科学版

研究生教学丛书

应用随机过程

（第二版）

刘嘉焜　王公恕　编著

科学出版社
www.sciencep.com

科学版研究生教学丛书

应用随机过程

（第二版）

刘嘉焜　王公恕　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

在本书第一版中，作者重视理论的实际背景和应用的写作风格，使许多工作在不同领域的读者能够比较容易地掌握这个困难的数学领域，因而受到欢迎.

在本书第二版中，作者继续发扬这一写作风格，并增加了一些内容，如吸收 Markov 链，随机微分方程在金融工程中的应用和时间序列分析等，其中包括了作者本人的研究成果. 本书主要内容包括随机过程的基本概念、马氏过程、随机分析与随机微分方程、平稳过程等.

本书读者对象为高等院校工程各专业以及数学、物理、化学、生物工程、信息管理、经济和金融等专业的研究生、教师、大学高年级学生，以及科技工作者.

图书在版编目（CIP）数据

应用随机过程/刘嘉焜，王公恕 编著. -2 版 — 北京：科学出版社，2004

(科学版研究生教学丛书)

ISBN 7-03-013006-5

I.应… II.①刘… ②王… III.随机过程 - 研究生 - 教学参考资料 IV.O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 021765 号

责任编辑：林 鹏 李鹏奇 / 责任校对：柏连海

责任印制：安春生 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码 100717

http //www sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2000年3月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2004年7月第 二 版 印张：23

2004年7月第四次印刷 字数：435 000

印数：7 001—10 000

定价：35.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

第二版序言

本书第一版问世 4 年来, 随机过程方法在科学和工程的诸多领域的应用都取得了很好的成果. 作为以非数学专业读者为对象的教材, 重视数学概念的直观背景和理论的实际应用方法的叙述风格, 得到了很多使用本书的教师和同学们的认同. 按照很多读者的建议, 在这一版中我们适当地增加了一些内容, 如吸收 Markov 链、随机微分方程在金融工程中的应用及时间序列分析等内容, 并增加了一些实际应用的例题, 在参考文献中增加了一些最近的应用成果, 在叙述上增加了一些理论的直观解释. 希望这些内容能使读者进一步加深对随机过程理论的理解, 并有利于提高读者应用随机过程方法解决实际问题的能力.

本书这一版中很多内容是王公恕教授提供的, 这为本书增色不少, 作者感谢他并同意和他一起完成新版的工作. 丁春蕾、柳湘月、吴文清改正了第一版中的一些错误并提出了不少好的建议. 本版中也包含他们的部分工作. 还有很多读者提出了有益的建议, 这里就不一一致谢了.

由于作者水平有限, 书中的疵谬在所难免, 希望读者惠于赐教.

刘嘉焜

2003 年 12 月于天津

第一版前言

在当代任何学科的研究中，无论是自然科学还是社会科学，定性的与经验的理论被定量的与数学的理论所代替或补充已成为重要的方向之一. 而其中一种主要方法是建立函数满足的一类方程或方程组来描述现实过程的一种假设的、可以产生一组理论结果的机制或模型. 在构造数学模型时，按照所用的假设机制或模型的因果性质可分为确定性与随机性的两类.

随机过程论是研究随机现象的数量规律性的数学理论分支，是构造随机模型的基础理论之一. 自从人们发现实际中几乎一切可察现象都具有随机性以后，随机过程的方法已经广泛地应用于科学与工程技术的所有领域了.

本书是为非数学专业的读者们编写的，可供自然科学、工程技术、经济管理各专业高年级学生、研究生及有关的实际工作者学习或参考. 内容包括随机过程的基本概念、Markov 过程、平稳过程和随机分析与随机微分方程的初步介绍. 在叙述时注意从数学概念的直观背景、形式逻辑的推导及实际应用三个方面去讨论. 了解数学概念的直观意义有助于深入掌握概念的本质，它常常是理论的先导，并为逻辑推演提供思路和方法.

本书有较多的实际问题的例子，较详细地介绍了构造随机模型的方法，以利于读者自学，有助于提高解决实际问题的能力. 除第一章预备知识外，每章后面附有习题，完成这些习题是学习的重要环节.

本书定义、命题和例子统一编号. 命题 2.3.4 表示第二章第三节的第四个命题，公式 (3.1.20) 表示第三章第一节的第 20 个公式.

这里作者特别感谢天津大学研究生院培养处的各位同仁，他们鼓励并帮助作者完成了这本书. 作者还要感谢科学出版社林鹏副总编，他对本书的出版给予了很大的支持与帮助. 本书曾在天津大学及其他一些院校作为教材为应用数学专业及其他专业的研究生讲授多次. 很多学生提出了有益的建议，其中吕泽林、李虹霖、周聿飞等人改正了书稿中的一些错误并打印了全书. 没有他们的帮助，本书的出版也是不可能的.

由于作者水平有限，难免有疏漏与错误，不当之处请读者指正.

作　者

1999 年 9 月于天津大学

目 录

第一章　预备知识

§1.1　概率空间

概率论中的一个基本概念是随机试验，它是指其结果不能事先确定且在相同条件下可以重复进行的那种试验. 注意区别这里的试验与物理、化学中的实验. 以后就简称随机试验为试验. 一个试验所有可能结果的全体称为样本空间，记为 Ω，试验的一个结果称为样本点，记为 ω，即 $\Omega = \{\omega\text{全体}\}$.

样本空间的一个子集称为随机事件，简称事件. 说事件 A 发生，当且仅当 A 中的一个样本点发生. 事件的运算与集合论中集合的运算是一致的. 例如两个事件 A, B 至少有一个发生也是事件，称为事件 A 与事件 B 的并，记作 $A \cup B$；A 不发生是事件 A 的对立事件记作 $\bar{A}$，分别对应于 A 与 B 的并集与集合 A 的余集. 根据实际情况，我们并不总是有兴趣研究 Ω 的一切子集（事件），而仅对 Ω 中的某些事件类感兴趣. 于是我们得到事件域的概念. 如果 $\mathcal{F}$ 是 Ω 中某些事件的集，它满足：

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$；

(ii) 若 $A \in \mathcal{F}$，则 $\bar{A} \in \mathcal{F}$；

(iii) 若 $A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \cdots$，则 $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$，

就称 $\mathcal{F}$ 为事件域. 以下论及的事件都是指某一事件域中的.

对 $\mathcal{F}$ 中每一事件 A，都有一个实数 $P(A)$ 与之对应，它满足：

(i) $0 \le P(A) \le 1$；

(ii) $P(\Omega) = 1$；

(iii) 若 $A_i \cap A_j = \emptyset, i \ne j, i, j = 1, 2, \cdots$，则 $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

我们称 $P(A)$ 为事件 A 的概率. 关于 P 的公理 (i), (ii), (iii) 有以下推论：

推论 1.1.1　若 $E \subset F$，则 $P(E) \le P(F)$.

推论 1.1.2　$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$.

推论 1.1.3　若 $E_i \cap E_j = \emptyset, i \ne j$，则 $P(\cup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$.

推论 1.1.4　$P(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$.

三元总体 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 称为概率空间. 事件域的引进使我们的模型有更大的灵活性. 在实际问题中可根据问题的性质选定 $\mathcal{F}$，比如 Ω 为有穷集或为可列集时，一般选 $\mathcal{F}$ 为 Ω 一切子集组成的集合；在几何概率问题中选 $\mathcal{F}$ 为 Lebesgue 可测集. 以

下如不预先说明, 所有的事件都是指某一 $\mathcal{F}$ 中的事件.

$P(\cdot)$ 为以 $\mathcal{F}$ 为定义域的集函数.P 的一个重要性质是连续性, 为描述 P 的连续性, 我们引进极限事件的概念. 一列事件$A_n, n \geq 1$称为递增的事件列, 如果 $A_n \subset A_{n+1}, n \geq 1$; 称为递减的事件列, 如果 $A_n \supset A_{n+1}, n \geq 1$. 如果 $\{E_n, n \geq 1\}$ 是一递增（减）的事件列, 我们称 $\cup_{i=1}^{\infty} E_i (\cap_{i=1}^{\infty} E_i)$ 为极限事件, 记为 $\lim_{n\to\infty} E_n$, 即 $\lim_{n\to\infty} E_n = \cup_{i=1}^{\infty} E_i (\cap_{i=1}^{\infty} E_i)$, 这里 $E_n \subset E_{n+1} (E_n \supset E_{n+1}), n \geq 1$. 对满足 (i), (ii), (iii) 的 P, 我们有

命题 1.1.5 (P 的连续性)　若 $\{E_n, n \geq 1\}$ 是递增或递减的事件列, 则

$$\lim_{n\to\infty} P(E_n) = P(\lim_{n\to\infty} E_n).$$

证明　先假设 $\{E_n, n \geq 1\}$ 是递增的事件列. 定义事件 $F_n, n \geq 1$, $F_1 = E_1, F_n = E_n\overline{(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i)} = E_n\overline{E_{n-1}}, n > 1$, 显然有 $F_iF_j = \emptyset, i \neq j$ 且对 $n \geq 1$ 有 $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, 故

$$\begin{aligned}
P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) &= P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(F_i) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) = \lim_{n\to\infty} P(E_n).
\end{aligned}$$

若 $\{E_n, n \geq 1\}$ 是递减的, 那么 $\{\overline{E_n}, n \geq 1\}$ 是递增的, 由上面证明有

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{E_i}\Big) = \lim_{n\to\infty} P(\overline{E_n}).$$

由 De Morgan 定律以及推论 1.1.2, 上式成为

$$P\Big(\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i}\Big) = \lim_{n\to\infty} P(\overline{E_n}),$$

即

$$1 - P\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \lim_{n\to\infty} [1 - P(E_n)],$$

或

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \lim_{n\to\infty} P(E_n).$$ ∎

例 1.1.6 考虑生物群体模型.

某个群体由同类个体组成, 每个个体可产生同类的后代. 设开始的个体数目为 X_0, 即第 0 代个体的个数是 X_0, 第 0 代的后代是第 1 代, 其个数为 X_1. 一般地, 第 n 代的个数记为 $X_n, n=1,2,\cdots$.

由于 X_n=0 蕴涵 X_{n+1}=0, 故 $\{X_n$=0$\}$是递增的事件列, 所以极限 $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 0)$ 必然存在. 这一极限表示什么呢? 由命题 1.1.5,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P(X_n=0) &= P(\lim_{n\to\infty}\{X_n=0\})\\ &= P\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty}(X_n=0)\Big)\\ &= P(\text{群体终于灭绝}),\end{aligned}$$

即这一极限表示群体终于灭绝的概率.

对任一事件列 $\{E_n, n\geq 1\}$, "无穷多个 E_n 出现" 也是一个事件, 称为上极限事件, 记作 $\overline{\lim}_{n\to\infty}E_n$ 或 $\limsup_{n\to\infty} E_n$; "至多只有有穷多个 E_n 不出现" 或者 "几乎一切 E_n 都出现" 也是一个事件, 称为下极限事件, 记作 $\underline{\lim}_{n\to\infty}E_n$ 或 $\liminf_{n\to\infty} E_n$. 我们有

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k,$$

$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k.$$

事实上, 若无穷多个 E_k 出现, 那么对任意一个 n, $\cup_{k=n}^{\infty}E_k$ 都出现, 也就是说 $\cap_{n=1}^{\infty}\cup_{k=n}^{\infty} E_k$ 出现, 即 $\limsup_{n\to\infty} E_n \subset \cap_{n=1}^{\infty}\cup_{k=n}^{\infty}E_k$; 反之, 若 $\cap_{n=1}^{\infty}\cup_{k=n}^{\infty} E_k$ 出现, 那么对每一个 $n, \cup_{k=n}^{\infty}E_k$ 都出现, 这样对每一个 n, 至少有一个 $E_k, k\geq n$ 出现, 亦即有无穷多个 E_k 出现, 即 $\limsup_{n\to\infty} E_n \supset \cap_{n=1}^{\infty}\cup_{k=n}^{\infty}E_k$. 第二个式子的证明完全类似.

命题 1.1.7 (Borel–Cantelli引理) 设 $E_1, E_2, \cdots$ 为一列事件, 若 $\sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) < \infty$, 则

$$P(\limsup_{n\to\infty} E_n) = 0.$$

证明 容易看出 $\cup_{k=n}^{\infty} E_k, n \geq 1$, 是一列递减的事件, 由命题 (1.1.5) 可知

$$\begin{aligned} P(\limsup_{n\to\infty} E_n) &= P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\Big) \\ &= P\Big(\lim_{n\to\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\Big) \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P(E_k) \\ &= 0, \end{aligned}$$

不等式由推论 1.1.4 得出, 最后一个等号是根据 $\sum_{k=1}^{\infty} P(E_k) < \infty$. ∎

例 1.1.8 设 $P(A_n) = \dfrac{1}{n^2}, P(\overline{A_n}) = 1 - \dfrac{1}{n^2}, n \geq 1$, 故, $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$. 由命题 1.1.7, $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$. 这是说有无穷多个 A_n 出现是不可能的（概率为 0）. 换言之, 只有有穷多个 A_n 出现是必然的（概率为 1）. 这就是说

$$P(\liminf_{n\to\infty} \overline{A}_n) = 1.$$

注意，我们用直观的语言描述一个数学表达式是为了使读者容易掌握数学表达式的含义，提高使用数学符号的能力. 但直观的描述有时是不严格的. 比如必然事件的概率为 1，而概率为 1 的事件不一定是必然事件. 相信读者可以从上下文区分它们而不致引起混淆.

命题 1.1.9(Borel-Cantelli引理的逆) 若 $E_1, E_2, \cdots$ 是一列相互独立的事件, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \infty$, 则

$$P(\limsup_{n\to\infty} E_n) = 1.$$

证明

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\Big) &= P\Big(\lim_{n\to\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\Big) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_i\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty}\Big[1 - P\Big(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{E_k}\Big)\Big], \end{aligned}$$

但由独立性,

$$\begin{aligned}P\Big(\bigcap_{k=n}^{\infty}\overline{E_k}\Big) &= \prod_{i=n}^{\infty}P(\overline{E_i})=\prod_{i=n}^{\infty}(1-P(E_i))\\ &\le \prod_{i=n}^{\infty}\mathrm{e}^{-P(E_i)}=\exp\left\{-\sum_{i=n}^{\infty}P(E_i)\right\}=0,\end{aligned}$$

不等号是由于 $1-x\le \mathrm{e}^{-x}$, 最后一个等号是因为对任意 $n,\sum_{i=n}^{\infty}P(E_i)=\infty$. ∎

例 1.1.10 设 $X_1,X_2,\cdots$ 是一列相互独立的随机变量, 对 $n\ge 1$,

$$P(X_n=0)=\frac{1}{n},\quad P(X_n=1)=1-\frac{1}{n},$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}P(X_n=0)=\infty$, 由命题 1.1.9, 有无穷多个 n 使 $X_n=0$ 是必然的. 同样 $\sum_{n=0}^{\infty}P(X_n=1)=\infty$, 可以推知也有无穷多个 n 使 $X_n=1$ 是必然的. 因此, 以概率 1, $\lim_{n\to\infty}X_n$ 不存在.

例 1.1.11 顾客随机地到达服务台接受服务. 设 A_k 表示在时间 $(0,t)$ 间隔内到达 k 个顾客的事件, 条件 $\sum_{k=0}^{\infty}P(A_k)=1$, 由命题 1.1.7 可推出 $P(\limsup_{n\to\infty}A_n)=0$, 亦即无穷多个 A_k 出现的概率是 0. 换言之, 表示在 $(0,t)$ 的时间间隔内以概率 1 只有有穷多个顾客到达.

例 1.1.12 统计物理：在研究由大量同一性质 "质点" 所构成的具有能量 E 的物理体系的平衡状态时, 我们假定能级 e_1 有 g_1 个微观状态, 能级 e_2 有 g_2 个微观状态, ……, 每一质点处于这些状态之一. 所谓宏观状态, 可由处于各个能级的质点个数来刻画：v_1 个质点处于能级 e_1, v_2 个质点处于能级 $e_2,\cdots$. 设 N 是质点总数. 一个宏观状态就是 $v_1=n_1,v_2=n_2,\cdots$, 这里 $\sum_i n_i=N,\sum_i n_ie_i=E$. 对于很大的 N, 宏观体系平衡状态指的是可能性最大的状态. 我们要计算 n_i 个质点分配到能级 e_i 的 g_i 个状态去的概率, $i=1,2,\cdots$. 特别地求 g_i 个状态中预先指定的 n_i 个状态中各出现一个质点的概率, $n_i\le g_i$.

解 1 (Maxwell-Boltzman) 假定 n_i 个质点可以分辨, 处于每个状态的质点个数是任意的. 这时的样本空间共含有 $g_i^{n_i}$ 个不同的样本点, 因每个质点可以分辨, 所以所求概率为 $p=\dfrac{n_i!}{g_i^{n_i}}$. 这一模型是研究气体的古典理论时提出的. 现代物理表明, 目前已知的基本粒子都不适用于这一模型.

解 2 (Bose-Einstein) 假定 n_i 个质点是不可分辨的, 处于每个状态的质点个数是任意的. g_i 个状态看作 g_i 个小盒, 可以由 g_i-1 个壁 "|" 分开. 用 $*$ 表示质点, 则 $|**|||*|*|$ 表示 $n_i=4$ 个质点分在 $g_i=7$ 个盒中的一种情况. 所有情况的总数

是 n_i 个质点与 g_i-1 个"|"共 n_i+g_i-1 个位置中选 n_i 个位置放 $*$ 的所有可能数, 即 $\binom{n_i+g_i-1}{n_i}$. 故 $p=\left[\binom{n_i+g_i-1}{n_i}\right]^{-1}$. 近代物理已经证明这一模型适用于光子、介子、核子等粒子. 这一模型是 1924 年 Bose 与 Einstein 提出的, 适合称为 Bose 子的基本粒子.

解 3 (Fermi-Dirac) 假定 n_i 个质点不可分辨. 但每个状态只能有一个质点. 此时 $p=\left[\binom{g_i}{n_i}\right]^{-1}$. 这一模型适用于电子、中子和质子, 是 Fermi-Dirac 在 1925 年提出的, 适用于所谓 Fermi 子的粒子.

§1.2 随机变量

给定概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$, 随机变量 $X(\omega)$ 是对 $\omega\in\Omega$ 赋与一个实数值的函数, 它满足条件: 对任一实数 a, $\{\omega: X(\omega)\le a\}\in\mathcal{F}$.

另一个定义是: 随机变量 $X(\omega)$ 是 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到可测空间 $(R,\mathcal{B})$ 的可测映射. 这里 $\mathcal{B}$ 是一维 Borel 集类, 或者说, 对一切 $A\in\mathcal{B}$ 有 $\{\omega: X(\omega)\in A\}\in\mathcal{F}$, 我们常常将 ω 略去不写.

对 $A\in\mathcal{B}$, 我们称 $P(X\in A)=P(X^{-1}(A))$ 为随机变量 X 的分布, 它表示随机变量 X 取值于 A 中的概率. 它刻画了该随机变量的全部概率性态, 常记为 $F_X(A)=P(X\in A)$.

随机变量 X 的分布函数 $F_X(x)$ 定义为: 对任意实数 x,

$$F_X(x)=P(X\le x).$$

我们常常略去下脚的 X 直接写 $F(A), F(x)$. 随机变量 X 的分布函数具有性质:
(i) 单调不减; (ii) 右连续; (iii)$F(-\infty)=0$; (iv)$F(+\infty)=1$.

反之, 我们有下面的命题:

命题 1.2.1 设 $F(x), x\in R$ 是单调不减、右连续的函数, 且有 $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$, 则必存在概率空间及其上的一个随机变量 ξ, 使 $F_\xi(x)=F(x)$.

证明 考虑可测空间 $(R,\mathcal{B})$, 令

$$P\{(a,b]\}=F(b)-F(a),$$

其中 $a,b\in R$, $a\le b$. 由测度扩张定理, 知 P 可以扩张为 $\mathcal{B}$ 上的概率测度. 于是我们得到概率空间 $(R,\mathcal{B},P)$. 定义随机变量 $\xi(\omega)=\omega, \omega\in R$, 则 $F(x)$ 就是 ξ 的分布函数. ∎

若随机变量 X 的可能值的全体是至多可数的, 就称 X 是离散型随机变量. 对离散型随机变量 X,

$$F(x)=\sum_{y\le x}P(X=y).$$

若对随机变量 X 存在一个函数 $f(x)$, 使得 X 的分布函数可表示为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x,$$

就称 X 是连续型随机变量. $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数, 或简称密度. 对连续型随机变量 X,

$$P\{X\in B\}=\int_B f(x)\mathrm{d}x,\quad B\in\mathcal{B},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)=f(x).$$

概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上有 n 个随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$, 则 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为 n 维随机变量, 或称 n 维随机向量. 随机向量 X 是可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(R^n,\mathcal{B}^n)$ 的可测映像. $F_X(A)=P(X\in A)$, $A\in\mathcal{B}^n$ 称为随机向量 X 的分布或称为 X_1, X_2, $\cdots$, X_n 的联合分布. 特别地取 $A=(-\infty,x_1]\times\cdots\times(-\infty,x_n],x_1,\cdots,x_n\in R$ 就得到随机向量 X 的分布函数, 或 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的联合分布函数

$$F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(X_1\le x_1,\cdots,X_n\le x_n),$$

它具有性质:

(i) $F_X(x_1,\cdots,x_n)$ 对任一 x_i 是单调不减的, $i=1,2,\cdots,n$;

(ii) $F_X(x_1,\cdots,x_n)$ 对任一 x_i 是右连续的, $i=1,2,\cdots,n$;

(iii) $F_X(\infty,\cdots,\infty)=1$, $F_X(x_1,\cdots,x_{i-1},-\infty,x_{i+1},\cdots,x_n)=0$, $i=1,2,\cdots,n$;

(iv) 设 $x_i\le y_i,i=1,2,\cdots,n$, 则

$$F(y_1,\cdots,y_n)-\sum_{i=1}^{n}F_i+\sum_{i<j}F_{ij}-\cdots+(-1)^nF(x_1,\cdots,x_n)\ge 0,$$

这里 $F_{ij\cdots k}$ 是 $z_i=x_i,z_j=x_j,\cdots,z_k=x_k$ 而其余 $z_l=y_l$ 时 $F(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 的值.

命题 1.2.2 已给 n 元函数 $F(x_1,\cdots,x_n)$, 满足上面(i), (ii), (iii), (iv), 则必存在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 及其上的随机向量 ξ, 使 ξ 的分布函数 $F_\xi(x_1,\cdots,x_n)=F(x_1,\cdots,x_n)$.

证明略.

注意: 性质 (iv) 不能由 (i)(ii)(iii) 推出.

例 1.2.3 定义

$$F(x_1,x_2)=\begin{cases}1, & x_1+x_2\geq 0,\\ 0, & x_1+x_2<0,\end{cases}$$

$F(x_1,x_2)$ 具有性质 (i), (ii), (iii), 但是对 $(x_1,x_2)=(-1,-1),(y_1,y_2)=(1,1)$,

$$\begin{aligned}&F(1,1)-F(-1,1)-F(1,-1)+F(-1,-1)\\ =\ &1-1-1+0\\ =\ &-1.\end{aligned}$$

若随机向量 X 的可能值的全体至多可数, 就称 X 是离散的. 设

$$a_i\in R^n,\quad p_i=P(X=a_i),\quad i=1,2,\cdots,p_i\geq 0,\quad \sum_i p_i=1.$$

若 $a_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\in R^n$, 则

$$F(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{\substack{a_{i1}\leq x_1\\ \vdots\\ a_{in}\leq x_n}} p_i.$$

若存在函数 $f(x),x\in R^n$ 使 X 的分布函数为

$$F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f(y_1,\cdots,y_n)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n,$$

则称 X 是连续型的. $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数, 或简称密度.

保留 $k(1\leq k<n)$ 个 x_i, 比如 $x_1,\cdots,x_k$, 而令其他 x_i 都趋于 $+\infty$, 得到 k 维边沿分布函数

$$\begin{aligned}&F(x_1,\cdots,x_k,+\infty,\cdots,+\infty)\\ =\ &\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_k}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(y_1,\cdots,y_n)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_k\cdots\mathrm{d}y_n,\end{aligned}$$

可见 $F(x_1,\cdots,x_k)=F(x_1,\cdots,x_k,+\infty,\cdots,+\infty)$ 也是连续型的, 其密度为

$$g(x_1,\cdots,x_k)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_{k+1}\cdots\mathrm{d}x_n.$$

注意边沿分布由分布唯一决定, 但反之不然.