全国高等学校配套教材
供基础、临床、预防、口腔医学类专业用

医用高等数学学习指导

主　编　张选群
副主编　李　泉

人民卫生出版社

全国高等学校配套教材

供基础、临床、预防、口腔医学类专业用

医用高等数学学习指导

主　编　张选群

副主编　李　泉

编　者

和丽军（昆明医学院）
李　泉（徐州医学院）
李　海（四川大学华西医学中心）
马建忠（中国医科大学）
张选群（武汉大学医学院）

人民卫生出版社

图书在版编目（CIP）数据

医用高等数学学习指导/张选群主编. —北京：人民卫生出版社，2004.6

ISBN 7-117-06136-7

Ⅰ.医... Ⅱ.张... Ⅲ.医用数学-医学院校-教学参考资料 Ⅳ.R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 034664 号

医用高等数学学习指导

主　　编：张选群
出版发行：人民卫生出版社（中继线 67616688）
地　　址：（100078）北京市丰台区方庄芳群园 3 区 3 号楼
网　　址：http://www.pmph.com
E - mail：pmph@pmph.com
印　　刷：北京市卫顺印刷厂
经　　销：新华书店
开　　本：787×1092　1/16　**印张**：12.25
字　　数：282 千字
版　　次：2004 年 6 月第 1 版　2004 年10月第 1 版第 2 次印刷
标准书号：ISBN 7-117-06136-7/R·6137
定　　价：18.00 元

前　　言

新世纪课程教材《医用高等数学》（张选群主编）自出版以来已被越来越多的高等医药院校所选用，因为它更加适应了我国目前高等医药院校的教学实际。

这本《医用高等数学学习指导》作为《医用高等数学》的配套参考书，是应使用人民卫生出版社《医用高等数学》院校的教师教学和学生学习的客观需求而编写的，并将以其独特的内涵受到师生们的欢迎，成为一本适用的辅导书、参考书。

本书独特的内涵为：①在每一章的开头，都以最简练的语言勾勒出全章的主要内容，归纳出常见的各种题型（考点），有利于教学时数偏少的医药院校师生抓住主要环节去教和学；②源于教材、切合卫生部教学指导委员会的要求精心组织、编制了新颖、典型、综合的例题，并把解题技巧、方法、思路等融化在解题过程中或解题后的思考中，使读者少走弯路；③对教材中没有答案的，有时显得更加困难的“思考与练习”和各章的习题都给出了详尽的解答过程，减少了教与学的难度；④为了适应不同学制的高等医药院校或同一学制的不同教学要求的院校的考核要求，我们在本书最后编写了供不同学制院校或同一学制不同教学要求的院校选用参考的模拟题五套备用。为便于使用，我们还给出了各套模拟试题的参考答案。

以上一切都是由我们共同策划、研究、组织编写，并由李泉执笔完成、张选群最后审定的。在这一过程中，昆明医学院的和丽军提供了第一章到第三章的思考与练习解答和习题解答，四川大学华西医学中心的李海提供了第六章的习题解答，中国医科大学的马建忠也给出了第七章的习题解答，《徐州医学院学报》的罗杰主任和程序员孔令剑特别给予了录盘工作的大力支持，在此一并致谢。由于编者水平有限，加上时间仓促，不妥之处在所难免，敬请广大读者及各院校同行不吝批评、指正，以便在再版中改进。

张选群　李　泉

2003.8

目　　录

第 一 章

函数和极限

一、全章内容小结

（1）三个基本概念：函数，极限，连续；

（2）四种基本运算：求函数的定义域、表达式（包括复合函数的分解与合成），函数简单特性的判定，求极限的常用方法（法则、公式、无穷小的性质等），函数连续与间断的判定；

（3）闭区间上连续函数的性质及简单应用。

二、常见题型（考点）

（1）求函数的定义域；

（2）已知 $f[g(x)]$的表达式，求 $f(x)$；

（3）求函数的极限；

（4）函数在一点连续性的讨论；

（5）求函数极限（或连续）的逆问题；

（6）无穷小的比较；

（7）函数间断点的确定与分类；

（8）由介值定理（零点定理）证明简单命题。

三、综 合 例 题

例 1　已知 $y=\arcsin[\ln(x+1)]$

（1）分析 y 的复合结构；（2）求 y 的定义域。

解：（1）$y=\arcsin u$，$u=\ln v$，$v=x+1$

$$(2)\ \begin{cases}-1\leqslant\ln(x+1)\leqslant 1\\ x+1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{e}-1\leqslant x\leqslant e-1\\ x>-1\end{cases}\Rightarrow \mathrm{D}:\ \left[\frac{1}{e}-1,\ e-1\right]$$

例 2　已知$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=3$，求 a，b

解：$\because\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$　$\therefore\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax+b)=0\Rightarrow 1+a+b=0$，以 $b=-a-1$ 代入原式，得

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-a+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1+a)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1+a)$$

$$=a+2=3\Rightarrow a=1,\ b=-2$$

例 3　求$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

解：$\because \lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2e^{-\frac{1}{x}}+1}{e^{-\frac{1}{x}}+1}+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1+1=2$

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1$$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$不存在

例 4　求$\lim\limits_{x\to0}(1+\tan^2x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

解：$\lim\limits_{x\to0}(1+\tan^2x)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+\tan^2x)^{\frac{1}{\tan^2x}}\right]^{\frac{\tan^2x}{1-\cos x}}$

$$=\lim_{x\to0}e^{\frac{\tan^2x}{1-\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}}=e^2$$

例 5　已知 $f(x)=\begin{cases}\ln(\cos x)x^{-2} & x\neq0\\ a & x=0\end{cases}$在 $x=0$ 处连续，求 a

解：$f(0)=a$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1-2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}\cdot\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-2\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

$\because f(x)$在 $x=0$ 处连续，$\therefore f(0)=-\dfrac{1}{2}$即 $a=-\dfrac{1}{2}$

例 6　已知 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}} & x>0\\ \ln(1+x) & -1<x\leqslant0\end{cases}$，求 $f(x)$的间断点，并说明间断点所属类型

解：显然 $x=1$ 为一个间断点（因函数在 $x=1$ 处无定义）

$\because \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=\infty$

$\therefore x=1$ 为第二类无穷间断点

又，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(1+x)=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x-1}}=\dfrac{1}{e}$

故 $x=0$ 也是 $f(x)$ 的间断点，且为第一类跳跃型间断点

例 7　比较当 $x\to 0$ 时，无穷小量 $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 与 x 的阶

解：
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\cdot\ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\cdot\frac{2x}{1-x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}=1$$

$\Rightarrow x\to 0$ 时，$\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 与 x 是等价无穷小

例 8　证明方程 $\sin x-x\cos x=0$ 在 $x\in\left(\pi,\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$ 之间有根

证：令 $f(x)=\sin x-x\cos x$，显然初等函数 $f(x)$ 在 $\left(\pi,\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$ 上连续，且

$f(\pi)=\sin\pi-\pi\cos\pi=\pi>0$

$f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=\sin\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{3\pi}{2}\cos\dfrac{3\pi}{2}=-1<0$

$\Rightarrow f(\pi)\cdot f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)<0$

由闭区间上连续函数的介值定理 $\Rightarrow$ 存在 $\xi\in\left(\pi,\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$，使得 $f(\xi)=0$，即 $\sin\xi-\xi\cos\xi=0$，也即 $\sin x-x\cos x=0$ 在 $\left(\pi,\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$ 之间有根。

例 9　若 $f(x)$ 在 $[0,\ a]$ 上连续（$a>0$），且 $f(0)=f(a)$，则方程 $f(x)=f\left(x+\dfrac{a}{2}\right)$ 在（$0,\ a$）内至少有一个实根

证：令 $g(x)=f(x)-f\left(x+\dfrac{a}{2}\right)$，$g(x)$ 在 $(0,\ a)$ 上连续

$g(0)=f(0)-f\left(\dfrac{a}{2}\right)$

$g\left(\dfrac{a}{2}\right)=f\left(\dfrac{a}{2}\right)-f(a)=f\left(\dfrac{a}{2}\right)-f(0)=-\left[f(0)-f\left(\dfrac{a}{2}\right)\right]\Rightarrow g(0)\cdot g\left(\dfrac{a}{2}\right)\leqslant 0$

若 $f(0)=f\left(\frac{a}{2}\right)$，则 $x=0$ 或 $x=\frac{a}{2}$ 满足要求；

若 $f(0)\neq f\left(\frac{a}{2}\right)$，则 $g(0)\cdot g\left(\frac{a}{2}\right)<0$，由零点定理存在 $x_0\in\left(0,\ \frac{a}{2}\right)$，使得 $g(x_0)=0$，即 $f(x_0)=f\left(x_0+\frac{a}{2}\right)$，$x_0$ 是 $(0,\ a)$ 内 $f(x)=f\left(x+\frac{a}{2}\right)$ 的根。

四、思考与练习解答

（一）函数

1. 下列各题中，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否为相同的函数：

（1）$f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=x$；

解：$f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$，因为对应规律不同，所以 $f(x)\neq g(x)$。

（2）$f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$ 与 $g(x)=\frac{1}{x+1}$；

解：$f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$ 的定义域为 $x\neq\pm1$，而 $g(x)=\frac{1}{x+1}$ 的定义域为 $x\neq-1$，所以 $f(x)\neq g(x)$。

（3）$f(x)=\cos^2x+\sin^2x$ 与 $g(x)=1$；

解：$f(x)=\cos^2x+\sin^2x=1$，两个函数的定义域和对应规律均相同，所以 $f(x)=g(x)$。

（4）$f(x)=\arcsin x$ 与 $g(x)=\frac{\pi}{2}-\arccos x$。

解：函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同，都是 $x\in[-1,\ 1]$，且对应规律也相同，所以 $f(x)=g(x)$

2. 设 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，考察下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)g(x)$

解：$\because f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)$ $\quad\therefore f(x)g(x)$ 是奇函数。

（2）$f[g(x)]$

解：$\because f[g(-x)]=f[g(x)]$ $\quad\therefore f[g(x)]$ 是偶函数。

（3）$f[f(x)]$

解：$\because f[f(-x)]=f[-f(x)]=-f[f(x)]$ $\quad\therefore f[f(x)]$ 是奇函数。

3. 下列函数中哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些是非奇非偶函数？

（1）$f(x)=x^3+|\sin x|$；

解：$f(-x)=(-x)^3+|\sin(-x)|=-x^3+|-\sin x|=-x^3+|\sin x|$，非奇非偶函数。

（2）$f(x)=\frac{1}{2}(2^x+2^{-x})\cos x$；

解：$f(-x)=\frac{1}{2}(2^{-x}+2^x)\cos(-x)=\frac{1}{2}(2^x+2^{-x})\cos x=f(x)$，偶函数。

（3）$f(x)=\arctan(\sin x)$

解：$f(-x)=\arctan(\sin(-x))=\arctan(-\sin x)=-\arctan(\sin x)=-f(x)$，奇函数。

4. 指出下列各函数中哪些是周期函数，并指出其周期：

（1）$y=\arctan(\tan x)$；

解：$\because f(x+\pi)=\arctan(\tan(x+\pi))=\arctan(\tan x)=f(x)$

$\therefore y=\arctan(\tan x)$是周期函数，$T=\pi$。

（2）$y=\sin\pi x+\cos\pi x$；

解：$\because f(x)=\sin\pi x+\cos\pi x=\sqrt{2}\left(\sin\pi x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\pi x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)$

而 $f(x+2)=\sqrt{2}\sin\left[\pi(x+2)+\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin\left(\pi x+2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)=f(x)$

$\therefore y=\sin\pi x+\cos\pi x$ 是周期函数，$T=2$。

（3）$y=x\sin\frac{1}{x}$；

解：令 $x\sin\frac{1}{x}=0$，解此方程得出曲线 $y=x\sin\frac{1}{x}$与 x 轴的交点的横坐标是 $x=\frac{1}{k\pi}$ $(k\in Z)$。由于 k 越小而 x 越大，亦即在正半轴上随着 x 远离坐标原点，k 越来越小。

又因为曲线 $y=x\sin\frac{1}{x}$与 x 轴的相邻两交点的间隔

$$d=\frac{1}{(k-1)\pi}-\frac{1}{k\pi}=\frac{1}{k(k-1)\pi}$$

当 $k\to0$ 时，$d\to\infty$，即 d 随着自变量远离坐标原点的程度而越来越大，故有 $y=x\sin\frac{1}{x}$不是周期函数。

（4）$y=1+\cos2x$。

解：$\because f(x+\pi)=1+\cos2(x+\pi)=1+\cos(2x+2\pi)=1+\cos2x=f(x)$

$\therefore y=1+\cos2x$ 是周期函数，$T=\pi$。

（二）极限

1. 在 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 中，x 能否取 x_0？$f(x)$能否取值 A？

解：在 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 中，$x\to x_0$ 是指 x 与 x_0 无限接近，并不要求 x 必须取值 x_0；x 即可以取 x_0，亦可以不取 x_0。

在 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 中，当 x 无限趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的函数值无限地趋近一个常数 A，对 $f(x)$ 是否取值 A 没有明确要求；$f(x)$ 既可以取值 A，亦可以不取值 A。

2. 无穷小量是否是 0？0 是否是无穷小量？

解：如果 $\lim f(x)=0$，称函数 $f(x)$ 为某一变化过程时的无穷小量。按照定义，无穷小量是以 0 为极限的变量，因此它不是 0；

而 $\lim0=0(x\to\infty$或 $x\to x_0)$，即常数 0 的极限仍是 0，它是唯一的可作为无穷小量的一个常数。

3. 当 $x\to0$ 时，$1-\cos x$ 是 x 的几阶无穷小？

解：$\because \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{4\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right]^2=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ 当 $x\to0$ 时，$1-\cos x$ 是 x 的二阶无穷小。

4. 下面的计算过程对否：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}x}{\lim\limits_{x\to1}(x-1)}=\infty$

解：错。分母的极限 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$，故不能用商的极限运算法则。应为

$\because \lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$，则 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to1}x}=\dfrac{0}{1}=0$，由无穷小与无穷大的关系，

$\therefore \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{x-1}=\infty$

5. 无穷小可通过它们比值的极限来比较其趋于零的快慢程度，无穷大是否也可类似地比较它们趋于无穷的快慢程度呢？

解：可以。

6. 当 $x\to\infty$时，$f(x)=x^3\cos x$ 是无穷小量吗？它是无穷大量吗？它有界吗？

解：我们以 $x\to+\infty$来分析。

在 x 中选取两个子数列：$x_{n_k}=2k\pi$，$x'_{n_k}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$(k=0, 1, 2, \cdots)$

讨论函数 $f(x)=x^3\cos x$ 在这两个子数列上的取值情况，有

$f(x_{n_k})=(2k\pi)^3\cdot1=(2k\pi)^3\to+\infty(k\to+\infty)$，

$f(x'_{n_k})=\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)^3\cdot0=0\to0(k\to+\infty)$，

由此我们看到当 $x\to+\infty$时，$f(x)$在子数列$\{x_{n_k}\}$上的取值越来越大，在子数列$\{x'_{n_k}\}$上的取值始终为 0，因此，当 $x\to+\infty$时，$f(x)=x^3\cos x$ 既不是无穷小量；也不是无穷大量，并且是无界的。

所以当 $x\to\infty$时，$f(x)=x^3\cos x$ 不是无穷小量；也不是无穷大量，且是无界的。

7. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x_{n-1}+x_n+x_{n+1}}{3}=$___1___。

8. 试证：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}, & m=n\\ 0, & m>n\\ \infty, & m<n\end{cases}$$

证：当 $m=n$ 时，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\dfrac{a_0}{x^m}}{b_m+\dfrac{b_{m-1}}{x}+\cdots+\dfrac{b_0}{x^m}}=\dfrac{a_n}{b_m}$；

当 $m>n$ 时，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{a_n}{x^{m-n}}+\dfrac{a_{n-1}}{x^{m-n+1}}+\cdots+\dfrac{a_0}{x_m}}{b_m+\dfrac{b_{m-1}}{x}+\cdots+\dfrac{b_0}{x^m}}=\dfrac{0}{b_m}=0$；

当 $m<n$ 时，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{b_m}{x^{n-m}}+\dfrac{b_{m-1}}{x^{n-m+1}}+\cdots+\dfrac{b_0}{x^n}}{a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\dfrac{a_0}{x^n}}=\dfrac{0}{a_n}=0$，

则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}=\infty$。

（三）函数的连续性

1. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，能断言 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在吗？

答：不能。

例如：$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq0\\2, & x=0\end{cases}$，显然 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处间断，但 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$。

2. 分段函数是否一定有间断点？

答：不一定。

例如：$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant0\\-x, & x<0\end{cases}$ 是一个分段函数，但 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内均连续。

3. 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，$g(x)$ 在点 x_0 间断，能否断定 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 必间断？若 $f(x)$、$g(x)$ 在点 x_0 都间断，能否断定 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 间断？

解：若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，$g(x)$ 在点 x_0 间断，可以断定 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 必间断。

因为若 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 处连续，则

$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[(f(x)+g(x))-f(x)]=(f(x_0)+g(x_0))-f(x_0)=g(x_0)$ 成立，

说明 $g(x)$ 在点 x_0 连续，与题设 $g(x)$ 在点 x_0 间断矛盾，故 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 必间断；

若 $f(x)$、$g(x)$ 在点 x_0 都间断，则不能断定 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 间断；

例如函数 $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$、$g(x)=1-\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处无意义，即在该点间断，但 $f(x)+g(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=2$ 在 $x=0$ 点处连续。

4. 开区间连续的函数是否必有最大、最小值？又是否必定没有最大、最小值？

解：开区间连续的函数未必有最大、最小值；例如函数 $y=x$ 在开区间 $(-1,1)$ 内连续，但它在该区间内没有最大、最小值。

开区间连续的函数未必没有最大、最小值；例如函数 $y=\sin x$ 在开区间 $(0,2\pi)$ 内连续，它在该区间内有最大值 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$；也有最小值 $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-1$。

5. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，在 (a,b) 内连续，且 $f(a)f(b)<0$，能否保证方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内必有实根？

解：不能。

例如函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x=1\\ 3, & 1<x<2\\ -1, & x=2\end{cases}$，显然 $f(x)$ 在 $[1,\ 2]$ 上有定义，在 $(1,\ 2)$ 内连续，

且 $f(1)f(2)=-1<0$，但方程 $f(x)=0$ 在 $(1,\ 2)$ 内没有实根。

6. 证明方程 $x=\sin x+2$ 至少有一个不超过 3 的实根。

证：设 $\varphi(x)=x-\sin x-2$，显然 $\varphi(x)$ 是一个初等函数，在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内连续，在 $[-3,\ 3]$ 上当然连续；

又 $\varphi(3)=3-\sin 3-2=1-\sin 3>0$，$\varphi(-3)=-3-\sin(-3)-2=-5+\sin 3<0$；

由闭区间上连续函数的介值定理，在 $(-3,\ 3)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $\varphi(\xi)=0$，即有 $\xi-\sin\xi-2=0$，也即方程 $x=\sin x+2$ 至少有一个不超过 3 的实根 ξ。

五、习题一解答

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{(x+2)(x-1)}$

解：$(x+2)(x-1)\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -2\Rightarrow x\in(-\infty,\ -2]\cup[1,\ +\infty)$

(2) $y=\arccos(x-3)$

解：$-1\leqslant x-3\leqslant 1\Rightarrow 2\leqslant x\leqslant 4\Rightarrow x\in[2,\ 4]$

(3) $y=\lg\dfrac{x-1}{x+2}$

解：$\dfrac{x-1}{x+2}>0\Rightarrow(x-1)(x-2)>0\Rightarrow x>1$ 或 $x<-2\Rightarrow x\in(-\infty,\ -2)\cup(1,\ +\infty)$

(4) $y=\dfrac{\sqrt{\ln(2+x)}}{x(x-4)}$

解：$\begin{cases}\ln(2+x)\geqslant 0\\ 2+x>0\\ x(x-4)\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2+x\geqslant 1\\ x>-2\\ x\neq 0 \text{ 且 } x\neq 4\end{cases}\Rightarrow x\geqslant -1$ 且 $x\neq 0$，$x\neq 4$

$\Rightarrow x\in[-1,\ 0)\cup(0,\ 4)\cup(4,\ +\infty)$

(5) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\arcsin\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)$

解：$\begin{cases}2-x^2>0\\ -1\leqslant\dfrac{1}{2}x-1\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\\ 0\leqslant x\leqslant 4\end{cases}\Rightarrow 0\leqslant x<\sqrt{2}\Rightarrow x\in\ [0,\ \sqrt{2})$

(6) $y=\dfrac{x}{\sin x}$

解：$\sin x\neq 0\Rightarrow x\neq k\pi\Rightarrow x\in\ \{x : x\neq k\pi\ (k\in Z)\}$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x<0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\\ -x, & x>0\end{cases}$，求 $f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(\lg\dfrac{1}{2}\right)$。

解：$f(0)=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$，$f\left(\lg\frac{1}{2}\right)=1+\left(\lg\frac{1}{2}\right)^2=1+(\lg1-\lg2)^2=1+(\lg2)^2$

3. 设函数 $y=f(x)$的定义域为 $[0,1]$，求下列函数的定义域：

(1) $f\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(x-\frac{1}{3}\right)$

解：$\begin{cases}0\leqslant x+\frac{1}{3}\leqslant1\\0\leqslant x-\frac{1}{3}\leqslant1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$

(2) $f(\sin x)$

解：$0\leqslant\sin x\leqslant1\Rightarrow2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi\Rightarrow x\in[2k\pi,(2k+1)\pi](k\in Z)$

(3) $f(\ln x+1)$

解：$\because0\leqslant\ln x+1\leqslant1$　$\ln e^{-1}=-1\leqslant\ln x\leqslant0=\ln1$　$\therefore\frac{1}{e}\leqslant x\leqslant1$　即 $x\in\left[\frac{1}{e},1\right]$

(4) $f(x^2)$

解：$\because0\leqslant x^2\leqslant1$　$(x+1)(x-1)\leqslant0$　$\therefore-1\leqslant x\leqslant1$ 即 $x\in[-1,1]$

4. 写出 y 关于 x 的复合函数：

(1) $y=\lg u$，$u=\tan(x+1)$

解：$y=\lg\tan(x+1)$　$x\in\left(k\pi-1,k\pi+\frac{\pi}{2}-1\right)$

(2) $y=u^3$，$u=\sqrt{x^2+1}$

解：$y=(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$　$x\in(-\infty,+\infty)$

(3) $y=u+\sin u$，$u=1-v$，$v=x^3$

解：$y=1-x^3+\sin(1-x^3)$　$x\in(-\infty,+\infty)$

(4) $y=e^u$，$u=v^2$，$v=\sin w$，$w=\frac{1}{x}$

解：$y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}$　$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

5. 指出下列函数是由哪些基本初等函数或简单函数复合而成：

(1) $y=e^{\arctan(2x+1)}$

解：$y=e^u$，$u=\arctan v$，$v=2x+1$；

(2) $y=\sqrt{\sin^3(x+2)}$

解：$y=u^{\frac{3}{2}}$，$u=\sin v$，$v=x+2$；

(3) $y=\tan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

解：$y=\tan u$，$u=v^{\frac{1}{2}}$，$v=\frac{1+x}{1-x}$；

(4) $y=\cos\ln^3\sqrt{x^2+1}$

解：$y=\cos u$，$u=v^3$，$v=\frac{1}{2}\ln w$，$w=x^2+1$。

6. 已知 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$，求 $f(x)$ 的表达式。

解 1：令 $e^x+1=t$，则 $e^x=t-1$；于是由 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$ 得

$f(t)=(t-1)^2+(t-1)+1=t^2-t+1$

即有 $f(x)=x^2-x+1$

解 2：$f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1=(e^{2x}+2e^x+1)-e^x=(e^x+1)^2-(e^x+1)+1$

即有 $f(x)=x^2-x+1$

7. 已知 $f\left(\tan x+\frac{1}{\tan x}\right)=\tan^2 x+\frac{1}{\tan^2 x}+3$，$x\neq\frac{k\pi}{2}$（$k=0$，$\pm1$，$\pm2$，…），求 $f(x)$ 的表达式。

解：
$$f\left(\tan x+\frac{1}{\tan x}\right)=\tan^2 x+\frac{1}{\tan^2 x}+3=\tan^2 x+2\tan x\cdot\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan^2 x}+1$$
$$=\left(\tan x+\frac{1}{\tan x}\right)^2+1$$

即有 $f(x)=x^2+1$

8. 求下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

解：
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{0}{0+1}=0$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\sin n}{n+1}$

解：$|\sin n|\leqslant1$　且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{0}{1+0}=0$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\sin n}{n+1}=0$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$

解：
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)(1+n-1)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2}$$

9. 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to-1}(x^2+x+1)=(-1)^2+(-1)+1=1$

或解：$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(x^3-1)}{\lim\limits_{x\to -1}(x-1)}=\frac{(-1)^3-1}{-1-1}=\frac{-2}{-2}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(2x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{1+1}{2\times 1+1}=\frac{2}{3}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1-0}{3-0-0}=\frac{1}{3}$

(4) $\because\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{2x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-5x+4)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)}=\frac{1^2-5\times 1+4}{2\times 1-1}=\frac{0}{1}=0$

$\therefore\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-1}{x^2-5x+4}=\infty$

(5) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}{(x^2-9)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x+13)-4(x+1)}{(x^2-9)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{3+13}+2\sqrt{x+1})}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=\frac{-3}{(3+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{3+1})}=\frac{-3}{6(4+4)}=-\frac{1}{16}$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)=\sqrt{1+0}-0=1$

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1+x)-2}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{(1-x)(1+x)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{1+x}=-\frac{1}{2}$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\times\left(\frac{x}{2}\right)^2\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2\times\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{2}\times 1^2\times 1=\frac{1}{2}$

或解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\times\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\times$

$1\times 1=\frac{1}{2}$

(9) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x=\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x\right)$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{2}(1-x)}{\frac{\pi}{2}}=1\times\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}$

或解：设 $1-x=t$，当 $x\to 1$ 时，有 $t\to 0$；于是

$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x=\lim\limits_{t\to 0}t\tan\frac{\pi}{2}(1-t)=\lim\limits_{t\to 0}t\cot\frac{\pi}{2}t=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sin\frac{\pi}{2}t}\cdot\cos\frac{\pi}{2}t$