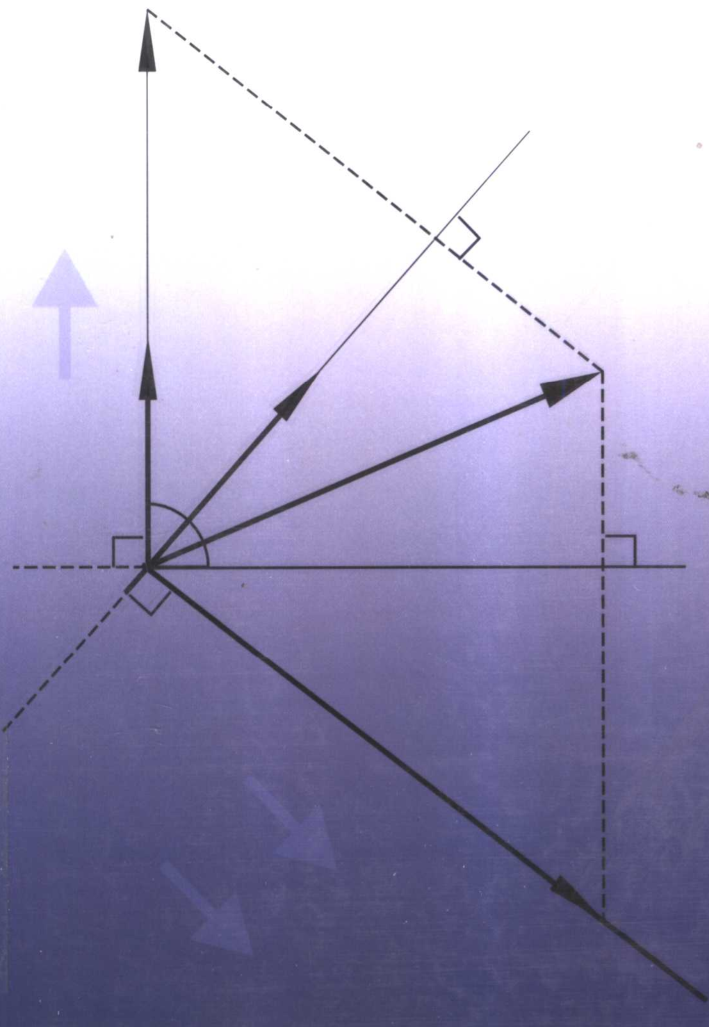
■ 张若京 编著

张量分析教程

ZHANGLIANG FENXI JIAOCHENG



同济大学出版社

同济大学"十五"规划教材
同济大学教材、学术著作出版基金委员会资助

张量分析教程

张若京　编著

同济大学出版社

内容提要

本书介绍张量分析的基本内容，包括空间曲线坐标系，张量的基本概念和代数运算，二阶张量，张量场论以及曲面上的张量。考虑到笛卡尔坐标系的广泛应用，故最后一章介绍了笛卡尔张量。各章后面均附有习题。

本书可供力学专业、应用数学专业以及理工科有关专业的本科生或研究生作为教材使用，也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

张量分析教程/张若京编著. —上海:同济大学出版社，2004.9

ISBN 7-5608-2891-4

Ⅰ. 张… Ⅱ. 张… Ⅲ. 张量分析—研究生—教材 Ⅳ. O183.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 070222 号

张量分析教程

张若京 编著

责任编辑 司徒妙龄 责任校对 郁 峰 封面设计 李志云

出版发行 同济大学出版社

(上海四平路 1239 号 邮编 200092 电话 021-65985622)

经　销 全国各地新华书店

印　刷 同济大学印刷厂印刷

开　本 787mm×1092mm 1/16

印　张 7

字　数 179 000

印　数 1—3 100

版　次 2004 年 9 月第 1 版 2004 年 9 月第 1 次印刷

书　号 ISBN 7-5608-2891-4/O・257

定　价 11.00 元

前　言

今天，对于一个力学工作者来说，张量分析实在是一个极其重要的数学工具。

力学是自然科学中最早建立完备科学体系的一门学科，也是在自然科学中运用定量分析工具——数学最多的一门学科。几个世纪以来，数学和力学之间的相互影响是十分显著的。一方面，力学充分使用数学来表述和预测；另一方面，力学的需要则促进了数学的发展。德裔美国力学教授 W. Flügge 在他的《张量分析与连续介质力学》一书的“序”中写道：“由于牛顿动力学的需要产生了微积分，为了对力系的描述发展了矢量代数，对速度场和力场的研究发展了矢量分析，从力学的能量原理中产生了变分法”；又写道：“张量（Tensor）这个名字本身就表明它的来源是弹性理论。”

有的著作指出，是晶体物理学家 W. Voigt 首先把张量分析用于晶体物理的。

张量分析这门数学分支的最终建立是数学家的贡献，尤其是微分几何学家的贡献。一般认为，张量概念是 19 世纪由高斯（Gauss）、黎曼（Riemann）、克里斯托夫（Christoffel）等人在发展微分几何过程中引入的。在此基础上，1887～1901 年间，瑞西（T. Ricci）和他的学生勒维・季维塔（Levi Givita）创立了张量分析的基本框架。陈省身曾评论说，瑞西是张量分析的始祖。然而，虽然这些大师们都努力介绍过张量分析的某些应用，但当时却很少引起人们的注意。直到 1916 年，爱因斯坦（Einstein）用黎曼几何和张量分析作为工具来阐述他的广义相对论以后，才极大地推动了微分几何的发展；同时，张量分析也才开始被重视起来，成为了一个强有力的数学工具。当前，张量分析已广泛应用于理论物理、连续介质力学以及其他一些边缘学科之中；特别是在连续介质力学的近代表述中，无不采用张量分析作为数学工具。今天，不熟悉张量分析的人去阅读连续介质力学的文献时会感到困难。所以，不仅是高等学校的理工科学生，而且许多工程技术人员都产生了掌握张量分析这一数学工具的愿望。

本书作者自 1990 年开始给同济大学工程力学专业的本科生和研究生讲授张量分析与连续介质力学课程；为编写讲稿，参考了国内主要的专著、译著和教材，后几经修改，构成了本书的主要内容。

作者建议，读者可以根据自己的学习时间，按两种方式阅读本书。第一种方式是按章全文阅读；第二种方式是只阅读第一章、第三章和第五章，而把第二章和第四章分别作为进一步学习连续介质力学和壳体理论前的准备，稍后再阅读。由于这种安排，按第一种方式阅读的读者可能会觉得第五章与第二章的有关内容略有重复，建议这类读者只阅读第五章的第一节和第二节。

限于作者水平，本书难免有不足甚至错误之处，诚恳希望广大读者批评指正。

作　者

2004 年 4 月 30 日

目　录

第1章 曲线坐标系

在解决数学物理问题时，一般都要首先选定坐标系。比较常用的是直角坐标系，也称笛卡尔直角坐标系。通常用 $Oxyz$ 表示笛卡尔直角坐标系。其中，O 是坐标原点，x，y 和 z 是三个坐标轴。

如果用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 表示沿 x,y,z 轴的单位矢量(称为基矢量)，则任意一个矢量可以按下式分解：

$$\boldsymbol{p}=p_x\boldsymbol{i}+p_y\boldsymbol{j}+p_z\boldsymbol{k} \tag{1.0.1}$$

式中，p_x,p_y,p_z 称为矢量 $\boldsymbol{p}$ 关于笛卡尔直角坐标系 $Oxyz$ 的分量。

矢量的点积是一个很重要的概念。设有两个非零矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，按下式定义它们之间的点积(也称数量积、标量积或内积)：

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle \tag{1.0.2}$$

式中，$|\boldsymbol{u}|$ 表示矢量 $\boldsymbol{u}$ 的长度，也称为它的模或绝对值。$\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle$ 表示矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 之间的夹角。注意，内积的这个定义式是与坐标系无关的。

笛卡尔直角坐标系的三个基矢量是相互正交的。由上述点积定义知，它们具有以下正交归一关系：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1,\quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,\quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1\\&\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0,\quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0\end{aligned} \tag{1.0.3}$$

即相同基矢量的点积是1，不同基矢量的点积为零。

利用点积运算，容易求出任意矢量在三个坐标轴上的分量。事实上，将式(1.0.1)的两端分别点乘基矢量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，则依次有

$$p_x=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{i},\quad p_y=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{j},\quad p_z=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k} \tag{1.0.4}$$

下面看看，在笛卡尔直角坐标系中，怎样用分量表示两个矢量之间的点积。假设矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 有着像式(1.0.1)那样的分解式，则

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=(u_x\boldsymbol{i}+u_y\boldsymbol{j}+u_z\boldsymbol{k})\cdot(v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k})=u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z \tag{1.0.5}$$

读者可以把两个括号内的求和项逐项乘开，利用正交归一关系式(1.0.3)，就得到最后一个等式的右边。

1.1 斜角直线坐标系

应该看到，之所以矢量点积有着像式(1.0.5)那样简单的表达式，是因为笛卡尔直角坐标系的三个基矢量之间存在正交归一关系式(1.0.3)。为了说明这一点，我们来看看斜角直线坐标系。以图1.1所表示的二维斜角直线坐标系 Ox^1x^2 为例。其中，x^1 和 x^2 为两个坐标轴，两轴之间的夹角为 φ。这里，右上角的数字代表上标而不是幂次。本书中，如无特别

说明，字母右上角的数字都代表上标。选取沿 x^1 和 x^2 正向的矢量 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 为参考矢量（可以不是单位矢量），则 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 就构成了斜角直线坐标系的一组基。在这一组基下，按照矢量分解的平行四边形法则，任意一个矢量 $\boldsymbol{p}$ 可以有类似于式(1.0.1)的分解式（或称展开式）：

$$\boldsymbol{p}=p^1\boldsymbol{g}_1+p^2\boldsymbol{g}_2=\sum_{\alpha=1}^{2}p^\alpha\boldsymbol{g}_\alpha=p^\alpha\boldsymbol{g}_\alpha \tag{1.1.1}$$

式(1.1.1)中的最后一项表示，我们在某种约定下，可以省去求和号，所以称为**约定求和**。通常把这个约定称为**爱因斯坦约定**。其内容是：凡在同一项中，上、下指标成对出现，就要求和。这个成对出现的指标，如式(1.1.1)中的 α，称为**哑(指)标**。一般规定，用希腊字母（即 $\alpha,\beta,\cdots$）表示的指标，取值范围是 1 和 2，所以也称为二维指标。用拉丁字母（即 $i,j,\cdots$）表示的指标，取值范围是 1,2 和 3，所以也称为三维指标。哑标可以随意更换字母，例如，$p^\alpha\boldsymbol{g}_\alpha=p^\beta\boldsymbol{g}_\beta$。

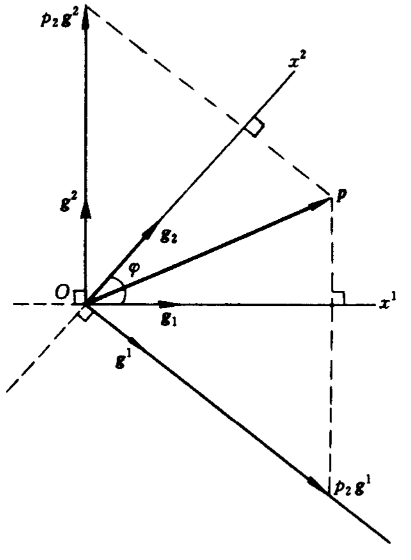


图 1.1　斜角直线坐标系的协变基和逆变基

由于斜角直线坐标系中的基矢量不相互正交，且不是单位矢量，所以点积的坐标表达式很繁杂。这可以从图 1.1 中的二维斜角直线坐标系看出。这时，点积的坐标表达式可以通过乘开下式的右端，利用式(1.0.2)而得到：

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=(u^1\boldsymbol{g}_1+u^2\boldsymbol{g}_2)\cdot(v^1\boldsymbol{g}_1+v^2\boldsymbol{g}_2)$$

可以看出，其结果是很繁杂的。

为了使斜角坐标系中的矢量点积运算也有类似于在笛卡尔直角坐标系中的简捷表达式，见式(1.0.5)，我们再引入一套与 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 对偶的参考矢量 $\boldsymbol{g}^1$ 和 $\boldsymbol{g}^2$。要求它们与 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 垂直，即

$$\boldsymbol{g}^1\cdot\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{g}^2\cdot\boldsymbol{g}_1=0 \tag{1.1.2a}$$

并使

$$\boldsymbol{g}^1\cdot\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{g}^2\cdot\boldsymbol{g}_2=1 \tag{1.1.2b}$$

式(1.1.2b)说明，虽然新引入的参考矢量 $\boldsymbol{g}^1$ 和 $\boldsymbol{g}^2$ 一般也不是单位矢量（因为 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 并不一定是单位矢量），但它们与 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 之间是按相应内积的值归一的。式(1.1.2b)还说明，$\boldsymbol{g}^1$ 与 $\boldsymbol{g}_1$ 及 $\boldsymbol{g}^2$ 与 $\boldsymbol{g}_2$ 的夹角都是锐角。由图 1.1 知，当 φ 为锐角时，此夹角为 $\frac{\pi}{2}-\varphi$，当 φ 为钝角时，为 $\varphi-\frac{\pi}{2}$。所以，参考矢量 $\boldsymbol{g}^1$ 和 $\boldsymbol{g}^2$ 的长度分别是

$$|\boldsymbol{g}^1|=\frac{1}{|\boldsymbol{g}_1|\sin\varphi},\quad |\boldsymbol{g}^2|=\frac{1}{|\boldsymbol{g}_2|\sin\varphi} \tag{1.1.3}$$

以上说明，按式(1.1.2)可以惟一地确定一组新的基矢量 $\boldsymbol{g}^1$ 和 $\boldsymbol{g}^2$。式(1.1.2)可以统一地表示成

$$\boldsymbol{g}^{\alpha}\cdot\boldsymbol{g}_{\beta}=\boldsymbol{g}_{\beta}\cdot\boldsymbol{g}^{\alpha}=\delta_{\beta}^{\alpha} \tag{1.1.4}$$

这里，δ_{β}^{α}称为二维 Kronecker 符号，其值为

$$\delta_{\beta}^{\alpha}=\begin{cases}1, & 当\ \alpha=\beta\\ 0, & 当\ \alpha\neq\beta\end{cases} \tag{1.1.5}$$

为了区别 $\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2$ 和 $\boldsymbol{g}^1,\boldsymbol{g}^2$ 这两组基矢量，我们称沿坐标线的一组基矢量 $\boldsymbol{g}_{\alpha}$ 为**协变基矢量**，而称新引入的另一组基矢量 $\boldsymbol{g}^{\alpha}$ 为**逆变基矢量**。任意一个矢量 $\boldsymbol{p}$ 既可以按协变基分解，如式(1.1.1)所示，也可以按逆变基分解，即有

$$\boldsymbol{p}=p_{\alpha}\boldsymbol{g}^{\alpha}=p^{\alpha}\boldsymbol{g}_{\alpha} \tag{1.1.6}$$

以上是二维情况。对于三维斜角直线坐标系，设协变基是 $\boldsymbol{g}_i$，则逆变基 $\boldsymbol{g}^i$ 按下式引入：

$$\boldsymbol{g}^{i}\cdot\boldsymbol{g}_{j}=\delta_{j}^{i} \tag{1.1.7}$$

式中，δ_j^i是三维 Kronecker 符号，其值为

$$\delta_{j}^{i}=\begin{cases}1, & 当\ i=j\\ 0, & 当\ i\neq j\end{cases} \tag{1.1.8}$$

任意一个三维矢量 $\boldsymbol{p}$ 都可以在协变基和逆变基这两组基下分解：

$$\boldsymbol{p}=p^{i}\boldsymbol{g}_{i}=p_{i}\boldsymbol{g}^{i} \tag{1.1.9}$$

其中，矢量 $\boldsymbol{p}$ 在协变基下的分量 p^i 称为矢量的**逆变分量**，在逆变基下的分量 p_i 称为矢量的**协变分量**。利用这两组基矢量，可以方便地表示矢量的任意分量，而且表达式和在笛卡尔直角坐标系中一样简单，见式(1.0.4)。事实上，把式(1.1.9)中的第一个等号的两端同时点乘逆变基 $\boldsymbol{g}^i$，就有

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{g}^{i}=p^{j}\boldsymbol{g}_{j}\cdot\boldsymbol{g}^{i}=p^{j}\delta_{j}^{i}=p^{i} \tag{1.1.10a}$$

其中，倒数第二个等号之所以成立是因为式(1.1.7)。又因为式(1.1.8)，所以只有当上式右端 $p^j\delta_j^i$ 中的 p^j 等于 p^i 时，才有非零值。当然，也可以认为 $p^j\delta_j^i$ 是关于哑指标 j 的三项求和式，其中只有当 j 等于 i 的项非零。类似地，把式(1.1.9)中的第二个等号的两端同时点乘协变基 $\boldsymbol{g}_i$，就有

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{g}_{i}=p_{j}\boldsymbol{g}^{j}\cdot\boldsymbol{g}_{i}=p_{j}\delta_{i}^{j}=p_{i} \tag{1.1.10b}$$

把上两式写在一起就是

$$p^{i}=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{g}^{i}\quad 和\quad p_{i}=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{g}_{i} \tag{1.1.11}$$

式(1.1.11)是任意矢量在两组对偶基下的分量表达式，它们和笛卡尔直角坐标系下的类似表达式(1.0.4)一样简单。

引进逆变基以后，还可以使矢量点积的形式简单。这只要把进行点积的两个矢量分别在协变基和逆变基中分解就可以了。例如

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u_{i}\boldsymbol{g}^{i}\cdot v^{j}\boldsymbol{g}_{j}=u_{i}v^{j}\boldsymbol{g}^{i}\cdot\boldsymbol{g}_{j}=u_{i}v^{j}\delta_{j}^{i}=u_{i}v^{i} \tag{1.1.12a}$$

注意，第二个等号表示左端的两个求和式逐项相乘的结果。类似还有

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u^i\boldsymbol{g}_i\cdot v_j\boldsymbol{g}^j=u^iv_j\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^j=u^iv_j\delta_i^j=u^iv_i \tag{1.1.12b}$$

式(1.1.12)表明，使用互为对偶的协变基和逆变基以后，矢量点积的形式和在笛卡尔直角坐标系下一样简单，见式(1.0.5)。

通过本节的讨论可以看出，在笛卡尔直角坐标系中，之所以矢量点积的坐标表达式具有简单的形式，其原因在于笛卡尔直角坐标系具有基矢量正交归一的特性。对于基矢量不相互正交的一般坐标系，矢量点积的坐标表达式就复杂了。克服的方法是采用两套基矢量。沿坐标轴的(原来的)基矢量称为**协变基矢量**，按式(1.1.7)引入的基矢量称为**逆变基矢量**。它们之间满足正交归一关系。

1.2 曲线坐标系的基矢量

我们知道，对于一个数学物理问题，总可以选择三个独立参数(实变数)来描述点在三维空间中的位置。这样的独立参数称为点在三维空间中的**坐标**。坐标与点是一一对应的。令三个参数中的某一个连续变动其值，而另外两个保持不变，则该点将描出一条轨迹曲线。称该轨迹曲线为坐标线。因为有三个独立参数，所以通过三维空间的每一点必有三根不共面的坐标线。一般情况下，坐标线是曲线。当三个参数中的一个保持不变，而其余两个参数连续变动其值，则所形成的点的集合就构成坐标面。通过三维空间的每一点必有三个坐标面。一般情况下，坐标面是曲面。

在三维空间中取一定点 O。从定点 O 出发，指向 M 点的矢量 $\boldsymbol{r}$，称为 M 点的矢径。考虑点 $M(x^1,x^2,x^3)$ 附近的矢径微段 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，显然有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i \tag{1.2.1}$$

此式分母中的上标表示整个分式的下标，所以满足约定求和的指标规定。i 是哑指标。式(1.2.1)中的偏导数 $\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^i}$ 是经过 M 点的三个矢量，它们沿坐标线 x^i 的切线方向，且指向坐标增加的一侧。我们选择 $\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^i}$ 作为点 M 附近的曲线坐标系的协变基矢量，即令

$$\boldsymbol{g}_i=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^i} \tag{1.2.2}$$

因为经过 M 点的三根坐标曲线不共面，所以这样定义的三个协变基矢量也不共面。又，选择 $\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_2$ 和 $\boldsymbol{g}_3$ 的顺序，使之构成右手系，这就要求

$$[\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_3]>0 \tag{1.2.3}$$

式中，符号 $[\boldsymbol{abc}]=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 表示矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 所构成的体积，称为**混合积**。按式(1.2.2)和式(1.2.3)定义的协变基矢量也称为**自然基**矢量。由式(1.2.1)和式(1.2.2)知

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{g}_i\mathrm{d}x^i \tag{1.2.4}$$

它说明，这样定义的协变基矢量保证了 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是矢径的全微分。

与斜角直线坐标系类似，我们同样可以依照式(1.1.7)定义曲线坐标系的逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i$。

显然，斜角直线坐标系中的相应公式(1.1.9)～式(1.1.12)对于这里的曲线坐标系仍然适用。所不同的只是在曲线坐标系中，基矢量的大小和方向都跟随点的位置变化而变化，基矢量是点的位置的函数，即有 $\boldsymbol{g}_i=\boldsymbol{g}_i(x^1,x^2,x^3)$，$\boldsymbol{g}^i=\boldsymbol{g}^i(x^1,x^2,x^3)$。不像直线坐标系那样，空间各点处的基矢量都相同，并不跟随点的位置变化。所以，曲线坐标系是**局部坐标系**，而直线坐标系是**整体坐标系**。我们知道，任何矢量型的物理量(例如力、速度等)总是附着在空间某个确定的点上的。例如，对于力来说，这个点就是它的作用点。对于流场中的流速，这个点就是某一特定的空间位置。对于线元 ds，这个点就是假定该无限小量收敛到零的那个点。在曲线坐标系中，对于任何矢量都必须明确这样一个点。相应的基矢量就取自这一点。所谓矢量的分解，就是指按该点处的基矢量进行分解。

1.3 坐标变换

为了讨论坐标变换，假设除了已经建立的坐标系 x^i 以外，再引入一组"新"坐标系 $x^{i'}$，其中 i' 仍然取值 1,2,3。加上撇号只不过表示它们是新坐标系中的指标，以示与原坐标系中的指标 i 有所区别而已。

从坐标系 x^i 到 $x^{i'}$ 的坐标变换用下式表示：

$$x^{i'}=x^{i'}(x^1,x^2,x^3)=x^{i'}(x^j) \tag{1.3.1}$$

其中，$x^{i'}$ 作为 x^j 的函数有所需要的各阶连续导数，且变换的雅可比式不等于零：

$$\left|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right|\neq 0 \tag{1.3.2}$$

因而式(1.3.1)有逆变换

$$x^i=x^i(x^{1'},x^{2'},x^{3'})=x^i(x^{j'}) \tag{1.3.3}$$

这两组坐标系有各自的基矢量。设老坐标系 x^i 的协变基和逆变基是 $\boldsymbol{g}_i$ 和 $\boldsymbol{g}^i$。新坐标系 $x^{i'}$ 的协变基和逆变基是 $\boldsymbol{g}_{i'}$ 和 $\boldsymbol{g}^{i'}$。当然可以把新坐标系的每一个协变基在老坐标系的协变基中分解，写成

$$\boldsymbol{g}_{i'}=\beta_{i'}^{j}\boldsymbol{g}_j \tag{1.3.4}$$

此式与式(1.1.9)类似。其中，i' 是自由指标，代表三个式子，分别是三个新协变基 $\boldsymbol{g}_{i'}$ 在老协变基中的分解式。j 是哑指标，表示三项求和。变换系数 $\beta_{i'}^{j}$ 称为**协变变换系数**，由九个数组成。注意，上式中等号两端的自由指标是平衡的，即指标符号相同且上下位置相同。在张量指标系统中，这是必须保证的。

类似地，也可以把新坐标系的逆变基在老坐标系的逆变基中分解，写成

$$\boldsymbol{g}^{i'}=\beta_{j}^{i'}\boldsymbol{g}^j \tag{1.3.5}$$

变换系数 $\beta_{j}^{i'}$ 称为**逆变变换系数**，也由九个数组成。

由于在新坐标系中存在关系 $\boldsymbol{g}_{i'}\cdot\boldsymbol{g}^{k'}=\delta_{i'}^{k'}$，将式(1.3.4)和式(1.3.5)代入，得

$$\delta_{i'}^{k'}=\boldsymbol{g}_{i'}\cdot\boldsymbol{g}^{k'}=\beta_{i'}^{j}\boldsymbol{g}_j\cdot\beta_{l}^{k'}\boldsymbol{g}^l=\beta_{i'}^{j}\beta_{l}^{k'}\boldsymbol{g}_j\cdot\boldsymbol{g}^l=\beta_{i'}^{j}\beta_{l}^{k'}\delta_{j}^{l} \tag{1.3.6}$$

式(1.3.6)中的最后一个等号成立是因为在老坐标系中也存在关系 $\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^j=\delta_i^j$。在最右端

项中，l 是哑指标，表示约定求和。由于只有当 l 取值为 j 时，$\delta^l_j=1$，其余均为零，所以，式(1.3.6)也可以继续写成 $\beta^j_{i'}\beta^{k'}_j$。当然，也可以在最右端项中对 j 求和，得到 $\beta^l_{i'}\beta^{k'}_l$。这两个结果是相同的。最终有

$$\beta^j_{i'}\beta^{k'}_j=\delta^{k'}_{i'} \tag{1.3.7}$$

此式有两个自由指标 i'和 k'，表示有 $3^2=9$ 个方程。这说明，可以求解九个未知数。通常情况是，知道一组变换系数，例如式(1.3.4)中的协变变换系数 $\beta^j_{i'}$，就可以求出式(1.3.5)中的另一组逆变变换系数 $\beta^{k'}_j$。反之亦然。事实上，如果我们把变换系数的九个数按矩阵排列，其中，下指标表示行，上指标表示列，则式(1.3.7)可以写成

$$\begin{bmatrix}\beta^1_{1'} & \beta^2_{1'} & \beta^3_{1'}\\ \beta^1_{2'} & \beta^2_{2'} & \beta^3_{2'}\\ \beta^1_{3'} & \beta^2_{3'} & \beta^3_{3'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta^{1'}_1 & \beta^{2'}_1 & \beta^{3'}_1\\ \beta^{1'}_2 & \beta^{2'}_2 & \beta^{3'}_2\\ \beta^{1'}_3 & \beta^{2'}_3 & \beta^{3'}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1.3.8}$$

它表示，由 $\beta^j_{i'}$ 和 $\beta^{k'}_j$ 组成的系数矩阵互为逆矩阵。

以上讨论的是，新基用老基表示。反过来，老基也可以用新基表示。先推导老协变基在新协变基中的分解式。为此，用 $\beta^{i'}_k$ 乘式(1.3.4)两端，得

$$\beta^{i'}_k\boldsymbol{g}_{i'}=\beta^{i'}_k\beta^j_{i'}\boldsymbol{g}_j \tag{1.3.9}$$

再看式(1.3.8)，因为左端两个矩阵互为逆矩阵，所以可以交换位置，得到下述关系式：

$$\begin{bmatrix}\beta^{1'}_1 & \beta^{2'}_1 & \beta^{3'}_1\\ \beta^{1'}_2 & \beta^{2'}_2 & \beta^{3'}_2\\ \beta^{1'}_3 & \beta^{2'}_3 & \beta^{3'}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta^1_{1'} & \beta^2_{1'} & \beta^3_{1'}\\ \beta^1_{2'} & \beta^2_{2'} & \beta^3_{2'}\\ \beta^1_{3'} & \beta^2_{3'} & \beta^3_{3'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1.3.10}$$

此式可以写成

$$\beta^{i'}_k\beta^j_{i'}=\delta^j_k \tag{1.3.11}$$

把式(1.3.11)代入式(1.3.9)，就得到

$$\boldsymbol{g}_k=\beta^{i'}_k\boldsymbol{g}_{i'} \tag{1.3.12}$$

这就是老协变基按新协变基分解的表达式。再用 $\beta^j_{i'}$ 乘式(1.3.5)的两端(同时把式(1.3.5)右端的哑指标 j 换成 k)，得

$$\beta^j_{i'}\boldsymbol{g}^{i'}=\beta^j_{i'}\beta^{i'}_k\boldsymbol{g}^k \tag{1.3.13}$$

把式(1.3.11)代入，可得

$$\boldsymbol{g}^j=\beta^j_{i'}\boldsymbol{g}^{i'} \tag{1.3.14}$$

这就是老逆变基按新逆变基分解的表达式。

可以看出，在新老坐标系的基矢量的四组相互表达式中，只需要两组变换系数 $\beta^j_{i'}$ 和 $\beta^{i'}_j$。这两组变换系数又通过式(1.3.7)相互联系，所以只要一组变换系数就足够了。带撇“′”的指标是下指标者叫协变变换系数，带撇“′”的指标是上指标者叫逆变变换系数。现在介绍它

们的求法。

根据协变基矢量的定义式(1.2.2)，老坐标系的协变基是 $\boldsymbol{g}_i=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}$，新坐标系的协变基是 $\boldsymbol{g}_{i'}=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{i'}}$。由于新老坐标系之间存在变换关系式(1.3.1)和式(1.3.3)，利用复合函数的求导公式，有

$$\boldsymbol{g}_{i'}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{i'}}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}=\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\boldsymbol{g}_j \tag{1.3.15}$$

将此式与式(1.3.4)比较(利用 $\boldsymbol{g}_j$ 的线性无关性)知

$$\beta_{i'}^j=\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \tag{1.3.16}$$

同理，可得

$$\beta_j^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \tag{1.3.17}$$

上两式中，i'和 j 均为自由指标，故各自对应有 $3^2=9$ 个关系式。

下面，通过一个例子来说明变换系数的具体求法。设在三维空间中同时设立一个圆柱坐标系(ρ,φ,z)和一个笛卡尔直角坐标系($Oxyz$)。任意一点 p 的坐标 ρ,φ,z 和 x,y,z 之间满足如下关系：

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=z \tag{1.3.18}$$

不妨把圆柱坐标系看作老坐标系，即

$$x^1=\rho,\quad x^2=\varphi,\quad x^3=z$$

而把笛卡尔直角坐标系看作新坐标系，即

$$x^{1'}=x,\quad x^{2'}=y,\quad x^{3'}=z$$

所以，逆变变换系数 $\beta_j^{i'}$ 可以根据式(1.3.17)求出：

$$\beta_1^{1'}=\frac{\partial x}{\partial \rho}=\cos\varphi,\quad \beta_1^{2'}=\frac{\partial y}{\partial \rho}=\sin\varphi,\quad \beta_1^{3'}=\frac{\partial z}{\partial \rho}=0$$

$$\beta_2^{1'}=\frac{\partial x}{\partial \varphi}=-\rho\sin\varphi,\quad \beta_2^{2'}=\frac{\partial y}{\partial \varphi}=\rho\cos\varphi,\quad \beta_2^{3'}=\frac{\partial z}{\partial \varphi}=0$$

$$\beta_3^{1'}=\frac{\partial x}{\partial z}=0,\quad \beta_3^{2'}=\frac{\partial y}{\partial z}=0,\quad \beta_3^{3'}=\frac{\partial z}{\partial z}=1 \tag{1.3.19}$$

又由式(1.3.18)，有

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \tan\varphi=\frac{y}{x}$$

从而协变变换系数 $\beta_{i'}^j$ 为

$$\beta^1_{1'}=\frac{\partial\rho}{\partial x}=\cos\varphi,\quad \beta^2_{1'}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\sin\varphi}{\rho},\quad \beta^3_{1'}=\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\beta^1_{2'}=\frac{\partial\rho}{\partial y}=\sin\varphi,\quad \beta^2_{2'}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\cos\varphi}{\rho},\quad \beta^3_{2'}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$$\beta^1_{3'}=\frac{\partial\rho}{\partial z}=0,\quad \beta^2_{3'}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,\quad \beta^3_{3'}=\frac{\partial z}{\partial z}=1 \qquad (1.3.20)$$

不难验证,它们满足式(1.3.10)。利用和笛卡尔直角坐标系之间的变换关系还可以求曲线坐标系的协变基和逆变基。因为对于笛卡尔直角坐标系来说,协变基和逆变基是重合的,它们是

$$\boldsymbol{g}_{1'}=\boldsymbol{g}^{1'}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{g}_{2'}=\boldsymbol{g}^{2'}=\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{g}_{3'}=\boldsymbol{g}^{3'}=\boldsymbol{k}$$

所以,根据式(1.3.12),可以求出圆柱坐标系的三个协变基:

$$\boldsymbol{g}_1=\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{g}_2=-\rho\sin\varphi\boldsymbol{i}+\rho\cos\varphi\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{k} \qquad (1.3.21)$$

根据式(1.3.14),可以求出圆柱坐标系的三个逆变基:

$$\boldsymbol{g}^1=\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{g}^2=-\rho\sin\varphi\boldsymbol{i}+\rho\cos\varphi\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{g}^3=\boldsymbol{k} \qquad (1.3.22)$$

下面讨论给定坐标变换以后任意矢量在不同坐标系中的分量之间的变换关系。设任意矢量 $\boldsymbol{v}$ 在老坐标系 x^i 中的分解式是

$$\boldsymbol{v}=v_i\boldsymbol{g}^i=v^i\boldsymbol{g}_i \qquad (1.3.23)$$

这里,v_i 是矢量 $\boldsymbol{v}$ 在老坐标系下的协变分量,v^i 是在新坐标系下的逆变分量。矢量 $\boldsymbol{v}$ 在新坐标系 $x^{i'}$ 中的分解式是

$$\boldsymbol{v}=v_{i'}\boldsymbol{g}^{i'}=v^{i'}\boldsymbol{g}_{i'} \qquad (1.3.24)$$

其中,$v_{i'}$ 是矢量 $\boldsymbol{v}$ 在新坐标系下的协变分量,$v^{i'}$ 是在新坐标系下的逆变分量。将式(1.3.23)的第一个等式用式(1.3.14)改造后,得

$$\boldsymbol{v}=v_i\boldsymbol{g}^i=v_i\beta^i_{k'}\boldsymbol{g}^{k'}$$

再和式(1.3.24)的第一个等式相等,有

$$\boldsymbol{v}=v_{i'}\boldsymbol{g}^{i'}=v_i\beta^i_{k'}\boldsymbol{g}^{k'}$$

用 $\boldsymbol{g}_{j'}$ 点乘上式第二个等号的两端,得

$$v_{j'}=\beta^i_{j'}v_i \qquad (1.3.25)$$

这就是同一矢量在不同坐标系中的协变分量之间的变换关系。

同理,利用式(1.3.12),可将式(1.3.23)和式(1.3.24)的第二个等式写成

$$\boldsymbol{v}=v^{i'}\boldsymbol{g}_{i'}=v^i\beta^{k'}_i\boldsymbol{g}_{k'}$$

用 $\boldsymbol{g}^{j'}$ 点乘上式第二个等号的两端,得

$$v^{j'}=\beta^{j'}_i v^i \qquad (1.3.26)$$

这就是同一矢量在不同坐标系中的逆变分量之间的变换关系。

完全类推,如果把矢量 $\boldsymbol{v}$ 在新坐标系中分解,即从式(1.3.24)出发,再将其中的新基用

老坐标系中的老基表示，即将式(1.3.4)和式(1.3.5)代入，就可得到另两组变换关系：

$$v_i=\beta_i^{j'}v_{j'} \tag{1.3.27}$$

和

$$v^i=\beta_{j'}^{i}v^{j'} \tag{1.3.28}$$

1.4 张量

先看矢量。三维矢量有三个分量，如前述，每个分量在坐标变换式(1.3.1)下，满足如式(1.3.25)和式(1.3.26)或者式(1.3.27)和式(1.3.28)所描述的变换规律。可以把这个概念加以推广。如果一个量(或者数的集合)有 3^N 个分量(N 是幂指数)，其每个分量在三维空间 R^3 中的坐标变换式(1.3.1)下，满足以下变换规律：

$$T_{i'_1\cdots i'_m}^{j'_1\cdots j'_n}=\beta_{j_1}^{j'_1}\cdots\beta_{j_n}^{j'_n}\beta_{i'_1}^{i_1}\cdots\beta_{i'_m}^{i_m}T_{i_1\cdots i_m}^{j_1\cdots j_n} \tag{1.4.1}$$

式中，$m+n=N$，则称这个量为 N 阶张量。我们在前面称 v_i 为矢量的协变分量，v^i 为矢量的逆变分量。和这种称谓方法类似，通常把 $T_{i_1\cdots i_m}^{j_1\cdots j_n}$ 称为这个 N 阶张量的具有 **m 阶协变和 n 阶逆变的混变分量**。

按照这种定义，矢量是 1 阶张量(有 3^1 个分量)，矩阵(方阵)是 2 阶张量(有 3^2 个分量)，而标量是 0 阶张量(3^0 个分量)。

张量有多种类型。一种是**并乘张量**(并乘的概念在下一节中介绍)。例如，设由逆变分量和协变分量所给定的两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是已知的，则由等式

$$T_{ij}=a_ib_j,\quad T^{ij}=a^ib^j,\quad T_i^{\cdot j}=a_ib^j,\quad T_{\cdot j}^{i}=a^ib_j \tag{1.4.2}$$

所确定的量都是二阶张量。读者可以自行证明。按照这种乘法还可以构造高阶张量。这些张量可以是物理量，但目前只是形式的，并未赋予任何物理直观性。上式中，T_{ij} 称为张量的**协变分量**，T^{ij} 称为**逆变分量**，$T_i^{\cdot j}$ 和 $T_{\cdot j}^{i}$ 称为**混变张量**。在混变张量中，我们用点“·”标识一个空位，以强调指标的位置。例如，$T_i^{\cdot j}$ 表示 i 是第一指标，是协变指标；j 是第二指标，是逆变指标。而 $T_{\cdot j}^{i}$ 表示 i 是第一指标，是逆变指标；j 是第二指标，是协变指标。

还有一种办法可以构造张量。我们考察九个量 T_{ij}，它把矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 用下式联系起来：

$$a^iT_{ij}=b_j \tag{1.4.3}$$

它表示从任意矢量 $\boldsymbol{a}$ 到矢量 $\boldsymbol{b}$ 的映射。现在考虑坐标变换式(1.3.1)。利用矢量变换关系式(1.3.27)和式(1.3.28)，式(1.4.3)可改写成

$$a^{i'}\beta_{i'}^{i}T_{ij}=b_{k'}\beta_j^{k'} \tag{1.4.4}$$

用 $\beta_{j'}^{j}$ 乘这个方程的两端，利用式(1.3.7)，则右边等于

$$b_{k'}\beta_j^{k'}\beta_{j'}^{j}=b_{j'}$$

因此，式(1.4.4)变成

$$a^{i'}\beta_{i'}^{i}\beta_{j'}^{j}T_{ij}=b_{j'} \tag{1.4.5}$$

可以看出，当且仅当存在等式

$$T_{i'j'}=\beta_{i'}^{i}\beta_{j'}^{j}T_{ij}$$

时，对于矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 在新坐标系中的分量 $a^{i'}$ 和 $b_{j'}$，仍然满足类似于式(1.4.3)的关系

$$a^{i'}T_{i'j'}=b_{j'} \tag{1.4.7}$$

这说明，这九个量是张量。

连续介质力学中的应力张量就是按照这种方式构造的张量的一个例子。事实上，认为作用在面元上的力矢量 d$\boldsymbol{F}$ 与面元矢量 d$\boldsymbol{A}$ 之间有关系

$$\mathrm{d}F^i=\sigma^{ij}\,\mathrm{d}A_j$$

这就定义了应力张量的逆变分量。

还有其他类型的张量。例如，从式(1.3.6)可以看出，Kronecker 符号 δ^i_j 是一个一阶逆变、一阶协变的二阶混变张量。

1.5 张量的实体表示

矢量有两种表示法。一种是分量表示法，例如可以用协变分量 v_i 和逆变分量 v^i 表示矢量 $\boldsymbol{v}$。另一种是实体表示法，它是用矢量分量配以相应的基矢量而构成的。例如，下式就是矢量 $\boldsymbol{v}$ 的实体表示：

$$\boldsymbol{v}=v^i\boldsymbol{g}_i=v_i\boldsymbol{g}^i$$

实体表示法的优点是表现了矢量不随坐标变换而变化的本来性质。根据 1.3 节的有关公式可以看出，虽然矢量分量随坐标变换而变化，但基矢量也随坐标变换而变化，而且它们各自的变换系数之间满足式(1.3.7)或式(1.3.11)。所以矢量实体 $\boldsymbol{v}$ 并不随坐标变换而变化，即存在关系

$$\boldsymbol{v}=v^i\boldsymbol{g}_i=v^{i'}\boldsymbol{g}_{i'}=v_i\boldsymbol{g}^i=v_{i'}\boldsymbol{g}^{i'} \tag{1.5.2}$$

张量是矢量的推广。前边已经定义了张量的分量。与矢量实体类似，也可以定义张量实体。为此，先介绍矢量之间的一种乘法运算——**并乘**的概念。我们在前边介绍并乘张量时，曾经讲过，把两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的分量逐个相乘，所得到的一组数的集合 a_ib_i 构成了张量分量。矢量分量的这种乘法对应着矢量实体的并乘运算。两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 之间的并乘运算写作 $\boldsymbol{ab}$。并乘也叫张量乘，也写作 $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$。这是因为矢量并乘的结果是张量。并乘服从以下运算规律：

结合律 $(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc})=\boldsymbol{abc}$

分配律 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}$

数乘的结合律 $(m\boldsymbol{a})(n\boldsymbol{b})=(mn)\boldsymbol{ab}$

数乘的分配律 $m(\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{cd})=m\boldsymbol{ab}+m\boldsymbol{cd}$ (1.5.3)

但交换律不适用，即

$$\boldsymbol{ab}\neq\boldsymbol{ba} \tag{1.5.4}$$

矢量并乘的表达式称为**并矢式**，多个矢量并乘的表达式称为**多重并矢式**，例如，$\boldsymbol{abc}$ 和 $\boldsymbol{abcd}$ 分别称为三重并矢式和四重并矢式。

并矢是张量。例如，根据数乘的结合律，二重并矢 $\boldsymbol{ab}$ 当然有如下四种表达式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{ab}&=(a^i\boldsymbol{g}_i)(b^j\boldsymbol{g}_j)=a^ib^j\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\\&=(a^i\boldsymbol{g}_i)(b_j\boldsymbol{g}^j)=a^ib_j\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j\\&=(a_i\boldsymbol{g}^i)(b^j\boldsymbol{g}_j)=a_ib^j\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j\\&=(a_i\boldsymbol{g}^i)(b_j\boldsymbol{g}^j)=a_ib_j\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\end{aligned} \tag{1.5.5}$$

以式(1.5.5)的第一种表达式为例，依照式(1.3.28)和式(1.3.7)，有

$$ab = a^i b^j \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j = (\beta^i_{i'} a^{i'})(\beta^j_{j'} b^{j'})(\beta^{m'}_i \boldsymbol{g}_{m'})(\beta^{n'}_j \boldsymbol{g}_{n'}) = (\beta^i_{i'}\beta^{m'}_i)(\beta^j_{j'}\beta^{n'}_j) a^{i'} b^{j'} \boldsymbol{g}_{m'} \boldsymbol{g}_{n'}$$
$$= \delta^{m'}_{i'} \delta^{n'}_{j'} a^{i'} b^{j'} \boldsymbol{g}_{m'} \boldsymbol{g}_{n'} = a^{i'} b^{j'} \boldsymbol{g}_{i'} \boldsymbol{g}_{j'} \tag{1.5.6}$$

这就证明了 $\boldsymbol{ab}$ 是一个二阶张量。$a^i b^j$ 是它的逆变分量。因为 $\boldsymbol{ab}$ 并不随坐标系的变换而变化，所以，是一个张量实体，称为**并矢张量**。

基矢量是特殊的矢量，它们也可以进行并乘运算。因为三个协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 是线性无关的，逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i$ 也是线性无关的，所以它们的并矢，例如 $\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j$（共九个量，即 $\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}_3$），$\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j$，$\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j$ 和 $\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j$ 都各自构成一组线性无关的并矢，称为**并基**。式(1.5.5)说明，任意两个矢量的并矢张量都可按照这四组并基展开。把 $a^i b^j$，$a^i b_j$，$a_i b^j$ 和 $a_i b_j$ 分别称为并矢张量 $\boldsymbol{ab}$ 关于并基 $\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j$，$\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j$，$\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j$ 和 $\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j$ 的分量。

和矢量实体的构成类似，任意一个张量分量配上相应的并基就构成张量实体。例如

$$T = T_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j = T_i^{\cdot j}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j = T^i_{\cdot j}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j = T^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j \tag{1.5.7}$$

就构成了二阶张量实体 T。通常用黑体大写拉丁字母或者黑体大写希腊字母表示张量实体。在手写时，则用下划线代替黑体。例如$\underline{T}$。

利用张量（分量）的定义式(1.4.1)以及基矢量的坐标变换式(1.3.12)和式(1.3.14)，可以证明，张量实体，例如，三阶张量

$$T = T^{ijk}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k = T_i^{\cdot jk}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k = \cdots = T_{ijk}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k$$

不随坐标变换而变化，所以也称为张量的**不变性记法**。以后，在不同的场合，张量分量或者张量实体都可以称为张量。张量分量有几个自由指标，就是几阶张量。张量实体有几个并基，就是几阶张量。

1.6 度量张量

只要给定一个坐标系 x^i，则在空间的任意一点都有一组确定的协变基 $\boldsymbol{g}_i$ 和一组对偶的逆变基 $\boldsymbol{g}^i$。因为任意一个矢量都可以分别按这两组基来分解，所以特殊地，这两组基矢量也可以互相分解。把协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 按逆变基分解，类似于式(1.1.9)，记作

$$\boldsymbol{g}_i = g_{ij}\boldsymbol{g}^j \tag{1.6.1a}$$

其中的系数 g_{ij} 具有九个量。同样，把逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i$ 按协变基分解，记作

$$\boldsymbol{g}^i = g^{ij}\boldsymbol{g}_j \tag{1.6.1b}$$

其中的系数 g^{ij} 同样具有九个量。

类似于式(1.1.11)，可以得到

$$g_{ij} = \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j \tag{1.6.2a}$$

和

$$g^{ij} = \boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}^j \tag{1.6.2b}$$

因为点积可以交换次序，所以有

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad g^{ij} = g^{ji} \tag{1.6.3}$$

这说明 g_{ij} 和 g^{ij} 关于指标是对称的。式(1.6.1)和式(1.6.2)都可以作为 g_{ij} 和 g^{ij} 的定义。

这两组新引入的九个量之间存在以下关系：

$$g_{ik}g^{kj} = \delta^j_i \tag{1.6.4}$$

为了证明这一关系式，作协变基矢量与逆变基矢量之间的点积。有