高职高专高等数学基础特色教材系列

高等数学基础（下）

线性代数与概率论学习指导

（经济类与管理类）

周誓达 编著

中国人民大学出版社

高职高专高等数学基础特色教材系列

高等数学基础（下）

线性代数与概率论学习指导

（经济类与管理类）

周誓达 编著

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与概率论学习指导（经济类与管理类）/周誓达编著.
北京：中国人民大学出版社，2005
高职高专高等数学基础特色教材系列
高等数学基础（下）
ISBN 7-300-06636-4

Ⅰ.高…
Ⅱ.周…
Ⅲ.①线性代数-高等学校：技术学校-教学参考资料
②概率论-高等学校：技术学校-教学参考资料
Ⅳ.①O151.2②O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 068828 号

高职高专高等数学基础特色教材系列
高等数学基础（下）
线性代数与概率论学习指导
（经济类与管理类）
周誓达　编著

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511239（出版部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	河北三河汇鑫印务有限公司		
开　　本	787×965 毫米 1/16	版　　次	2005 年 8 月第 1 版
印　　张	11	印　　次	2005 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	195 000	定　　价	12.00 元

前　言

高职高专高等数学基础特色教材系列是为高职高专经济类与管理类各专业编著的教材与辅导书，包括《微积分》、《线性代数与概率论》及《微积分学习指导》、《线性代数与概率论学习指导》。这是一套特色鲜明的教材系列，其特色是：密切结合经济工作的需要，充分注意逻辑思维的规律，突出重点，说理透彻，循序渐进，通俗易懂。

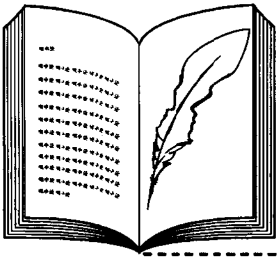
《线性代数与概率论学习指导》是高等数学基础（下）《线性代数与概率论》的辅导书，包括两部分内容：各章学习要点与全部习题详细解答。本书引导读者在全面学习的基础上抓住重点，明确主要内容，深入理解主要概念与主要理论，熟练掌握主要运算方法，把好钢用在刀刃上，达到事半功倍的效果。

本书概率论部分完全适合全国成人高等教育经济类与管理类专升本考试的要求，与全国成人高等教育经济类与管理类专升本考试接轨，为高职高专毕业生参加专升本考试提供便利。

本着对读者高度负责的精神，全书经过再三验算，作者自始至终参与排版校对，实现计算零差错。欢迎广大读者提出宝贵意见，本书将不断改进与完善，坚持不懈的提高质量，突出自己的特色，更好地为教学第一线服务。

周誓达

2005 年 5 月 9 日于北京



目 录

线性代数部分

概率论部分

线性代数部分

第一章

行列式

一　学习要点

1. 行列式的概念

二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是 $n!$ 项的代数和，每项为来自不同行、不同列的 n 个元素乘积，可以适当交换每项中元素的次序，使得它们的行标按顺序排列，这时若相应列标排列逆序数为零或偶数，则这项前面取正号；若相应列标排列逆序数为奇数，则这项前面取负号.

已知行列式 D，若将行列互换（第 1 行变成第 1 列，第 2 行变成第 2 列 …… 第 n 行变成第 n 列）得到新的行列式，则称这个新的行列式为行列式 D 的转置行列式，记作 D^{T}. 转置行列式 D^{T} 的值等于行列式 D 的值，即

$$D^{\mathrm{T}} = D$$

若行列式 D 主对角线以上或以下的元素全为零，则称行列式 D 为三角形行列式. 三角形行列式的值等于主对角线上元素的乘积.

2. 行列式的性质

性质 1 交换行列式的任意两行(列)，行列式变号；

性质 2 行列式的任意一行(列) 的公因子可以提到行列式外面；

性质 3 行列式的任意一行(列) 的 k 倍加到另外一行(列) 上去，行列式的值不变.

推论 行列式的值一定等于零的情况：

(1) 有一行(列) 的元素全为零；

(2) 有两行(列) 的对应元素相同；

(3) 有两行(列) 的对应元素成比例.

3. 行列式的展开

在 n 阶行列式 D 中，若划掉元素 $a_{ij}(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n)$ 所在的第 i 行与第 j 列，则称剩余元素构成的 $n-1$ 阶行列式为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}；并称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式，记作

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

n 阶行列式 D 等于它的任意一行(列) 各元素与其代数余子式乘积之和，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \cdots + a_{2n}A_{2n}$$
$$= \cdots = a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \cdots + a_{nn}A_{nn}$$
$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + \cdots + a_{n2}A_{n2}$$
$$= \cdots = a_{1n}A_{1n} + a_{2n}A_{2n} + \cdots + a_{nn}A_{nn}$$

4. 克莱姆法则

克莱姆法则 已知由 n 个线性方程式构成的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

由未知量系数构成的行列式称为系数行列式,记作 D,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

在系数行列式 D 中第 1 列元素,第 2 列元素……第 n 列元素分别用线性方程组常数项对应替换后所得到的行列式,分别记作 $D_1, D_2, \cdots, D_n$,即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\cdots$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

如果系数行列式 $D \neq 0$,则仅有惟一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \dfrac{D_n}{D} \end{cases}$$

已知由 n 个线性方程式构成的 n 元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

如果有非零解，则系数行列式 $D = 0$；如果系数行列式 $D = 0$，则有非零解.

二　习题一详细解答

1.01　计算下列二阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$

解：二阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 1 \times 5 = 1$$

(2) $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}$

解：二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2$$

1.02　计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

解：三阶行列式

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{vmatrix}=1+8+27-6-6-6=18$$

(2) $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\0&1&2\end{vmatrix}$

解:三阶行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\0&1&2\end{vmatrix}=4+0+1-0-2-3=0$$

(3) $\begin{vmatrix}0&a&b\\-a&0&-c\\-b&c&0\end{vmatrix}$

解:三阶行列式

$$\begin{vmatrix}0&a&b\\-a&0&-c\\-b&c&0\end{vmatrix}=0+abc+(-abc)-0-0-0=0$$

(4) $\begin{vmatrix}0&0&x\\0&y&z\\z&x&y\end{vmatrix}$

解:三阶行列式

$$\begin{vmatrix}0&0&x\\0&y&z\\z&x&y\end{vmatrix}=0+0+0-xyz-0-0=-xyz$$

1.03　当元素 x 为何值时,使得三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}5&1&x\\4&x&0\\1&0&x\end{vmatrix}=0$$

解:计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}5&1&x\\4&x&0\\1&0&x\end{vmatrix}=5x^2+0+0-x^2-4x-0=4x^2-4x$$

令三阶行列式 $D=0$,即 $4x^2-4x=0$,得到 $x=0$ 与 $x=1$. 所以当元素 $x=0$ 或

$x=1$ 时，使得三阶行列式 $D=0$.

1.04 确定元素行标 l,m 的值，使得乘积 $a_{l1}a_{24}a_{43}a_{m2}$ 为四阶行列式 D 中前面取负号的项.

解：在乘积 $a_{l1}a_{24}a_{43}a_{m2}$ 中，元素的列标各不相同，说明它们来自不同列，元素的行标分别为 $l,2,4,m$，欲使它们也来自不同行，必须 $l=1,m=3$ 或 $l=3,m=1$，这时乘积 $a_{l1}a_{24}a_{43}a_{m2}$ 才是四阶行列式 D 中的项.

当 $l=1,m=3$ 时，得到

$$a_{11}a_{24}a_{43}a_{32}=a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$$

相应列标排列逆序数

$$N(1\ 4\ 2\ 3)=2$$

是偶数，因而项 $a_{11}a_{24}a_{43}a_{32}$ 前面应取正号；

当 $l=3,m=1$ 时，得到

$$a_{31}a_{24}a_{43}a_{12}=a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$$

相应列标排列逆序数

$$N(2\ 4\ 1\ 3)=3$$

是奇数，因而项 $a_{31}a_{24}a_{43}a_{12}$ 前面应取负号.

所以当元素行标 $l=3,m=1$ 时，乘积 $a_{l1}a_{24}a_{43}a_{m2}$ 为四阶行列式 D 中前面取负号的项.

1.05 已知三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-2$$

求下列三阶行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 2a_1 & 2b_1 & 2c_1 \\ 2a_2 & 2b_2 & 2c_2 \\ 2a_3 & 2b_3 & 2c_3 \end{vmatrix}$

解：(1) 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

（交换第 1 列与第 2 列）

$$= -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

（交换第 2 列与第 3 列）

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \times (-2) = -2$$

(2) 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2a_1 & 2b_1 & 2c_1 \\ 2a_2 & 2b_2 & 2c_2 \\ 2a_3 & 2b_3 & 2c_3 \end{vmatrix}$$

（第 1 列至第 3 列各列的公因子 2 皆提到行列式外面）

$$= 2 \times 2 \times 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2^3 \times (-2) = -16$$

1.06　已知三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 10$$

求三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12} & 3a_{11} - 4a_{13} \\ 2a_{21} & a_{22} & 3a_{21} - 4a_{23} \\ 2a_{31} & a_{32} & 3a_{31} - 4a_{33} \end{vmatrix}$$

的值.

解:三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12} & 3a_{11} - 4a_{13} \\ 2a_{21} & a_{22} & 3a_{21} - 4a_{23} \\ 2a_{31} & a_{32} & 3a_{31} - 4a_{33} \end{vmatrix}$$

（第 1 列的公因子 2 提到行列式外面）

$$= 2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 3a_{11} - 4a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 3a_{21} - 4a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 3a_{31} - 4a_{33} \end{vmatrix}$$

（第 1 列的 －3 倍加到第 3 列上去）

$$= 2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & -4a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & -4a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -4a_{33} \end{vmatrix}$$

（第 3 列的公因子 -4 提到行列式外面）

$$= 2 \times (-4)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2 \times (-4) \times 10 = -80$$

1.07　计算下列四阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

解：四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

（交换第 3 行与第 4 行）

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

（交换第 2 行与第 3 行）

$$= (-1)^2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

（交换第 1 行与第 2 行）

$$=(-1)^3\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=(-1)\times 1=-1$$

(2) $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-1&1&1&1\\-1&-1&1&1\\-1&-1&-1&1\end{vmatrix}$

解:四阶行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-1&1&1&1\\-1&-1&1&1\\-1&-1&-1&1\end{vmatrix}$$

(第 1 行分别加到第 2 行至第 4 行上去)

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&2&2\\0&0&0&2\end{vmatrix}=8$$

(3) $\begin{vmatrix}1&2&3&0\\0&1&2&3\\3&0&1&2\\2&3&0&1\end{vmatrix}$

解:四阶行列式

$$\begin{vmatrix}1&2&3&0\\0&1&2&3\\3&0&1&2\\2&3&0&1\end{vmatrix}$$

(第 1 行的 -3 倍加到第 3 行上去,第 1 行的 -2 倍加到第 4 行上去)

$$=\begin{vmatrix}1&2&3&0\\0&1&2&3\\0&-6&-8&2\\0&-1&-6&1\end{vmatrix}$$

(第 2 行的 6 倍加到第 3 行上去,第 2 行加到第 4 行上去)

$$=\begin{vmatrix}1&2&3&0\\0&1&2&3\\0&0&4&20\\0&0&-4&4\end{vmatrix}$$

（第 3 行加到第 4 行上去）

$$=\begin{vmatrix}1&2&3&0\\0&1&2&3\\0&0&4&20\\0&0&0&24\end{vmatrix}=96$$

(4) $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{vmatrix}$

解:四阶行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{vmatrix}$$

（第 1 行的 -1 倍分别加到第 2 行至第 4 行上去）

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&2&5&9\\0&3&9&19\end{vmatrix}$$

（第 2 行的 -2 倍加到第 3 行上去，第 2 行的 -3 倍加到第 4 行上去）

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&3&10\end{vmatrix}$$

（第 3 行的 -3 倍加到第 4 行上去）

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1$$

1.08 计算下列四阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 2 & x & 0 \\ 1 & 2 & 2 & x \end{vmatrix}$

解:四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 2 & x & 0 \\ 1 & 2 & 2 & x \end{vmatrix}$$

(第 1 行的 -1 倍分别加到第 2 行至第 4 行上去)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & x-2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & x-2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)^3$$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & b & c \\ b & b & x & c \\ c & c & c & x \end{vmatrix}$

解:四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & b & c \\ b & b & x & c \\ c & c & c & x \end{vmatrix}$$

(第 1 行的 $-a$ 倍加到第 2 行上去,第 1 行的 $-b$ 倍加到第 3 行上去,第 1 行的 $-c$ 倍加到第 4 行上去)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-a & b-a & c-a \\ 0 & 0 & x-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & x-c \end{vmatrix} = (x-a)(x-b)(x-c)$$

(3) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \end{vmatrix}$

解:四阶行列式