

电磁场数值算法 与 MATLAB 实现

● 何红雨 编著

华中科技大学出版社

电磁场数值算法 与 MATLAB 实现

何红雨 编著

图书在版编目(CIP)数据

电磁场数值算法与 MATLAB 实现/何红雨 编著
武汉:华中科技大学出版社,2004 年 1 月
ISBN 7-5609-3068-9

I. 电…

II. 何…

III. 电磁场-数值计算-MATLAB-实现过程

IV. O441.4

电磁场数值算法与 MATLAB 实现

何红雨 编著

责任编辑:叶见欣

封面设计:刘 卉

责任校对:刘 竣

责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山

邮编:430074

电话:(027)87557437

录 排:华中科技大学出版社照排室

印 刷:湖北新华印务有限公司

开本:850×1168 1/32

印张:5.125

字数:116 000

版次:2004 年 1 月第 1 版

印次:2005 年 1 月第 2 次印刷

定价:15.00 元

ISBN 7-5609-3068-9/O · 301

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

序

我在武汉大学和华南师范大学曾讲授过许多有关电磁理论的课程,多年来一直想编写一本以帮助学生理解和学会计算电磁场边值问题为目的的参考书,因为边值问题既是数学物理方程的主要问题(如各种不同的特殊函数将对应不同的边值问题),又是从物理上如何理解电磁场的分布为什么既决定于电磁场的一般性质(如静电场中的泊松方程,时变场中的波动方程等),又决定于它所在的边界条件(如边界的不同的几何形状和导体或介质等)的问题。同时,电磁理论要应用到的实际问题,大多数都是有界问题,如电磁能传输,遇到的边值问题是波导或光纤的壁的边值问题;电磁波辐射,遇到的边值问题是天线口径或缝隙(在波导壁上开口)的边值问题等等。作为大学本科生刚刚学习电磁理论时,还不太熟悉如何将理论应用到实际问题中,故特别希望能有一本比一般习题指导书要深入和具体的参考书,去开拓眼界和涉猎更多的问题。我还清楚记得在大学二年级学习电磁理论,读到一些经典著作中对各种不同形状的导体和介质边界的电场或磁场的数学表达和力线图时所表现的惊奇和神秘感。这成为后来我的一种动力,在科研上自己动手设计和制作了一个用微波(3cm 和 10cm 波段)去探测不同介质和导电边界的圆柱体周围的电磁场分布的实验装置,实验获得了成功,其结果与用特殊函数求出来的解析解很好地一致。后来才知道我所用的实验方法正是国外大力发展的所谓“微波暗室”,可用来帮助设计不被雷达发现的“隐形飞机”。可惜当时由于没有计算机条件,不能在理论上计算复杂几何形状的边界的目标,仅只从实验上盲目试验,很难得到理想的结果。

本书可以说正是针对上述的要求呼之而出的产物。作者将电磁理论教科书的一些方法和例题,推广至用 MATLAB 来实现。正如书中介绍, MATLAB 是近年来被广泛应用在教学和科研中的计算机优秀软件,它与 BASIC、FORTRAN 及 C 语言比较,语法规则更简单,编程特点更贴近人的思维方式,对于大学生或研究生是应该和可以学会的。MATLAB 由主包和功能各异的工具箱组成。本书介绍的偏微分方程的图形用户界面,能使学生很方便根据边值问题设定几何模型、边界条件、网格剖分等,然后设定方程类型、参数,很快就能得出数值结果和图形显示。

本书的优点是简明易懂,十分详细地介绍了电磁场边值问题计算的各种方法,着重介绍了用 MATLAB 去实现边值问题计算的具体方法和步骤。本书既是一本好的参考书,又是一本好的可指导学生学会运用 MATLAB 的工具书。本书还介绍了有限单元法,从有限单元法的泛函变分原理引出离散形式的计算式子,既有理论深度又有可实现的具体操作性。可以说,本书是对不同层次的学生或教师都有用的参考书。

侯宗祥

二〇〇三年六月廿五日
于 华东师范大学

前 言

二维静态电磁场的边值问题是求解电磁场的基础,是广大电磁场工程技术人员及相关研究工作者经常面临的问题。因此,二维静态电磁场边值问题的计算,在工程电磁场领域具有重要的意义。传统的数学解析法(如分离变量法或镜像法)即精确解的方法,只对一些特殊对称的边界才能求解,并且求解过程繁杂,甚至在许多实际问题中,由于边界条件过于复杂而无法求出解析解。随着计算机技术的发展,无论是特殊的对称边界还是一般复杂的边界的二维静态电磁场的边值问题,都能用计算机进行数值求解,并且理论上可以达到任意要求的精度。

本书主要讨论二维静态电磁场数值计算方法及如何用 MATLAB 来实现。MATLAB 是近年来在欧美地区十分流行的一种通用性很强的、高性能的、专门用于科学和工程计算和可视化的优秀工具软件,它集数值分析、矩阵计算、信号处理和图形显示于一体,构成了一个方便的界面友好的用户环境。如今, MATLAB 在国内的知名度越来越大,并被广泛应用于教学和科研。MATLAB 有以下几大特点:一是功能强大,包括数值计算、符号运算和作图,编程语法简单,用简单的指令就可以完成大量的计算与图形处理,计算结果可视化;二是操作界面简单,语言自然,它以复数与矩阵为计算单元,使用的数学符号和数学表达式与标准的相近;三是开放性强。其大部分指令的程序是开放的,用户可以模仿和修改。此外, MATLAB 更强大的功能表现在,有大量的工具箱,如控制系统,数值模拟,信号处理及偏微分方程等工具箱;用户可以开发自己的专用工具箱,可方便科技工作者在更专门的领域里应用。

本书介绍了数值积分法、有限差分法和有限单元法的数学基

本原理,并通过实例,以 MATLAB 实现数值计算为核心进行展开,来说明 MATLAB 在二维静态电磁场边值问题数值求解中的优越性,其优点主要体现在以下三个方面。一是理论分析与数值求解的结合可加深对场域电位分布情况的了解。一般情况下,很难通过解析解来把握场域的电位分布情况,如果能够把 MATLAB 的数值计算与解析解结合起来,综合分析场域内的电位分布情况,就既可在求解拉普拉斯方程边值问题时体现物理问题与数学结合的研究方法,又可通过数值求解来算出各点的电位值和作出分布图形,直观地分析场域内各点场的分布情况。二是可靠的数值求解法可应用于复杂的边界问题。因为,对于一些复杂边界的场域,用理论求解是无能为力的,但用数值计算方法却能够解决,对于不同的二维边界问题,可用 MATLAB 编程进行数值计算,不仅程序简单,可靠性高,而且适应范围广,只要对 MATLAB 程序作适当修改,就可以计算一些边界条件比较复杂的场域问题。三是正确有效的数值解可以检验解析解的准确性。对于一些由理论计算得出的解析解,由于求解的复杂性,往往不清楚结果是否正确或合理,这时可以直接用 MATLAB 编程或工具箱的数值计算结果或图形来分析和验证解析解的正确性。

作者曾到华南师范大学做访问学者,在该校物理与电信工程学院博士生导师保宗悌教授的指导下开展教学和课题研究工作,并取得了一定的研究成果。本书就是在这个基础上进行编著的。在编著过程中,保宗悌教授对本书提出了许多指导性意见,提供了有用的参考资料,并从繁忙的教学、科研中抽出时间对本书认真做了审查,并为本书作序。华南理工大学郭平生、蒋昌云博士对本书提出了很好的修改意见。在此谨向他们表示诚挚的谢意!

由于作者学识水平有限,书中难免有缺点和不足之处,恳请专家和读者们批评指正。

何红雨

2003 年 6 月

目 录

第 1 章 绪论	(1)
1.1 电磁场理论产生的背景及其意义	(1)
1.2 电磁场问题计算方法的重要性	(3)
1.3 电磁场问题计算方法分类	(4)
1.3.1 解析法	(4)
1.3.2 数值法	(5)
1.4 电磁场问题数值计算的几种重要方法	(6)
1.4.1 有限差分法	(6)
1.4.2 有限单元法	(7)
1.5 MATLAB 在电磁场数值计算中的应用	(9)
第 2 章 MATLAB 简介	(11)
2.1 MATLAB 概述	(11)
2.1.1 MATLAB 的特点	(11)
2.1.2 MATLAB 操作界面	(12)
2.1.3 命令窗口的基本操作命令	(13)
2.2 数值计算基本方法	(15)
2.2.1 变量名、数据、算符与表达式	(15)
2.2.2 矩阵	(18)
2.2.3 符号变量和符号表达式	(26)
2.3 图形处理的基本方法	(28)
2.3.1 二维图形	(28)
2.3.2 三维图形	(33)
2.4 M 文件及程序设计	(34)
2.4.1 命令文件	(34)

2.4.2	函数文件	(36)
2.4.3	流程控制	(38)
2.4.4	差分、微分和梯度	(41)
2.4.5	积分	(43)
2.4.6	级数	(44)
2.5	偏微分方程的图形用户界面(GUI)	(45)
2.5.1	PDE Toolbox 菜单	(46)
2.5.2	PDE 工具栏	(58)
第 3 章	电磁场分布型问题的数值积分法	(60)
3.1	沿直线的积分问题	(60)
3.2	平面上的二重积分问题	(70)
3.3	沿空间曲线的积分问题	(75)
3.4	曲面上的二重积分问题	(83)
第 4 章	电磁场二维场域的有限差分法	(93)
4.1	差分运算的基本概念	(93)
4.2	拉普拉斯方程的有限差分形式	(97)
4.3	二维场域的边界条件	(99)
4.4	简单迭代法	(100)
4.5	超松弛法	(100)
4.6	应用举例与计算程序	(101)
第 5 章	电磁场二维场域的有限单元法	(128)
5.1	电磁场微分方程的泛函变分原理	(128)
5.2	二维电磁场有限单元法的数学离散形式	(130)
5.3	应用举例与计算步骤	(135)
参考文献		(152)

第 1 章 绪 论

1.1 电磁场理论产生的背景及其意义

电磁理论是人类探索自然活动的结晶和宝贵财富。人类认识电磁运动规律的道路是漫长而曲折的。早在两千多年前,人类就有了关于磁石和摩擦起电的知识,我们祖先发明的指南针,为人类文明作出了不朽的贡献。但是,将电磁现象系统地上升为理论的研究并加以应用则是 18 世纪中叶,特别是 19 世纪中叶以后的事情。1771—1773 年,卡文迪许(Henry Cavendish; 1731—1810)进行了著名的静电实验,库仑(Charles-Augustinde Coulomb, 1736—1806)于 1785 年建立了关于静电和静磁的平方反比定律,这标志着电学和磁学定量研究的开始。此后,人们对电和磁现象进行了大量的观察和实验研究,其中,最著名的是伽伐尼(L. Galvani, 1737—1798)在解剖青蛙时注意到青蛙腿的痉挛现象,从而发现电流;伏特(Alessandro Volt, 1745—1827)用电化学方法产生了稳定的电流(即伏特电池)。随后,欧姆(Georg Simon Ohm, 1789—1854)和基尔霍夫(Gustav Robert Kirchhoff, 1824—1887)分别建立了后来以他们的名字命名的电路定律。在很长的时期内,人们把电和磁看成是相互独立的现象,并不知道它们之间有什么联系。直到 1820 年奥斯特(Hans Christian Oersted, 1777—1851)发现电流可使磁针偏转,即电流可产生磁力,才开始了将电与磁联系起来的研究。1825 年,安培(Andre Marie Ampere, 1775—1836)提出了确定两电流之间相互作用及载流导体能受到磁力作用的定律,即安培定律,毕奥

(Biot)和萨伐尔(Savart)确定了磁场和电流之间的定量关系,即毕奥-萨伐尔定律。到此为止,人们一直都还是在静止的或恒定的状态下研究电磁现象。电磁学研究的一个重大进展是,1831年法拉第(Michael Faraday, 1791—1867)发现电磁感应现象,这是人们第一次对随时间变化的电磁场进行研究。电磁感应定律一方面推动了电磁在工程中的应用,另一方面它是电磁理论的一块基石。1864年,麦克斯韦(James Clerk Maxwell, 1831—1879)在总结前人发现的实验定律的基础上,进行了创造性的理论研究工作,建立了后来以他的名字命名的麦克斯韦方程组,从而创立了完整的电磁理论体系。

麦克斯韦电磁理论体系的建立,是19世纪人类文明史上的重大事件,它标志着人类文明迈进了电的时代。紧随其后,1866年,西门子(William Siemens, 1823—1883)发明了发电机;1876年,贝尔(Alexander Graham Bell, 1847—1922)发明了电话;1879年,爱迪生(Thomas Alva Edison, 1847—1931)发明了电灯;1888年,赫兹(Heinrich Rudolf Hertz, 1857—1894)成功地做了电磁波实验,对麦克斯韦方程组的正确性提供了实验依据。赫兹实验后不到6年,意大利工程师马可尼(G. Marconi, 1874—1937)和俄国的波波夫(A. S. Popov, 1859—1906)分别实现了无线电远距离传播,并很快投入实际应用。其后,无线电报(1894年)、无线电广播(1906年)、导航(1911年)、无线电话(1916年)、短波通信(1921年)、传真(1923年)、电视(1929年)、微波通信(1933年)、雷达(1935年)以及近代的无线电遥测、遥控、卫星通信、光纤通信等如雨后春笋般涌现出来。

一个多世纪以来,由电磁学发展起来的现代电子技术已应用在电力工程、电子工程、通信工程、计算机技术等多学科领域。电磁理论已广泛应用于国防、工业、农业、医疗、卫生等领域,并深入到人们的日常生活中。今天,电磁场问题的研究及其成果的广泛运用,已成为人类社会现代化的标志之一。

1.2 电磁场问题计算方法的重要性

在一个电磁系统中,电场和磁场的计算对于完成该系统的有效设计是极端重要的。例如,在系统中,用一种绝缘材料使导体相互隔离时,就要保证电场强度低于绝缘介质的击穿强度。在磁力开关中,所要求的磁场强弱,应能产生足够大的力来驱动开关。在发射系统中进行天线的有效设计时,关于天线周围介质中电磁场分布的知识显然有实质性的意义。

为了分析电磁场,我们可从问题所涉及的数学公式入手。依据电磁系统的特性,拉普拉斯方程和泊松方程只能适合于描述静态和准静态(低频)运行条件下的情况。但是,在高频应用中,则必须在时域或频域中求解波动方程,以做到准确地预测电场和磁场,在任何情况下,满足边界条件的一个或多个偏微分方程的解,因此,计算电磁系统内部和周围的电场和磁场都是必要的。

电磁场理论早期主要应用在军事领域,其发展和无线电通信、雷达的发展是分不开的。现在,电磁场理论的应用已经遍及地学、生命科学和医学、材料科学和信息科学等几乎所有的科学技术领域。计算电磁场研究的内容涉及面很广,与电磁场工程、电磁场理论互相联系,互相依赖。对电磁场工程而言,计算电磁场要解决的是实际电磁场工程中越来越复杂的建模与仿真、优化设计等问题;而电磁场工程也为之提供实验结果,以验证其计算结果的正确性。对电磁场理论而言,计算电磁场可以为其研究提供进行复杂的数值及解析运算的方法、手段和计算结果;而电磁场理论则为计算电磁场问题提供了电磁规律、数学方程,进而验证其计算结果。计算电磁场对电磁场理论发展的影响决不仅仅是提供一个计算工具而已,而是使整个电磁场理论发生了革命性的变化。毫不夸张地说,近二三十年来,电磁场理论的发展,无一不是与计算电磁场的发展相联系的。目前,计算电磁场已成为对复杂体系的电磁规律、电磁

性质进行研究的重要手段,为电磁场理论的深入研究开辟了新的途径,并极大地推动了电磁场工程的发展。

1.3 电磁场问题计算方法分类

常用的计算电磁场问题的方法主要有两大类,其中每一类又包含若干种方法,第一类是解析法;第二类是数值法。对于那些具有最简单的边界条件和几何形状规则的(如矩形、圆形等)问题,可用分离变量法和镜像法求电磁场边值问题的解析解(精确解),但是在许多实际问题中往往由于边界条件过于复杂而无法求得解析解。在这种情况下,一般借助于数值法求电磁场的数值解。

1.3.1 解析法

电磁学是一门古老而又不断发展的学科。经典的数学分析方法是近百年来电磁学学科发展中一个极为重要的方法。解析法包括建立和求解偏微分方程或积分方程。严格求解偏微分方程的经典方法是分离变量法;严格求解积分方程的方法主要是变换数学法。解析法的优点是:

①可将解答表示为已知函数的显式,从而计算出精确的数值结果;

②可以作为近似解和数值解的检验标准;

③在解析过程中和在解的显式中可以观察到问题的内在联系和各个参数对数值结果所起的作用。

但解析法也存在严重的缺点,主要是,它仅能解决很少量的问题。事实上,只有在为数不多的坐标系中才能分离变量,而用积分方程法时往往求不出结果,致使分析过程既困难又复杂。例如,对于标量赫姆霍兹方程,只有在 11 种坐标系下才能用分离变量法求解。如果边界面不是在 11 种坐标系中 1 个坐标系的 1 个坐标面或该坐标系的几个坐标面的组合,或者边界条件不是第一类边界

条件(该标量在边界上的值为已知)或不是第二类边界条件(该标量在边界上沿法线方向的空间导数为已知),则分离变量就不能用。又如,只有当积分方程中的核是某些形式时,才能用变换数学方法来严格求解。

1.3.2 数值法

数值法用高性能的计算机就可直接以数值的、程序的形式代替解析形式来描述电磁场的问题。在数值法中,通常以差分代替微分,用有限求和代替积分,这样,就将问题化为求解差分方程或代数方程问题。这方面的例子有,有限差分法(FDM)和有限单元法(FEM)。

数值法与解析法比较,在许多方面具有独特的优点。

①普适性强,用户拥有的弹性大。一个特定问题的边界条件、电气结构、激励等特性可以不编入基本程序,而由用户输入,更好的情况是通过图形界面输入。

②用户不必具备高度专业化的电磁场理论、数学及数值技术方面的知识就能用提供的程序解决实际问题。

数值法的出现,使电磁场问题的分析研究从解析的经典方法进入到离散系统的数值分析方法,从而使许多解析法很难解决的复杂的电磁场问题,有可能通过电磁场的计算机辅助分析获得很高精度的离散解(数值解),同时可极大地促进各种电磁场数值计算方法的发展。

数值法的缺点是数据输入量大、计算量大、受硬件条件的限制。原则上,数值法可以求解具有任何复杂几何形状、复杂材料的电磁场工程问题。但是,在工程应用中,由于受计算机存储容量、执行时间以及解的数值误差等方面的限制,数值法在解大型复杂的电磁场工程问题时也难以完成任务。

可以说,数值法的发展大致分为两个阶段。其发展初期,是研究“解决得了”的问题,也就是研究该数值法能否应用于各个学科

分支领域;而其发展后期,是研究“解决得好”的阶段,即探讨解决工程实际问题的各种改进方法、手段及相应的计算技术。近期的数值法研究中的大量工作都是为了实现这一目标。有的研究在小机器上计算大问题;有的研究减少内存占用,加快计算速度;还有的研究在一定程度上减少自由度和计算工作量;而最新的发展动向是研究高效的并行数值算法。

1.4 电磁场问题数值计算的几种重要方法

在电磁场边值问题的分析计算中,场域边界形状及介质分布较复杂的问题,用解析方法无法分析求解,而用图解法作场图又相当困难,且一般情况下精度较低,难以满足工程要求,而必须使用数值计算方法来求解。有限差分法(FDM)和有限单元法(FEM),原则上都是将一个连续域离散化成有限个分区,然后求解一系列代数方程,而不是求解微分或积分方程。利用电子计算机求数值解,理论上可以达到任意要求的精度。

1.4.1 有限差分法

有限差分法(Finite Difference Method)简称差分法,在电磁场数值计算方法中,它是最早使用的一种方法,这种方法早在19世纪末已经提出。它以概念清晰,方法简单、直观的特点应用于电磁场数值分析领域,静态电磁场及正弦稳态时变电磁场都可用该法分析计算。但把差分法和近似数值分析联系起来,则是20世纪50年代以后的事了。它以简单、直观的特点而得到广泛的应用,无论是常微分方程还是偏微分方程,各种类型的二阶线性方程,以至高阶或非线性方程,均可利用差分法转化为代数方程组,然后用计算机求其数值解。

有限差分法是以差分原理为基础的一种数值方法,它把电磁场连续域内的问题变为离散系统的问题,即用各离散点上的数值

解来逼近连续场域内的真实解,因而,它是一种近似的计算方法,根据目前计算机的容量和速度,它对许多问题都可以得到足够高的计算精度。

有限差分法是一种较容易掌握的数值解法,它是解任何偏微分方程最为有效的数值方法之一。应用于电磁场边值问题的求解时,首先将求解场域剖分为很多网格和节点,并用差商代替微商,然后,使场域中的偏微分方程转化成以各节点的电位或磁势为未知量的差分方程组(线性代数方程组),最后,解该方程组便可得到各离散节点待求的电位或磁势的数值解。该数值解是近似解,但逼近场域的真实解。而且,如果离散化的点选择得足够密的话,解的误差就能减小到可接受的程度。而所有的电磁场问题都是用标量或矢量偏微分方程来表示的,因此,能用它来求解各种媒质中随空间和时间变化的电场与磁场。在本书范围内,我们仅讨论二维电磁场的变化问题。

1.4.2 有限单元法

有限单元法(Finite-Element Method),简称有限元法,是求解数理边值问题的一种数值计算方法。在力学领域,有限元的思想早在 20 世纪 40 年代已经提出,在 20 世纪 50 年代开始用于飞机设计。但是这个方法开创性的工作,公认是 R. W. Clough 在 1960 年发表的著作中奠定的。此后,该方法得到发展并被广泛地用于结构分析、流体力学、热传递等物理和工程问题之中。20 世纪 60 年代末至 70 年代初,有限元法被移植到电磁场工程领域的设计计算中。

有限元法是以变分原理和剖分插值为基础的一种数值计算方法。在早期,应用瑞利-里兹方法的有限元法以变分原理为基础,广泛用于拉普拉斯方程和泊松方程所描述的各类物理场中,称之为里兹有限元法。此后证明,应用加权余量法中的迦辽金法或最小二乘法等同样可得到有限元方程。因此,有限元法可用于可用

任何微分方程描述的各类物理场,同样也适合于时变场、非线性场以及复杂介质中的电磁场求解。

有限元法与经典里兹方法和迦辽金方法的不同之处是在试探函数的公式上。在经典里兹方法和迦辽金方法中,试探函数由定义在全域上的一组基函数组成。这种组合必须能够(至少近似)表示精确解,另外还必须满足适当的边界条件。在有限元方法中,试探函数由定义在组成全域的子域上的一组基函数构成。因为子域很小,定义在子域上的基函数可以非常简单。

有限元法之所以有着非常强大的生命力和广阔的应用前景,主要在于方法本身有如下优点:

①有限元法采用物理上离散与分片多项式插值的原理,因此具有对材料、边界、激励的广泛适应性;

②有限元法基于变分原理,将数理方程求解变成代数方程组的求解,因此非常简易;

③有限元法采用矩阵形式和单元组装方法,其各环节易于标准化,程序通用性强,且有较高的计算精度,便于编制程序和维护,适宜于制作商业软件;

④国际学术界对有限元法的理论、计算技术以及各方面的应用做了大量的工作,许多问题有现成的程序,可用的商业软件相对较多。

目前,有限元法电磁计算在电气工程中的应用非常广泛,包括各个方面,内容极其丰富,如电机的电磁分布,电磁力,变形,转子运动,动态变化过程以及电力电子装置相结合等的分析和特性预测及计算等。有限元法近年来较新的应用,有转动调节器的计算等;还有变压器以及其他电力系统元件,如高压绝缘、高压线圈、输电线电缆、接地系统、输电线和配电线的外部磁场的分析等;有感应加热、电磁搅拌、冶炼过程的电磁分离选料,具有分布式参数的天线的计算等;还有一些较新的产品开发和研究项目,如核磁共振成像系统磁体、磁电磁物体发射以及电磁对人体影响等的计算分