的一些基本概念,我们先看两个实例.

例 1 已知一曲线通过点(1, 2),且该曲线上任意一点 $M(x, y)$处的切线斜率为 $3x^2$,求此曲线方程.

解 设所求曲线方程为 $y = y(x)$,则由导数的几何意义可知,未知函数 $y = y(x)$ 应满足关系式

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2. \tag{9-1}$$

又因曲线 $y = y(x)$ 经过点(1, 2),于是 $y(x)$还满足

$$y(1)=2. \tag{9-2}$$

所以未知函数 $y=y(x)$ 是以下数学问题的解

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2,\\ y(1)=2.\end{cases}$$

将微分式(9-1)两边进行积分,得

$$y=\int 3x^2\,\mathrm{d}x=x^3+C, \tag{9-3}$$

其中 C 是任意常数. 在上式中令 $x=1$,根据条件 $y(1)=2$ 有 $2=1+C$,可知 $C=1$. 因此所求曲线方程为

$$y=x^3+1. \tag{9-4}$$

例 2 一列车在直线轨道上以 20 m/s 的速度行驶,当制动时,列车获得的加速度是 $-0.4\ \mathrm{m/s^2}$. 试问制动后,列车行驶了多少时间才停住? 又问列车在这段时间内行驶了多少距离?

解 设列车在制动后的 t s 时间内行驶了 $s=s(t)$m. 则根据导数的物理意义,路程函数 $s(t)$应满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-0.4. \tag{9-5}$$

由于 $s(0)=0$, $v(0)=s'(0)=20$. 所以路程函数 $s(t)$是下面问题的解

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-0.4,\\ s(0)=0,\ s'(0)=20.\end{cases} \tag{9-6}$$

将方程式(9-5)两边进行积分,得

$$s'(t)=-0.4t+C_1.$$

再将上式积分一次,有

$$s(t)=\int(-0.4t+C_1)\mathrm{d}t=-0.2t^2+C_1t+C_2, \tag{9-7}$$

其中 C_1, C_2 为任意常数. 注意到 $s(t)$满足条件 $s(0)=0$, $s'(0)=20$,即有

$$20=0+C_1,\ 0=C_2,$$

可知 $C_1=20$, $C_2=0$. 因此所求路程函数 $s=s(t)$ 为

$$s=-0.2t^2+20t. \tag{9-8}$$

设列车制动后停住所花费的时间为 T,则有 $s'(T)=0$,即 $-0.4T+20=0$,可知

$$T = \frac{20}{0.4} = 50(\mathrm{s}).$$

将 $T = 50$ 代入路程函数式(9-8),就得列车在制动后行驶的路程为

$$s = s(50) = 500(\mathrm{m}).$$

从以上两例的求解过程可知,曲线 $y = y(x)$ 和路程函数 $s = s(t)$ 分别是满足方程(9-1)和(9-5)的函数,而方程式(9-1)和(9-5)中都含有未知函数的导数,这种方程我们把它称为微分方程.

定义　含有未知函数及其导数的等式称为微分方程.

如果微分方程中的未知函数是一元函数,就称此方程为**常微分方程**;如果微分方程中的未知函数是多元函数,就称此方程为**偏微分方程**.

在本书中,我们仅讨论常微分方程,为方便起见,我们把常微分方程就简称为微分方程.

根据定义可知,方程(9-1)和(9-5)都是微分方程.由于它们中出现的未知函数导数的阶数不同,式(9-1)中出现未知函数的一阶导数 $y'(x)$,而式(9-5)中出现未知函数的二阶导数 $s''(t)$,为了区分,我们给出微分方程阶的概念.

定义　在一个微分方程中,出现的未知函数导数的最高阶数,称为微分方程的阶.

于是可知,方程(9-1)是一阶微分方程,方程(9-5)是二阶微分方程,而方程

$$y^{(4)} - 10y''' + 25y'' = 0 \tag{9-9}$$

则是四阶微分方程.

定义　若用一个函数及其导数代入微分方程中的未知函数及其各阶导数之后,能使方程成为恒等式,则称此函数为微分方程的解(或积分).

按此定义,式(9-4)表示的函数是方程(9-1)的解,而式(9-7)和(9-8)所表示的函数是方程(9-5)的解.容易验证,函数

$$y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x)\mathrm{e}^{5x}, \tag{9-10}$$

$$y = (1 + 2x)\mathrm{e}^{5x} \tag{9-11}$$

都是方程(9-9)的解.很明显,方程(9-5)的解(9-7)和(9-8)是有区别的,解(9-8)只表示方程(9-5)的一个解,而解(9-7)表示了方程(9-5)的一族解(解中含两个独立的任意常数 C_1 和 C_2),而解(9-10)和(9-11)的情况也是如此.为了区分,我们引入微分方程的特解和通解的概念.

定义　若微分方程的解中含有一些独立的任意常数,当这种常数的个数与方程的阶数相同时,就称此解为微分方程的通解(或通积分).而称微分方程的不含任意常数的解为微分方程的特解.

于是可知,由式(9-4)、(9-8)和(9-11)表示的函数 $y = x^3 + 1$, $s = -0.2t^2 + 20t$, $y = (1 + 2x)\mathrm{e}^{5x}$ 分别是微分方程

$$y' = 3x^2,\ s''(t) = -0.4,\ y^{(4)} - 10y''' + 25y'' = 0$$

的特解，而由式(9-3)、(9-7)和(9-10)表示的函数 $y = x^3 + C$, $s = -0.2t^2 + C_1 t + C_2$, $y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x)e^{5x}$ 分别是上述对应微分方程的通解.

同时还可进一步看到，方程 $y' = 3x^2$ 的特解 $y = x^3 + 1$ 是通过让其通解 $y = x^3 + C$(含有一个任意常数)满足一个附加条件 $y(1) = 2$ 求得的，而方程 $s''(t) = -0.4$ 的特解 $s = -0.2t^2 + 20t$ 是根据它的通解 $s = -0.2t^2 + C_1 t + C_2$(含有两个独立的任意常数)满足两个附加条件 $s(0) = 0$, $s'(0) = 20$ 确定的. 我们把用来确定通解中任意常数取值，从而得到特解的条件称为**定解条件**. 当自变量取某个值时，给出未知函数及其导数的相应值的条件称为**初始条件**. 例如，在例 1 中 $y(1) = 2$ 是方程 $y' = 3x^2$ 的初始条件；在例 2 中 $s(0) = 0$, $s'(0) = 20$ 是二阶方程 $s''(t) = -0.4$ 的初始条件. 可见初始条件是描述所讨论现象或过程的历史(初始)状况的. 一般地，因为 n 阶微分方程

$$y^{(n)} = f(x, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}) \tag{9-12}$$

的通解中含有 n 个独立的任意常数，故需要有 n 个(一组)定解条件. 于是 n 阶微分方程的初始条件为

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \tag{9-13}$$

其中 $y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}$ 为 n 个给定的常数. 而将方程(9-12)与初始条件(9-13)一起构成的定解问题

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y', \cdots, y^{(n-1)}), \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

称为**初值问题[或柯西(Canchy)问题]**.

由此可知，例 1 中的所求曲线 $y = y(x)$ 和例 2 中的路程函数 $s = s(t)$ 都是初值问题的解.

除了初值问题之外，还有其他类型的定解问题. 用以说明方程中未知函数在边界上约束情况的条件(通常是等式)称为微分方程的**边界条件**. 相应地由微分方程和边界条件一起构成的问题称为**边值问题**，而由微分方程与初始条件、边界条件一起构成的问题称为**混合问题**. 在本书中，一般仅讨论初值问题.

微分方程解的图形称为它的**积分曲线**，通解的几何图形是由一族曲线构成的积分曲线族，而特解的几何图形是积分曲线族中的一条特定的积分曲线.

例 3 验证函数 $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x}$($C_1$, C_2 为任意常数)为微分方程

$$y'' + 2y' - 3y = 0 \tag{9-14}$$

的通解，并求初值问题

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 0, \\ y(0) = 4,\ y'(0) = 0 \end{cases} \tag{9-15}$$

的解.