应用泛函分析与积分方程

谢 靖 编著

吉林科学技术出版社

国家自然科学基金资助项目
地震科学联合基金资助项目

应用泛函分析与积分方程　　谢　靖　编著

责任编辑：张允麟　　封面设计：马腾骧

出版发行　吉林科学技术出版社　　787×1092毫米32开本　12.125印张
265 000字
1990年9月第1版　1990年9月第1次印刷
印数：1—1 000册　定价：6.00元
印刷　长春新华印刷厂　ISBN 7-5384-0592-5/O·35

前　言

近几年来，对于高等工业院校的高年级学生、研究生、青年教师，对于从事科学技术工作的工程师、研究人员来说，了解、学习和掌握一些近代数学方法、原理，越来越必要了。由于近代科学技术的发展和理论研究工作的深入，局限在微积分和数学分析的高等数学框架里的工程数学，已经不够用了。例如在近代物理、地球科学，包括地球物理、近代力学、近代各种工程学，特别是地球物理勘探、信息论、无线电工程，它们早已涉及到一些近代数学概念、理论和方法。要想把这些问题搞清楚，就必须跳出经典数学的框架，用泛函分析的方法来讨论问题。

泛函分析是一门概括性很强，而又有着众多实际背景的无穷维空间的分析学。无穷维空间并不抽象，它是有限维空间的完善与补充。例如平面上一条曲线，就可把它看成无穷维空间一个点。这只要把这条曲线的各纵坐标长度，依次看成坐标值有顺序的点的极限，这条平面曲线就对应着无穷维空间的一个点了。一个与时间有关的物理过程，是时间的状态函数。因此，它就很自然地对应着无穷维空间的一个点了。可见无穷维空间并不抽象。

各类方程（如代数方程、函数方程、微分方程、积分方程、微积分方程等）的求解问题，一直是数学中的一个主题。把这个主题最本质地纳入无穷维空间分析的框架里，就是求算子的逆算子问题，这是应用泛函分析的一个主题。算

子是否存在逆算子以及逆算子是否连续，涉及到算子方程是否有解以及解是否稳定的问题。众所周知，这些问题正是解的“适定性”问题。过去，我们对于不适定的数学物理问题，认为它没有意义而不予理睬。随着科学技术发展的需要，使我们不得不和解不适定问题打交道。只有在无穷维空间的分析学（即泛函分析）里，才能最本质地讲清这个问题，并且最本质地提出解决不适定问题的方法。

泛函分析与数学分析的根本区别，在于它们的基本原理成立的场合不同。有限维空间是紧致的，而无穷维空间是非紧致的。这就使得奠基于紧致性的数学分析的基本原理在无穷维空间中不成立。泛函分析中很多重要概念的产生，都渊源于此。泛函分析虽然不能代替“计算方法”，但它却能够为“计算方法”设计计算框架、工作空间，从理论上指导着计算方法，甚至为各种计算问题提出构造性的论证，从而最终提出解决问题的方法。这就是我们学习应用泛函分析的重要原因。

在算子理论中，应用广泛而研究得更清楚的是全连续算子，积分算子就正是这样的算子。因此，从应用泛函分析的理论来说，特别是从应用科学的需要来说，积分方程比起微分方程有独特的优点。前者是有界算子，后者是无界算子，有界算子的性质比无界算子的性质好。因此，应用积分方程解决实际问题时，常常比微分方程来得简单、方便。

近几年来，在很多应用科学中，如地球物理勘探、地下水的预测预报、环境科学、遥感技术、工业无损探伤、医学CT中，都提出了一些共同的数学模型，于是在应用数学和计算数学中逐渐形成了一个年轻的很有前景的“数学物理反问题”，特别是第一类Fredholm积分方程的数值计算问题。

众所周知，这是一些典型的数学不适定问题。解决这些问题的有效途径是利用A. H. 吉洪诺夫的“正则化方法”求问题的适定的正则化解。这些方法的原理只有在应用泛函分析的基础上才能讲清楚，进而才能在自己的科学实践中灵活地应用这些方法。

本书曾多次给应用地球物理系、电子仪器系研究生讲授过，其中“积分方程”还给水工系研究生讲授过。杨天行教授、罗秉忠副教授在讲授中曾提出过宝贵意见，在此表示感谢。

作　者

目　　录

第一章　Lebesque 积分理论

§1.1　Riemann积分的缺陷

我们在高等数学中所学的积分，是在黎曼意义下的积分。随着数学、物理和应用科学的发展，越来越使人感到它在理论上和运算上都存在一些不可克服的缺陷。

1.1 Riemann（黎曼）积分是针对连续函数而设计的。由Riemann积分的定义

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{l\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{1.1.1}$$

其中ξ_i是〔a,b〕中第i个子区间〔x_{i-1}，x_i〕中的任意一点。Δx_i是这个子区间的长度。$l=\max\limits_i \Delta x_i$。当分点无限增多且$l\to 0$时，若（1.1.1）右端的极限存在，则称此极限为$f$（$x$）在〔$a$，$b$〕上的Riemann积分。问题是这个极限在什么条件下才存在？从这一积分的理论知道，只有当被积函数在〔a，b〕上连续或“基本上”连续才行。现在来讨论这个问题。

记

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}) \tag{1.1.2}$$

$$s_n=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}) \tag{1.1.3}$$

其中M_i，m_i分别是 (x_{i-1}, x_i) 中$f(x)$ 的最大值与最小值．于是有不等式

$$s_n \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1}) \leqslant S_n \qquad (1.1.4)$$

由于S_n，s_n都是有界的，并且当n增加时，S_n不增大，s_n不减小．从而

$$S_n - s_n = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leqslant L_n(b-a) \qquad (1.1.5)$$

其中 $L_n = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(M_i - m_i)$．由$f(x)$ 的连续性可知，当$n\to\infty$，$l\to 0$时，$L_n\to 0$．因此有

$S_n - s_n \to 0$ （$l\to 0$时）

这就保证了（1.1.1）右端的极限存在．如果$f(x)$ 不连续，仅为有界的，则上述情况就得不到保证．例如 Dirichlet函数：

$$D(x) = \begin{cases} 1，& \text{当}x\text{为有理数时} \\ 0，& \text{当}x\text{为无理数时} \end{cases} \qquad (1.1.6)$$

这是一个处处不连续的函数，无论区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 多么小，总有$M_i = 1$，$m_i = 0$，从而$M_i - m_i \nrightarrow 0$．这是一个简单而又典型的Riemann不可积的函数．以后我们会看到，当我们用勒贝格积分的理论来研究$D(x)$ 时，它却是一个很简单的Lebesque（勒贝格）可积函数．

1.2 采用Riemann积分时，对各种极限运算要想通过积分符号而直接施加到被积函数时，需要一些很强的条件．例如，当

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x) \tag{1.1.7}$$

时，能否有

$$\int f(x)\,dx = \int\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int f_n(x)\,dx \tag{1.1.8}$$

呢？众所周知，只有当（1. 1. 7）是一致收敛时才行．又如对所有$\{f_n(x)\}$都可导，并且（1.1.7）成立，那么是否有

$$f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

呢？由数学分析可知，它还要求各项导数所成的级数也一致收敛才行，这个条件就更强了．再如含参数积分对参数的求积求导的运算问题，也有上述类似的很强的条件．这些条件的限制，给数学运算的灵活性，带来极大的不便．然而采用Lebesque积分时，这些条件将大大减弱．

1.3 由于应用数学与纯数学的需要而引进了一些函数空间，其中L^2空间就是一个有广泛应用的函数空间，它是由全体勒贝格平方可积的函数组成的，且是完备的函数空间．如果这里的积分采用 Riemann 积分，则这个空间就不完备．

由此可见 Riemann 积分在数学的进一步发展和应用上，有它的“先天不足”之处．所以我们要在本章来介绍一种新的积分——Lebesque（勒贝格）积分．

§1.2 Lebesque积分大意

和 Riemann 积分不同的是 Lebesque 积分的“积分

和”是按分割函数的值域来构成的．设$y=f(x)$是集合$E=[a,b]$上的有界函数．它的值域是$[A,B]$．在$[A,B]$中插入分点

$$A=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=B$$

考虑集合

$$e_k=\{x\mid y_{k-1}\leqslant f(x)<y_k\}$$

它显然是E的子集．容易想到它有以下几点

1）所有e_1，e_2，…，e_n是互不相交的。

2）$E=\sum\limits_{k=1}^{n}e_k$ 。

3）对每个e_k可求出它的“测度”，它是区间长度的推广(在本章5.2中再详细讲)．并以me_k表示之。

4）$mE=\sum\limits_{k=1}^{n}me_k$。

下面引入勒贝格积分和：

$$T_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i me_i \tag{1.2.1}$$

其中ξ_i是$[y_{i-1},y_i]$中任一点．再考虑大和与小和：

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}y_k me_k,\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}y_{k-1}me_k \tag{1.2.2}$$

显然它们都是有界的，并且

$$s_n\leqslant T_n\leqslant S_n,$$

$$S_n-s_n=\sum_{k=1}^{n}(y_k-y_{k-1})me_k \tag{1.2.3}$$

令 $l=\max\limits_{k}(y_k-y_{k-1})$，于是对任意$n$，$S_n-s_n<l.mE$，从而$S_n$与$s_n$有共同的极限，记为$S$，按（1.2.3）知 T_n 也有极限S. 仍用过去的积分符号：

$$S=\int_E f(x)dx \tag{1.2.4}$$

我们把（1.2.4）定义的积分称为$f(x)$ 在点集 $E=[a,b]$ 上的Lebesque积分.

由以上的定义可知（1.2.4）的存在并不要求 $f(x)$ 的连续性. 但是，值得深思的问题是$e_k=\{x|\ y_{k-1}\leqslant f(x)<y_k\}$都是一些什么样的点集，而$me_k$又是什么含意. 下面就要讲这些问题.

§1.3 集合的概念和运算

3.1 集合是一个不容易精确定义的最基本的概念，但它却是可以为人们自然理解的. 我们称具有某种所论性质的抽象的或具体的事物 （称为元素）的全体为“集合”（简称为“集”）. 例如某校的全体学生，构成一个集合，把它记为A. 其中的全体女生成一集合B，B称为A的子集，记为$B\subset A$. 又例如全体自然数形成一集合，记为N，如用M记全体奇数所成之集，显然有$M\subset N$，又如用Q 表示全体偶数所成的集，则显然有$N=M+Q$. 这个加号“+”表示集合的加法. 以上这些例子都是为人们所自然理解的. 不过我们还是要把它们说得确切些.

集合可用大写字母，A，B，M，N，X，Y等来表示. 而其元素则用小写的字母a，b，m，n，x，y 等来表示. 元

素a若属于集合A，则记为$a\in A$，否则，则表示为$a\overline{\in}A$．一个元素对于集合来说，只有属于或不属于两种情况，不能又属于又不属于．如果对任一元素$a\in A$，能推得$a\in B$，则称A为B的子集，记为$A\subseteq B$，或者$B\supseteq A$．而用$A\subset B$或$B\supset A$表示A为B的真子集．这时，任一元素$a\in A$必有$a\in B$，但B中至少有某元素b，是$b\overline{\in}A$．如果B中任一元素b也有$b\in A$，则B也是A的子集，这时$A\subseteq B$，$B\subseteq A$，于是有$A\doteq B$，我们说二集合A与B重合（即A, B相等）．

没有元素的集合，称为空集，记为0．有时为了与数零区别，而把它记为$\varnothing$．无限个元素的集合称为无限集．

3.2 集合的代数运算．集合的代数运算为集合间的和、差、积等三种运算．

集合C包含了集合A与B的所有元素，除此之外，C中别无其它元素，则称C为A，B的和集，记$C=A+B$．为区别数的加法，也用$C=A\cup B$表示，并称C为A, B的并集．

差集$A-B$被定义为一切属于集合A而不属于集合B的元素所成的集合．为区别数的减法，也记为$C=A\setminus B$．特别，当$A\supset B$时，称$C=A\setminus B$为B关于A的余集．

如果C包含了集合A，B的一切共同元素．除此之外，C别无其它元素，则称C为A，B的乘积，记为$C=A\cdot B$，或记为$C=A\cap B$，也称C为A，B的交集．

二集合的代数运算可以推广到多个集合的情形．这里就不再多讲了．

集合的代数运算按定义还可表示为

$A+B=E〔x\mid x\in A$或$x\in B〕$，

$A-B=E〔x\mid x\in A$但$x\overline{\in}B〕$，

$A\cdot B=E〔x\mid x\in A$且$x\in B〕$

例 1 设 $A=〔1,2,3,4,5〕$，$B=〔3,4,5,6,7〕$ 则显然有

$A+B=〔1,2,3,4,5,6,7〕$，$A-B=〔1,2〕$，$A\cdot B=〔3,4,5〕$

例 2 设A为某校全体学生的集合，B为全校女生的集合，则全校男生的集合$C=A-B$为B关于A的余集．下面再考虑一个无限集的例子

例 3 设N为全体自然数的集合，P为全体奇数的集合，Q为全体偶数的集合．于是$N=P+Q$，并且还有$Q=N-P$，或$P=N-Q$．我们不要以为这后两式是第一式的必然的推论．实际上集合的运算并不和数的运算一样，当$N=P+Q$时，$N-Q=P+Q-Q=P$是有条件的．

集合的代数运算具有下列简单性质

1) $A+B=B+A$（交换律）

2) $(A+B)+C=A+(B+C)$（结合律）

3) $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$（分配律）

4) $A+A=A$

5) $A+B=A$成立的充要条件是$B\subseteq A$．

6) $A+B-B=A$成立的充要条件是$A\cdot B=0$．

7) $A-B+B=A$成立的充要条件为$A\supseteq B$．

回忆例3中的$P+Q-Q=P$之所以成立，正是因为$P\cdot Q=0$的缘故．

今后我们主要是与无限集打交道，现在来考虑无限集的一个重要性质．

定义 1 一个集合的所有元素，若能和全体自然数建立一一对应，则称此集合为可数集或可列集．

由此定义可知，自然数全体构成一个可数集，全体奇数

和全体偶数也都是可数集．而且它们都是自然数全体的集合的子集．

下面是一个很有用的定理．

定理 1 有限个或可数个可数集的和集，仍是可数集．

证明 把这些可数集排列起来，只要我们把排列起来的全体元素与自然数作成一个对应，定理就得到了证明．为此设

$$
\begin{aligned}
&A_1=\{a_{11},\ a_{12},\ \cdots,\ a_{1n},\ \cdots\}\\
&A_2=\{a_{21},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{2n},\ \cdots\}\\
&\vdots\\
&A_m=\{a_{m1},\ a_{m2},\cdots,a_{mn},\cdots\}
\end{aligned}
$$

于是把全体元素排起来：

$\{a_{11}a_{21}\cdots a_{m1};\ a_{12}a_{22}\cdots a_{m2};\ \cdots\ a_{1n}a_{2n}\cdots a_{mn};\ \cdots\}=A_1+A_2+\cdots+A_m$，可见和集是可数集．对于可数个的情形有

$$
\begin{aligned}
&A_1=\{a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ \cdots,\ a_{1n},\ \cdots\}\\
&A_2=\{a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ \cdots,\ a_{2n},\ \cdots\}\\
&A_3=\{a_{31},\ a_{32},\ a_{33},\ \cdots,\ a_{3n},\cdots\}\\
&\vdots\\
&A_m=\{a_{m1},a_{m2},\ a_{m3},\ \cdots,\ a_{mn}\cdots\}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

按箭头所示的顺序就可以把所有元素与自然数全体对应起来，即

$$
\begin{aligned}
&A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots\\
&=\{a_{11};\ a_{12},\ a_{21};\ a_{31},\ a_{22},\ a_{13};\ a_{14},\ a_{23},\ a_{32},\ a_{41};\cdots\}
\end{aligned}
$$

可见它是可数集．由此定理可推出以下的定理．

定理 2 一切有理数所成的集合M是可数集．

证明 M的所有元素都是形如$\frac{n}{m}$（$(m\neq 0)$ n，m都是正负整数）的数．因正负数之间可以一一对应起来，故只

须把正 $\frac{n}{m}$ （$m\neq 0$）与自然数全体对应起来即可．为此先固定$m=1$．让n取1，2，3，…，n，…则得

$$A_1=\{\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \cdots,\ \frac{n}{1},\ \cdots\}$$

这是一个可数集，让$m=2$时，又得一可数集

$$A_2=\{\frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{2},\ \cdots,\ \frac{n}{2},\ \cdots\}$$

如此下去即得到可数个可数集合，它们的和集即是M，可见M是可数集．

由上面的讨论读者可能会问，是否无限集都是可数集呢？回答是否定的．

定理 3 区间〔0,1〕中的所有点构成一个不可数集．

证明 假如不然，则〔0，1〕中的一切点都可排成如下一个序列．

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

这就是说，〔0，1〕中的一切点都应该在这个序列中．将〔0，1〕由$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$两点分为等长的三个子区间：〔0，$\frac{1}{3}$〕，〔$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$〕，〔$\frac{2}{3}$，1〕．其中至少有一个区间不含有x_1．如图 1.1 所示，例如〔$\frac{2}{3}$，1〕(记为U_1）不含有x_1，则将〔$\frac{2}{3}$，1〕三等分，其中至少有一区间U_2不含有x_2，如此继续下去，有U_n不含x_n．这些小区间每

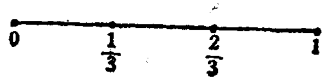

图 1.1

一个都含在前一个中，这就形成一个区间套．套中每个区间都是前者的长度的$\frac{1}{3}$．从而区间套长度退缩为零而含有一个共