北京市中学课本

数学复习参考资料

北京教育学院数学教研室编

*

北京出版社出版
北京市新华书店发行
北京印刷一厂印刷

*

1979年1月第1版　1980年7月第2版
1981年1月第3次印刷
书号：K 7071·583　　定价：0.66元

说　明

为了帮助本市中学生系统地复习中学阶段所学的数学基础知识，我们编写了这本复习参考资料，供高中二年级学生复习和教师教学参考使用.

这册资料是以现行通用中学数学课本为依据编写的.

这册资料内容共分代数、平面几何、立体几何、平面三角、解析几何五部分. 按知识系统分若干章节，简列复习提要，选配了典型例题，还配备了一定数量的练习题. 每部分最后的习题是对这部分内容的综合练习. 第六部分综合性问题，是在系统复习的基础上，为了培养学生沟通不同部分的知识和方法，综合运用它们来解决具体问题的能力而编选的.

由于编写时间仓促和经验不足，一定会有很多缺点和错误请批评指正.

北京教育学院数学教研室

1980 年 9 月

目　录

代 数 部 分

一　数

数系表:

$$
\text{复数}\begin{cases}\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数(正、负)}\begin{cases}\text{有限小数}\\ \text{无限循环小数}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数(正、负)——无限不循环小数}\end{cases}\\ \text{虚数}\end{cases}
$$

(一) 实数

1. 有理数　p、q 是整数，且 $q\neq0$，形如$\dfrac{p}{q}$的数叫做有理数.

2. 无理数　无限不循环小数叫做无理数.

3. 实数　有理数和无理数总起来叫做实数.

4. 数轴　规定了方向、原点和长度单位的直线叫做数轴. 实数集合和数轴上点的集合是一一对应的.

5. 相反数与绝对值

a 与 $-a$ 互为相反数;零的相反数是零.

$$|a|=\begin{cases}a\ \ (a\geqslant0);\\ -a\ \ (a<0).\end{cases}$$

$|a|$的几何意义，是数 a 在数轴上的对应点到原点的距离.

6. 算术根　在实数范围内，一个正数的正的 n 次方根，叫做算术根，记做 $\sqrt[n]{a}\ (a>0)$. 零的算术根是零. 当 $n=2$ 时，$\sqrt{a}$ 表示 a 的算术平方根 $(a>0)$. 根据算术平方根的定义，可得 $\sqrt{a^2}=|a|$.

7. 实数的运算法则和运算律(略).

例 1　化简：$\dfrac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}+\dfrac{|x-1|}{x-1}$.（这里 $1<x<2$）

解：$\because$　$1<x<2$,

$\therefore$　$x-2<0$, 且 $x-1>0$,

于是　$\sqrt{(x-2)^2}=2-x$, $|x-1|=x-1$.

因此　原式 $=\dfrac{2-x}{x-2}+\dfrac{x-1}{x-1}=(-1)+1=0$.

例 2　解方程：$|x-4|=5$.

解：当 $x-4>0$ 时，$|x-4|=x-4$,

原方程可化为

$$x-4=5.$$

$$\therefore\quad x=9.$$

当 $x-4<0$ 时，$|x-4|=-(x-4)$,

原方程可化为

$$-(x-4)=5.$$

$$\therefore\quad x=-1.$$

当 $x-4=0$ 时，$|x-4|=0$, 与原方程矛盾，方程无解.

所以原方程的解为 $x=9$, $x=-1$.

例 3　已知一个四位数的各位数字的和能被 3 整除，证明这个四位数能被 3 整除.

证明：设这个四位数为 $1000a+100b+10c+d$（a、b、c、d

取 0、1、2、…、9 中的数，且 $a\neq0$）. 于是

$$\begin{aligned}&1000a+100b+10c+d\\=&(a+b+c+d)+999a+99b+9c\\=&(a+b+c+d)+9(111a+11b+c).\end{aligned}$$

因为 $a+b+c+d$ 能被 3 整除，9 也能被 3 整除，所以这个四位数必能被 3 整除.

例 4 证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

证明： 用反证法证明.

假定 $\sqrt{2}$ 是有理数，那么 $\sqrt{2}$ 可以表示成 $\frac{p}{q}$，其中 p、q 是自然数，且 p、q 互质. 由此，可以推得

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2=2,$$

即
$$\frac{p^2}{q^2}=2,$$

即
$$p^2=2q^2.$$

由此可以看出 p^2 是偶数，从而 p 也是偶数. 设 $p=2r$（r 是自然数），那么

$$(2r)^2=2q^2,$$

即
$$q^2=2r^2.$$

可见 q 也是偶数.

这样，p、q 都是偶数，与 p、q 互质的假定相矛盾. 因此，$\sqrt{2}$ 不是有理数.

练　习

1. 在五位数 3427△的△位置上应填上哪些数字，就能使这

个数成为(1) 2 的倍数;(2) 3 的倍数;(3) 5 的倍数;(4)9 的倍数; (5)11 的倍数.

2. 如果$|m|<5$,而且m是整数,求m的值;并将结果表示在数轴上.

3. 如果$|x-2|=3$,求x的值.

4. 下面各结论是否正确?在什么条件下正确?

(1) 两个数中,绝对值较大的数大;

(2) $-a$是负数;

(3) a大于$-a$; (4) a^2大于a;

(5) a大于$\frac{1}{a}$; (6) $\sqrt{a^2}=a$.

5. 计算:

(1) $\sqrt{(x-1)^2}$; (2) $|2x-3|$;

(3) $|1-a|+|2a-1|$.

6. 在实数范围内,下列各式中的a是什么数值时,才有意义?

(1) $\sqrt{1-a}+\sqrt{3a-1}$; (2) $\sqrt{2a+1}+\sqrt[3]{1-2a}$.

7. 比较$\sqrt{2-a}$和$\sqrt[3]{a-4}$的大小.

8. 如果$2x+1<0$,试求$\sqrt{4x^2-12x+9}-\sqrt{1+4x+4x^2}$的值.

9. 化简:$|1-a|+|2a+1|+|a|$. $(a<-2)$

10. (1) 在自然数范围内解方程:①$x-4=5$,②$3x+4=5$;

(2) 在有理数范围内解方程:①$5x+4=0$,②$x^2-2=0$;

(3) 在实数范围内解方程:

①$x^2+x-1=0$,②$x^2-x+1=0$.

11. 设$(x-y\sqrt{2})^2=9-4\sqrt{2}$,求整数$x$、$y$的值.

12. 用几何方法，在数轴上作出表示$\sqrt{3}$的点；并用代数方法证明$\sqrt{3}$不是有理数.

（二）复数

1. 虚数单位

（1）定义 $i^2=-1$，i 叫做虚数单位.

（2）-1 的两个平方根分别是 $\pm i$.

（3）i 的乘方具有周期性

$i^{4n}=1$，$i^{4n+1}=i$，$i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+3}=-i$.（n 是整数）

2. 复数

（1）定义　形式为$a+bi$ 的数叫做复数(其中 a、b 都是实数). 若 $b=0$，这个复数就是实数 a；若 $b\neq0$，这个复数叫做虚数；若 $a=0$，$b\neq0$，这个复数就叫做纯虚数 bi.

（2）对于两个复数，如果其中至少有一个是虚数，则它们不能比较大小.

（3）复数 $a+bi$ 和 $c+di$ 相等的充要条件为$a=b$，$c=d$. 复数 $a+bi=0$ 的充要条件为 $a=0$，$b=0$.

（4）复数的几何表示法(略)

（5）复数的向量表示法

复数 $a+bi$ 与平面上以坐标原点为起点，以点(a,b)为终点的向量是一一对应的(图 1-1).

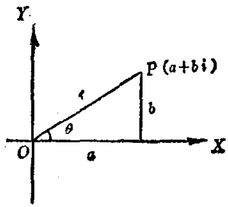

图 1-1

（6）复数的模数　非负数$\sqrt{a^2+b^2}$叫做复数 $a+bi$ 的模数，也叫做它的绝对值，记做$|a+bi|$. 它的几何意义是复数 $a+bi$ 所对应的点P到原点的距离$|OP|$.

(7) 复数的三角形式

$$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta);\text{ 其中 } r=\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\cos\theta=\frac{a}{r},\quad \sin\theta=\frac{b}{r}.$$

适合于 $0\leqslant\theta<2\pi$ 的幅角 θ 的值，叫做幅角的主值.

(8) 复数的指数形式　模数为 1，幅角为 θ(以弧度为单位)的复数，可以记作

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta.$$

对于任何一个复数

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

可以表示为

$$z=re^{i\theta}.$$

(9) 复数的运算

进行复数的加减法运算时，一般用代数形式表示复数比较方便；进行乘除法运算时，用三角形式表示比较方便，特别在乘方和开方运算时，一般用三角形式表示.

① 加减法

$$(a_1+b_1i)\pm(a_2+b_2i)=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)i.$$

② 乘法

$$(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i.$$

虚数 $a+bi$ 与 $a-bi$ 叫做共轭虚数或共轭复数，两个共轭虚数的绝对值相等.

③ 除法

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}$$

$$=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}+\frac{(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}i.\quad (a_2+b_2i\neq0)$$

④ 利用三角形式进行乘、除运算

乘法：$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

$$e^{i\theta_1}\cdot l^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

除法：$\dfrac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$

$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

⑤ 利用三角形式进行乘方与开方运算(棣美佛定理)

乘方：$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$.

开方：$\sqrt[n]{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$

$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).$$

(k 取 $0,1,2,\cdots,n-1$)

例1 计算：

(1) $i^k+i^{k+1}+i^{k+2}+i^{k+3}$($k$ 是正整数)；

(2) $i\cdot i^3\cdot i^5\cdot\cdots\cdot i^{99}$.

解：(1) $i^k+i^{k+1}+i^{k+2}+i^{k+3}$

$$=i^k(1+i+i^2+i^3)$$

$$=i^k(1+i-1-i)=i^k\cdot 0=0;$$

(2) $i\cdot i^3\cdot i^5\cdot\cdots\cdot i^{99}=i^{\frac{(1+99)\cdot 50}{2}}=i^{2500}=i^{4\times 625}=1$.

例2 计算：$\dfrac{3-4i}{1+2i}+(2+i^{15})-(1-i)^6$.

解：原式$=\dfrac{(3-4i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+(2-i)-[(1-i)^2]^3$

$$=\frac{-5-10i}{5}+2-i-(-2i)^3$$
$$=-1-2i+2-i-8i$$
$$=1-11i.$$

例 3 计算：$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100}$.

解： 原式$=\left[\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right]^{100}=i^{100}=i^{4\times 25}=1.$

例 4 化下列各复数为三角形式：

(1) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; (2) -2;

(3) $-4\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

解： (1) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$;

(2) $-2=2(\cos\pi+i\sin\pi)$;

(3) $-4\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)=4\cdot\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$=4\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

说明：复数的三角形式必须是实部的三角函数是 θ 的余弦；虚部的三角函数是同一幅角 θ 的正弦；不等于零的复数的模数是正数；实部与虚部之间用"+"号连接.

例 5 用复数的三角形式计算：

(1) $(1+i)^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$;

(2) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^5}{-1+\sqrt{3}\,i}$.

解: (1) 原式

$$=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$=-\sqrt{3}-i;$$

(2) $\because\quad \sqrt{3}+i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$,

$$-1+\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

$\therefore$ $$\text{原式}=\frac{\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^5}{2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$=\frac{2^5\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}{2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$=2^4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=16\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

$$=8\sqrt{3}+8i.$$

例 6 解方程: $x^5-1=0$.

解: $\because$ $x^5=1=\cos 0+i\sin 0$, 所求的x是1的五次

方根，所以

$$x=\cos\frac{2k\pi+0}{5}+i\sin\frac{2k\pi+0}{5}.$$

$$(k=0, 1, 2, 3, 4)$$

当 $k-0$ 时，$x_1=1$；

当 $k=1$ 时，$x_2=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$；

当 $k=2$ 时，$x_3=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}$；

当 $k=3$ 时，$x_4=\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}$；

当 $k=4$ 时，$x_5=\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}$.

例 7 已知 $|x|-x=1-2i$，x 为复数，求 x.

解： 设 $x=a+bi$，则 $|x|=\sqrt{a^2+b^2}$.

$$\therefore \quad \sqrt{a^2+b^2}-a-bi=1-2i.$$

根据复数相等的定义，得

$$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}-a=1,\\ b=2.\end{cases}$$

解之，得

$$\begin{cases}a=\dfrac{3}{2},\\ b=2.\end{cases}$$

$$\therefore \quad x=\frac{3}{2}+2i.$$

例 8 用复数的指数形式计算：

(1) $2i(1+i)$；(2) $(1+\sqrt{3}i)^2$.

解： (1) $2i(1+i)=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\right.$

$$i\sin\frac{\pi}{4}\Big) \quad =2e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$=2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

$$(2)\ (1+\sqrt{3}\,i)^2==\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^2$$

$$=(2e^{i\frac{\pi}{3}})^2=4e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

练 习

1. 已知 $2-3i$ 表示复数平面内的一个点，哪些数表示的点和这点(1)关于 x 轴对称；(2)关于 y 轴对称；(3)关于原点对称？

2. 在复数平面内，A 点表示复数 $1+\sqrt{3}\,i$，把 OA 绕着 O 点按逆时针方向旋转 $150°$，设 A 点到达的位置是 B，写出 B 点所对应的复数的代数形式.

3. 当实数 m 取什么值时，复数

$$(2m^2-3m-2)+(m^2-3m+2)i$$

(1)为一实数？(2)为一纯虚数？(3)等于零？

4. 求下列各式中实数 x、y 的值：

(1) $x-3i=(8x-y)i$;

(2) $4x+2=2yi$;

(3) $(x+y)^2 i-\frac{6}{i}-x=-y+5(x+y)i-1.$

5. 已知 u、v 是复数，解方程组

$$\begin{cases}(1-i)u+(2+i)v=7,\\(3+2i)u-(2-3i)v=1+i.\end{cases}$$

6. 计算:

(1) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i\right)+\left(2-\frac{1}{2}i\right)-(3-i)$;

(2) $(2-3i)\left(-\frac{1}{2}-i\right)$; (3) $\frac{1}{i}$;

(4) $\frac{2+3i}{3-4i}$; (5) $(1-2i)^2$;

(6) $\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{100}$.

7. 计算:

(1) $\frac{3+i^{103}}{1-2i}+(4+i^{11})-(1-i)^{10}$;

(2) $i^{-4n}+i^{-4n+1}+i^{-4n+2}+i^{-4n+3}$;

(3) $\frac{(1+i)^4}{1-i}+\frac{(1-i)^4}{1+i}$; (4) $\frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$.

8. 比较$|14+40i|$和$|(-7+\sqrt{7}i)(-7-\sqrt{7}i)|$的大小.

9. 写出下列各数和它们的共轭虚数的三角形式和指数形式:

(1) $1-i$; (2) $-2-3i$;

(3) $4i$; (4) $-2+2\sqrt{3}i$.

10. 用复数的三角形式计算:

(1) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

(2) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

$\div\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$;

(3) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{11}$；(4) $\sqrt[6]{-8i}$;

(5) $\left(\frac{2+2i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{8}$.

11. 求 i 的平方根.

12. 求证：$(\cos 75°+i\sin 75°)(\cos 15°+i\sin 15°)=i$.

13. 设 $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$，求证 $x^m+\frac{1}{x^m}=2\cos m\theta$.（$m$是整数）

14. 已知 n 是自然数，$(1+i)^n$是实数，求 n 的最小值．并且(1)这实数$(1+i)^n$是什么数？(2)如果$(1+i)^n$是正实数，是纯虚数又怎样？

15. 用复数的指数形式计算：

(1) $(3+3i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$；(2) $5i\cdot(1-i)$;

(3) $(1+\sqrt{3}i)^3$;　　(4) $\frac{\cos 120°+i\sin 120°}{2(\cos 240°-i\sin 240°)}$;

(5) $\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{3}}}$;　　(6) $(1-i)^{-3}$.

16. 在复数范围内解方程：

(1) $3x^2-2x+4=0$；(2) $x^3+8=0$;

(3) $x^6-1=0$;　　(4) $x^2+(3+2i)x+(3i-5)=0$.

17. 证明：$\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$和$\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$是方程 $x^4+x^2+1=0$ 的两个根.

18. 设方程 $x^3-1=0$ 的三个根是 $1,\alpha,\beta$.

求证：(1) $\alpha^2=\beta$;

(2) $\beta^2=\alpha$;

(3) $1+\alpha+\beta=0$;

(4) $\alpha^{3n+1}+\beta^{3n+1}=-1$.

19. 已知$|x|-x=\dfrac{2i}{1-i}$, x为复数, 求x.

20. (1) 求$-2-2\sqrt{3}\,i$的8次方根;

(2) 求$-i$的5次方根.

21. 设α是1的n次方根, 计算$1+\alpha+\alpha^2+\cdots\cdots+\alpha^{n-1}$的值.

22. 解方程:

(1) $x^6+8x^3+12=0$; (2) $x^8-5x^4-6=0$.

23. 已知i是方程$x^4+x^3+kx^2+x-2=0$的根, 试求这个方程的其余三个根.

24. 已知一个正三角形的顶点在复平面上所对应的数为a、b (a、b为实数), 试写出另一顶点所对应的复数.

二 代 数 式

(一) 代数式

1 代数式 用代数运算(指加、减、乘、除、乘方、开方)符号和顺序符号把数字和表示数的字母连结起来的式子叫做代数式.

2. 分类

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\ \text{多项式}\end{cases}\\ \text{分式}\end{cases}\\ \text{无理式}\end{cases}$$

(二) 整式

1. 整式和它的四则运算(略)

2. 乘法公式