



高等院校力学教材
Textbook in Mechanics for Higher Education

工程弹性力学与有限元法

陆明万 张雄 葛东云 编著

Lu Mingwan Zhang Xiong Ge Dongyun



清华大学出版社



Springer



高等院校力学教材
Textbook in Mechanics for Higher Education

工程弹性力学与有限元法

陆明万 张雄 葛东云 编著

Lu Mingwan Zhang Xiong Ge Dongyun



清华大学出版社
北京



Springer

内 容 简 介

本书是为“工程弹性力学”或“弹性力学与有限元”课程编写的教材。宗旨是简明而系统地讲述弹性力学的基本概念、基本原理和基本方法,为从事工程有限元应力分析打下坚实的力学理论基础。讲述中贯穿物理概念和基本思路的阐述,突出基本理论的灵活应用和工程应用实例的讲解。章末附有习题供读者训练。附录中补充相关数学知识。

本书第1篇讲述基本理论,强调对应力与应变张量、平衡与协调、边界条件等基本概念以及弹性力学一般原理的正确理解。第2篇讲述专门问题,选讲平面问题、轴对称问题、柱形杆扭转问题和板壳问题。第3篇讲述应变能和应变余能概念,能量原理和直接解法,并简要地介绍有限元法的基本思想。

本书可作为工科专业本科生或研究生教材,亦可供从事应力分析与强度设计的工程师与研究人员参考。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

图书在版编目(CIP)数据

工程弹性力学与有限元法/陆明万,张雄,葛东云编著. —北京:清华大学出版社,2005.10

(高等院校力学教材)

ISBN 7-302-11858-2

I. 工… II. ①陆… ②张… ③葛… III. ①工程力学:弹性力学 ②工程技术—有限元法
IV. ①TB125 ②TB115

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 109345 号

出 版 者: 清华大学出版社 地 址: 北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn 邮 编: 100084
社 总 机: 010-62770175 客户服务: 010-62776969

责任编辑: 杨 倩

印 刷 者: 北京国马印刷厂

装 订 者: 三河市金元装订厂

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

开 本: 175 × 245 印张: 14.5 字数: 310 千字

版 次: 2005 年 10 月第 1 版 2005 年 10 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-302-11858-2/O · 496

印 数: 1 ~ 4000

定 价: 21.00 元

前 言

随着现代工业与高新科技的迅猛发展,工程师们所面临的结构与设备设计任务变得越来越新颖、越来越复杂。目前我国高等院校工科专业教学大纲中所设置的基础力学课程(理论力学与材料力学)为学生打下了良好的力学基础,但是用于处理复杂结构部件的应力分析和强度设计问题还远远不够。学生们毕业后经常感到理论基础不足,需要在工作中通过自学来补充弹性力学、有限元法等课程的知识,然而这些课程的教材大多是为力学专业的学生或从事相关研究工作的专业人员编写的,理论较深,不易入门。随着教学改革的深入,许多工科院校都希望开设一门 48 学时左右的“工程弹性力学”或“弹性力学与有限元”课程,简明而系统地讲述弹性力学的基本概念、基本原理和基本方法,并简要地介绍有限元法的基本思想。

经典弹性力学具有丰富的内容和严密的理论体系,通常由三部分组成。第一部分是基本理论,讲述应力、应变、平衡、协调、能量等基本概念,建立三维弹性力学问题最一般的基本原理和求解方程体系。最终导出的求解方程是一组至今未能找到解析解的、十分复杂的偏微分方程。第二部分是简化问题的解析解,针对平面问题、柱形杆扭转问题、轴对称问题、板壳问题等各类专门问题的特点对弹性力学一般方程进行简化,讲授解析地求解这些简化方程的方法。其中一些经典问题(例如厚壁筒、小孔应力集中、裂纹尖端应力场、赫兹接触问题、回转壳薄膜理论等)的解析解在工程中发挥了指导性作用,成为制定工程强度设计规范的重要理论依据。第三部分是能量原理,讲述最小势能、最小余能等基本原理和瑞利-里茨、伽辽金、加权残量等近似解法,内容仍限于解析求解。可以看到,寻找解析解是经典弹性力学的特点和基本教学要求之一。完成上述教学要求一般需要 80~96 学时。

工科院校的“工程弹性力学”课程一般只有 32~48 学时,通常选用“弹性力学简明教程”,其特点是:①以简化的二维平面问题为核心来介绍弹性力学的基本理论和基本方法,降低较为抽象的弹性力学一般理论的教学要求;②选择性地讲授那些对工程应用有重要贡献的经典弹性力学解例,精简那些对学生数学基础要求较高的解法和解例。

随着计算机时代的来临,以有限元法为代表的数值方法迅速发展起来,为弹性力学开辟了崭新的通用求解途径。至今,任何复杂的工程结构部件都可以用有限元法求得满足工程精度要求的弹性力学数值解,给出相应的变形与应力分布。加上友好的用户输入界面及计算结果的图形显示和动画演示,有限元通用计算程序越来越受到工程师们的青睐,使工程应力分析与强度设计工作朝着更准确、更快速的方向产生了革命性的变化。有限元程序是一个高度自动化的“傻瓜”求解器,只要用户输入合理(但不一定正确)的初始数据,它就能给出漂亮(但不一定有用)的计算结果,用户无法通过逐步跟踪其求解过程来判断计算结果的正确性。于是,如何保证正确地建立简化计算模型,如何合理地判断最终计算结果的正确性,以及如何敏锐地预测导致错误结果的可能原因就成为有限元分析工程师的基本功。要培养这些能力必须系统地掌握弹性力学的基本概念和一般原理,而不只是知道若干弹性力学专门问题的具体解答。显然,现代“工程弹性力学”课程的教学内容需要作适当的调整。

根据作者多年讲授弹性力学课程和从事有限元分析研究的经验,本教材将突出如下特点:

(1) 加强三维弹性力学基本概念和一般原理的系统讲授。受学时所限,侧重力学概念的阐明与应用,精简严格的数学证明过程。

(2) 突出应力张量、应变张量等基本概念,在一般理论的推导中引入矩阵表示和运算方法。

(3) 增加与正确建立简化模型和合理评价计算结果相关的弹性力学知识。

(4) 放松弹性力学解析解法的教学要求,例题着重讲明概念,避免冗长的计算。

(5) 补充关于有限元法的简单介绍,并在教学中利用有限元程序和算例作辅助工具。

本书是为工程专业本科生(或有些专业的研究生)和从事应力分析与强度设计的工程师们编写的工程弹性力学教材。宗旨是简明而系统地讲述弹性力学的基本概念、基本原理和基本方法,为从事工程有限元应力分析打下坚实的力学理论基础。本书以重视物理概念和工程应用为特点,是作者为力学专业本科生和工程专业研究生编写的《弹性理论基础》教材(清华大学出版社/施普林格出版社,1990 年第 1 版,2001 年第 2 版)的姐妹篇。

本书第 8 章可以作为 16 学时左右的“工程板壳理论”选修课的教材。

本书楷体印刷的部分为选讲内容。

本书第 9 章、第 10 章和附录 C 由张雄编写,第 6 章、第 7 章和习题由葛东云编写,其余部分由陆明万编写。

陆明万 张 雄 葛东云
(清华大学航天航空学院)
2005 年 6 月于清华园

目 录

第 1 篇 基 本 理 论

第 1 章 绪论	3
1.1 概述	3
1.2 弹性力学的基本假设	4
1.3 载荷分类	5
第 2 章 应力与平衡	7
2.1 内力和应力	7
2.2 斜面应力公式	9
2.3 应力的坐标转换	12
2.4 应力莫尔圆	14
2.5 主应力和最大剪应力	16
2.6 应力张量、球量和偏量	21
2.7 平衡微分方程	23
习题	25
第 3 章 应变与协调	28
3.1 位移场的分解	28
3.2 应变张量	30
3.3 应变协调方程	35

习题	37
第 4 章 弹性力学基本方程和一般原理	39
4.1 广义胡克定理	39
4.2 弹性力学的基本方程及求解思路	43
4.3 边界条件与界面条件	47
4.4 弹性力学的一般原理	54
习题	58
 第 2 篇 专门问题 	
第 5 章 平面问题	63
5.1 平面问题分类及基本方程	63
5.2 平面问题基本解法	68
5.3 反逆法与半逆法	71
习题	75
第 6 章 轴对称问题	77
6.1 轴对称问题的基本方程	77
6.2 平面轴对称问题	81
6.3 非轴对称载荷情况	84
6.4 非完整轴对称体	90
习题	93
第 7 章 柱形杆扭转问题	95
7.1 柱形杆问题概述	95
7.2 柱形杆的自由扭转	97
7.3 柱形杆扭转问题的解	102
7.4 薄壁杆的扭转	107
7.5 较复杂的扭转问题	113
习题	115
第 8 章 板壳问题	118
8.1 板壳问题概述	118

8.2 薄板弯曲理论	120
8.3 矩形板解例	125
8.4 圆板和环板	132
8.5 回转壳的薄膜理论	136
8.6 圆柱壳的轴对称有矩理论	142
习题	150

第 3 篇 能量原理与有限元法

第 9 章 能量原理	155
9.1 应变能和应变余能	155
9.2 虚位移原理和最小势能原理	156
9.3 虚应力原理和最小余能原理	159
9.4 里茨法	161
9.5 加权残量法	162
习题	164

第 10 章 有限单元法	167
10.1 轴力杆单元	169
10.2 有限单元法的一般格式	176
10.3 二维常应变三角形单元	178
10.4 有限元模型化技术	181
习题	187

附 录

附录 A 矢量、张量与矩阵代数	191
A.1 矢量、张量的矩阵表示	191
A.2 矩阵代数、点积、叉积	192
A.3 坐标转换公式	195
附录 B 指标符号与张量运算	197
B.1 指标符号与求和约定	197
B.2 张量运算	200

习题.....	203
附录 C 有限单元法程序实现	205
C.1 结点和单元信息的读入	205
C.2 单元矩阵的计算	207
C.3 结构总体矩阵的组装	208
习题答案	212
参考文献	219

第 1 篇

基 本 理 论

- 第 1 章 绪论
- 第 2 章 应力与平衡
- 第 3 章 应变与协调
- 第 4 章 弹性力学基本方程和一般原理

第 1 章

绪 论

1.1 概 述

弹性力学是研究载荷作用下弹性体内力状态和变形规律的一门科学。这里, 载荷是指机械力、温度、电磁力等各种能导致物体变形和产生内力的物理因素。弹性体是指在载荷卸除后能完全恢复其初始形状和尺寸的物体。大多数工程结构, 在正常工作载荷范围内, 都可以简化为弹性体。

弹性力学是在不断解决工程实际问题的过程中发展起来的。1638 年伽利略 (Galileo, G.) 首先研究了建筑工程中梁的弯曲问题。1678 年胡克 (Hooke, R.) 根据金属丝、弹簧和悬臂木梁的实验结果提出了弹性体的变形与作用力 (更精确地说, 应变与应力) 成正比的物理定律, 为弹性力学打下了坚实的物理基础。1821—1822 年纳维 (Navier, L. M. H.) 和柯西 (Cauchy, A. L.) 导出了弹性理论的普遍方程, 为弹性力学奠定了严密的数学基础。此后, 许多学者针对一些典型的工程结构研究了柱型杆扭转与弯曲、平面问题、接触问题、应力集中以及板壳结构等一系列重要问题。现在弹性力学已经成为工程结构应力分析与强度、刚度设计的重要理论基础。

弹性力学的基本方程是一组十分复杂的偏微分方程, 一百多年来人们一直在努力寻找它的解析解, 但至今尚未成功。为此人们针对一些弹性力学专门问题的特点导出了相应的简化方程, 并成功地找到了若干经典问题 (例如厚壁筒、小孔应力集中、裂纹尖端应力场、赫兹 (Hertz, H. R.) 接触问题、回转壳薄膜理论等) 的解析解, 对工

程应用起到了极为重要的指导作用,成为许多工程强度设计规范的理论依据。另一方面,里茨(Ritz, W.)和伽辽金(Галёркин, Б. Г.)分别于1908年和1915年提出了基于能量原理的直接解法,开创了近似求解弹性理论问题的新途径。随着高速大型电子计算机的发展,有限差分法、有限元法、边界元法、无网格法等各种有效的数值计算方法如雨后春笋般地涌现出来。尤其是有限元法具有模拟任意复杂几何形状的广泛适用性,为求解任何复杂工程结构部件的弹性力学问题提供了通用有效的数值解法。随着工程结构的复杂性与工程设计的精度要求日益提高,有限元计算已经成为工程师们解决结构部件应力分析与强度、刚度设计问题的主要手段之一。

有限元程序是一个求解弹性力学问题的黑匣子,只要用户能够输入合理(但不一定正确)的初始信息,它就能给出漂亮(但不一定有用)的计算结果。再加上自动剖分单元和计算结果可视化等友好的用户界面,似乎现在人人都能像使用“傻瓜”照相机那样容易地掌握有限元程序、进行有限元分析了。其实,有限元分析对工程师们系统掌握和灵活应用弹性力学基础知识提出了更高的要求。首先,必须根据弹性力学基本原理来建立所研究结构部件的合理简化模型和给定的边界条件,以确保输入信息的正确性与有效性。否则即使程序判断输入信息合理,并顺利完成计算,也会因为建模上的致命错误,导致漂亮的分析结果完全无效。其次,必须依靠对弹性力学基本概念和基本原理的深入理解来判断有限元计算结果的正确性,一旦发现错误,又要敏感地预测导致错误的原因,以便尽快找到正确结果。由于有限元程序完全隐藏了问题的求解过程,用户无法用逐步跟踪求解过程的方法来验证计算结果和查找错误原因,可以形象地比喻说,有限元分析者是中医,他(她)只能通过号脉、观貌、听音、嗅味等表现手段来判断求医者是否有病、有什么病,这就要求大夫对病理和病因有更综合、更透彻的理解。本书希望能为读者将来应用有限元分析手段处理工程强度问题打下坚实的弹性力学理论基础。

本书只讨论弹性静力学问题,不涉及振动、波动、稳定性(屈曲)和非弹性材料等问题。

1.2 弹性力学的基本假设

弹性力学采用如下基本假设。

(1) **连续性假设** 认为物体由密实的连续介质组成,并在整个变形过程中保持其连续性,不会出现开裂或重叠现象。

弹性力学不考虑材料的微观粒子结构,而采用由宏观性能试验测定的材料统计物理性质(如质量、弹性常数、热膨胀系数等)来表征物体。在宏观物理学中,物质的四态(固体、流体、气体和等离子体)都可以简化为连续介质,具有弹性特性的连续介

质称为弹性体。

(2) **弹性假设** 认为在整个加、卸载过程中弹性体的变形与载荷存在一一对应的关系^①,且当载荷卸去后变形将完全消失,弹性体恢复其初始的形状和尺寸。

大多数工程材料在应力低于弹性极限时服从胡克定律,即应力与应变满足线性关系,称为**线性弹性**(简称**线弹性**)材料。当应力超过弹性极限后,材料中出现塑性变形,应力-应变将具有非线性的、与加载历史相关的关系;另外,有些工程材料的弹性应力应变关系也是非线性的,这都称为**材料非线性效应**。本书主要研究线弹性材料的小变形(变形和物体尺寸相比可以略而不计的)情况,这时不仅应力应变关系是线性的,而且应变与位移间的几何关系也是线性的,最终导致载荷与位移(变形)间也满足线性关系。但是在**大变形**情况下,应变与位移间将出现**几何非线性效应**,这时即使材料是线弹性的,载荷与变形的关系也将是非线性的。

(3) **均匀性假设** 认为材料的物理性质处处相同,与取样位置无关。

金属材料一般是均匀的。对于混凝土、玻璃钢、木材等非均质材料,如果只关心整体结构的受力与变形特征,也可以利用在足够大的材料试件上测得的等效弹性常数将其简化为均匀材料。近代研究表明,材料的细观结构及各组分间的界面强度对非均质材料的破坏具有重要影响,因此对于这类材料的破坏机理研究应该放弃均匀性假设。

(4) **各向同性假设** 认为材料的物理性质与测定方向无关。

金属材料 and 混凝土通常视为各向同性的。但是木材、纤维增强复合材料、地壳结构等通常是各向异性的。

(5) **无初应力假设** 认为物体在加载前处于无初始应力的自然状态。

其实加载前物体中已经存在初始内力场,例如分子间的相互引力以及由制造工艺(如铸造、焊接、强力拼装)引起的残余应力和装配应力等。但是由于初始内力场是一个与载荷无关的自平衡力系,可以单独求解,所以弹性力学引入无初应力假设,只考虑由载荷引起的附加内力场。这对大多数情况是适用的,但是对应力腐蚀等失效模式必须考虑残余应力的影响。

1.3 载荷分类

载荷是导致物体变形和产生内力的物理因素。

根据性质不同,载荷可以分为两大类。第一类称**机械载荷**,它们是作用在物体上的外力,例如重力、压力、推力、电磁力等。在外力作用下物体将同时产生变形和内

^① 这里不考虑物体在弹性屈曲后的行为。

力,当内力与外力相平衡时变形就停止。第二类是非机械载荷,或称物理载荷,它们能够引起物体变形的物理因素,例如温度变化(又称热载荷)引起物体热胀冷缩,中子辐照导致物体肿胀,电场使压电晶体变形,生物电流激励人体肌肉伸缩,有些含液的多孔高分子聚合材料当溶液浓度变化或受外电场作用时也会产生伸缩现象。非机械载荷并不直接引起内力,例如在均匀温度场中如果允许物体自由膨胀,则不会产生内力,仅当胀缩变形受到约束时物体内才会出现“热应力”。

根据作用域的不同,外力可以分为体积力和表面力。**体积力**是作用在物体内部体积上的外力,简称体力。例如重力、惯性力、电磁力等。在强电磁场中,物体内部体积上还受外力偶作用,但是对大多数工程问题体力偶可以忽略不计。**表面力**是作用在物体表面上的外力,简称面力。例如液体或气体对固体表面的压力、两个固体间的接触力等。材料力学中的**集中力**是高度集中的表面力的简化表示,在弹性力学中则应把集中力还原成作用在局部表面上的表面力来处理。

第 2 章

应力与平衡

本章基于静力学研究外力作用下物体的平衡状态。讲述应力张量的重要概念,导出应力应满足的平衡微分方程。本章不涉及物体的材料性质和变形情况,所得结论适用于任何连续介质。

2.1 内力和应力

当载荷作用于物体时将引起物体内部相邻部分间的相互作用力,称为内力。内力的分布一般是不均匀的,弹性力学要分析物体内部各点处的局部受力状态,以便准确地判断物体的安全性。为了考察 P 点处的内力,先用通过该点的截面(可以是平面或曲面)把物体切开,将内力暴露出来,如图 2-1(b)所示。由于截面上内力分布不均匀,必须引入应力的概念来描述局部受力状态。应力是单位面积截面上所受的内力,其量纲与压力相同,不同之处在于压力是作用在物体表面上的已知外力,属于载荷的一部分。为了给出应力的精确定义,以 P 为形心在截面上取一个面积为 ΔS 的面元,其单位外法线矢量为 ν 。面元上所受内力之合力为 ΔF (一般说它与法矢量 ν 不同向),见图 2-1(c)。当 $\Delta S \rightarrow 0$ 时(即面元趋于 P 点时),比值 $\Delta F / \Delta S$ 的极限称为应力矢量 $\sigma_{(\nu)}$

$$\sigma_{(\nu)} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} \quad (2.1)$$

对于小变形情况,取 ΔS 为面元变形前的初始面积;对大变形情况则取 ΔS 为面元变形后的实际面积。

应该指出,在刚体力学中,力可以看作自由矢量沿其作用线任意滑移,但在变形