高等学校教材

线性代数 Linear Algebra

苏德矿 裘哲勇 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

线性代数

主编　苏德矿　裘哲勇

编者(按姓氏笔画排序)

王航平　张　彤　宗云南

赵雅囡　徐光辉

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书主要内容有：行列式、矩阵及其初等变换、线性方程组与向量的线性相关性、特征值和特征向量矩阵的相似对角化、二次型、线性空间与线性变换。本书可作为高等学校工科、理科（非数学类专业）本科生线性代数课程的教材，也可作为经济、管理等有关专业（第六章不要求）本科生的线性代数课程的教材。书中冠有“*”的部分供对线性代数有较高要求的专业选用和欲扩大知识面的学生阅读。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/苏德矿，裘哲勇主编．—北京：高等教育出版社，2005.7
ISBN 7-04-016549-X

Ⅰ.线... Ⅱ.①苏...②裘... Ⅲ.线性代数－高等学校－教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第067626号

策划编辑 徐 可 **责任编辑** 徐 可 **封面设计** 王凌波 **责任印制** 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司	**网上订购**	http://www.landraco.com
印　　刷	廊坊市文峰档案文化用品有限公司		http://www.landraco.com.cn
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2005年7月第1版
印　　张	13.5	**印　　次**	2005年7月第1次印刷
字　　数	250 000	**定　　价**	**16.00元**

物料号　16549－00

前　言

本书是根据国家教育部高等学校工科数学教学指导委员会拟定的线性代数课程教学基本要求,并参照全国硕士研究生入学统一考试线性代数部分考试大纲而编写的。

本书主要内容有:行列式、矩阵及其初等变换、线性方程组与向量的线性相关性、特征值和特征向量、矩阵的相似对角化、二次型、线性空间与线性变换。本书可作为高等学校工科、理科(非数学类专业)本科生线性代数课程的教材;也可作为经济、管理等有关专业(第六章不要求)本科生的线性代数课程教材。书中冠有“*”的部分供对线性代数有较高要求的专业选用和欲扩大知识面的学生阅读。

我们在编写时力求做到由浅入深、化难为易、说理透彻、叙述详尽。本书配有较多具有典型性的例题;并注重线性代数知识在实际中的应用。这样,既便于教师教学,又利于学生自学。

本书由苏德矿、裘哲勇担任主编,王航平、张彤、宗云南、赵雅囡、徐光辉共同编写(按姓氏笔划排序)。第一章由张彤编写;第二章由赵雅囡编写;第三章由徐光辉编写;第四章由裘哲勇编写;第五章由宗云南编写;第六章由王航平编写;全书由苏德矿、裘哲勇统稿。宗云南进行了认真仔细的校对。

浙江大学数学系吴明华教授参加了本书编写大纲的讨论,提出了许多宝贵建议,有些建议已在撰写本书时采纳;浙江大学教务部副部长金蒙伟教授对本书的编写给予了极大的关怀与支持;本书的主审人清华大学数学系俞正光教授对书稿进行了非常认真仔细的审查并提出了许多有建设性的意见和建议;此外,在本书的整个编写过程中,自始至终得到了高等教育出版社徐可同志的热心支持与帮助。他们的意见和建议使本书增色不少,在此一并向他们表示衷心的感谢。

本教材的书稿虽经多次认真修改与校对,但仍然会存在一些错误,我们衷心地希望得到专家、同行和读者的批评指正,使本书在教学过程中不断完善起来。

编者于杭州

2005 年 5 月

目　　录

第一章　行列式

行列式是线性代数的一个重要研究对象，是线性代数中的一个最基本、最常用的工具，它被广泛地应用到数学、物理、力学以及工程技术等领域中.

本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质、计算方法及如何应用行列式求线性方程组的解.

§1　二阶与三阶行列式

1.1　二阶行列式

设二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

用消元法求解. 为消去未知数 x_2，以 a_{22} 乘第一式，a_{12} 乘第二式，然后两式相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

类似地，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，有

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

称为二阶行列式. 横排的称行，竖排的称列，它含两行两列. 数 $a_{ij}(i = 1,2; j = 1,2)$ 称为二阶行列式(1.3) 的元素，其第一个下标 i 为行标，第二个下标 j 为列标，表示元素 a_{ij} 位于行列式的第 i 行，第 j 列.

上述二阶行列式的定义，可用对角线法则得到：图 1.1 中，a_{11} 至 a_{22} 的实连线称为主对角线，a_{12} 至 a_{21} 的虚连线称为副对角线，二阶行列式就是主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

根据二阶行列式的定义，(1.2) 式中的分子也可用二阶行列式表示，即

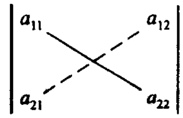

图 1.1

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

其中 D 是由方程组(1.1)的系数所确定的二阶行列式，称为系数行列式；D_1 是将 D 中 x_1 的系数 a_{11}、a_{21} 用常数项 b_1、b_2 替代所得的行列式；D_2 是将 D 中 x_2 的系数 a_{21}、a_{22} 用常数项 b_1、b_2 替代所得的行列式. 于是，当系数行列式 $D\neq 0$ 时，方程组(1.1)的解可简单地表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}$$

例 1　解二元一次方程组

$$\begin{cases} 5x_1-x_2=2 \\ 2x_1+3x_2=1 \end{cases}$$

解　由于

$$D=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=17\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=7$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1$$

因此

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{7}{17},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{1}{17}$$

1.2　三阶行列式

类似于二阶行列式，我们引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

称为三阶行列式.它含三行三列,是6项的代数和.可由如图1.2所示的对角线法则得到.带正号的三项,一项是主对角线上三元素的乘积;另两项是位于主对角线的平行线上两元素与它们相对角上的元素之积;带负号的三项可由副对角线类似得到.

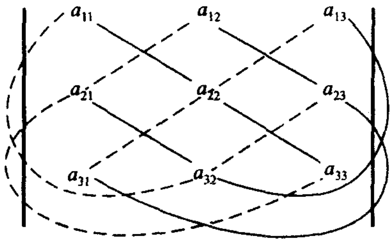

图1.2

例2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{vmatrix}$$

解 按对角线法则,有

$$\begin{aligned}D&=1\times4\times3+(-1)\times1\times1+1\times2\times0\\&\quad-1\times1\times0-(-1)\times2\times3-1\times4\times1=13\end{aligned}$$

对角线法则仅适用于二阶、三阶行列式,为了推广到 n 阶行列式,我们先介绍关于排列及逆序数、对换的有关知识.

习题 1－1

1.计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix}\sin x & -\cos x\\ \cos x & \sin x\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & -4\\ 3 & -1 & 8\end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix}a & b & c\\ 2 & 3 & -5\\ -3 & 1 & 4\end{vmatrix}$.

2.解方程:

(1) $\begin{vmatrix}5 & 1 & x\\ 4 & x & 0\\ 1 & 0 & x\end{vmatrix}=0$;　　(2) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & 2 & 1\\ 1 & 3 & x\end{vmatrix}=2$.

§2 排列及其逆序数

定义1.1 由数1,2,…,n 组成的一个有序数组,称为一个n 级排列.

n 级排列的一般形式为$i_1 i_2 \cdots i_n$,其中 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 分别为数 1,2,…,n 中的某一数,且互不相等. 例如,312 是一个 3 级排列,$123\cdots(n-1)n$ 是一个 n 级排列.

由 1,2,…,n 所组成的所有不同的n 级排列共有$P_n = n!$个,在这 $n!$个不同的 n 级排列中,$12\cdots n$ 是惟一一个按从小到大次序组成的排列,称为 n 级标准排列. 例如,3 级排列共有以下 6 种不同的排列:123,231,312,132,213,321,其中 123 是 3 级标准排列.

定义 1.2 在一个排列中,若某两个数的先后次序与标准排列不同,则称这两个数构成一个逆序. 一个排列中所有逆序的总数,称为这个排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列称为奇排列;逆序数为偶数的排列称为偶排列. n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数,记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

下面寻找计算排列逆序数的方法.

先看一个例子,在 4 级排列 4132 中,构成逆序的数对有

41;

43;

42,32;

因而 4132 的逆序数为

$$\begin{aligned}&1(1\text{ 前面比 }1\text{ 大的数的个数})\\&+1(3\text{ 前面比 }3\text{ 大的数的个数})\\&+2(2\text{ 前面比 }2\text{ 大的数的个数})\\&=4\end{aligned}$$

是一个偶排列.

一般地,n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中,$i_t(t = 2,3,\cdots,n)$ 前面比它大的数的个数称为 i_t 的逆序数,并记为 τ_t. 则按定义,n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数

$$\begin{aligned}\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = {} & \tau_2 \quad (i_2\text{ 的逆序数})\\&+ \tau_3 \quad (i_3\text{ 的逆序数})\\&+ \cdots\\&+ \tau_n \quad (i_n\text{ 的逆序数})\end{aligned} \tag{1.4}$$

例 1 求下列排列的逆序数:

(1)35412; (2)$12\cdots(n-1)n$; (3)$n(n-1)\cdots 21$.

解 按(1.4)得

(1)$\tau(35412)=0+1+3+3=7$;

(2)$\tau(12\cdots(n-1)n)=0$　标准排列是偶排列;

(3)$\tau(n(n-1)\cdots21)=1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

定义 1.3　将一个排列中某两个数的位置互换,而其余的数不动,就得到另一个排列,这样的变换称为对换.将相邻两个数对换称为相邻对换.

例如,偶排列4132经过4与3的对换后,就得到排列3142,是一个奇排列.这说明对换会改变排列的奇偶性.一般地,有下述结论

定理 1.1　任一排列经过一次对换后必改变其奇偶性.

证　先证相邻对换的情形.设排列

$$\cdots ij\cdots \tag{1.5}$$

经过 i 与 j 对换后变成排列

$$\cdots ji\cdots \tag{1.6}$$

这里"…"表示排列中不动的数,易知这些不动的数的逆序数经过对换没有改变,而 i,j 两元素的逆序数改变为:若排列(1.5)中 i 与 j 不构成逆序,则在(1.6)中,i 的逆序数增加1而 j 的逆序数不变;若排列(1.5)中 i 与 j 构成逆序,则在(1.6)中,i 的逆序数不变而 j 的逆序数减少1.因此排列(1.5)与排列(1.6)的奇偶性不同.

再证明一般对换的情形.设排列

$$\cdots ik_1\cdots k_nj\cdots \tag{1.7}$$

经过 i 与 j 对换后变成排列

$$\cdots jk_1\cdots k_ni\cdots \tag{1.8}$$

这个对换可经一系列相邻对换来实现.首先,将排列(1.7)作 n 次相邻对换,变成排列 $\cdots k_1\cdots k_nij\cdots$,再作 $n+1$ 次相邻对换,变成排列(1.8).因此,排列(1.7)变成排列(1.8),可经 $2n+1$ 次相邻对换来实现,由上段证明知,排列改变了奇偶性.　□

习题 1－2

1. 求下列各排列的逆序数:

(1) 315462;　(2) 21736845;

(3) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$;　(4) $24\cdots(2n)(2n-1)\cdots31$;

(5) $369\cdots(3n)147\cdots(3n-2)258\cdots(3n-1)$.

2. 选择 i 与 j,使

(1) $1274i56j9$ 为奇排列;　(2) $3972i15j4$ 为奇排列;

(3) $1i25j4897$ 为偶排列;　(4) $1245i6j97$ 为偶排列.

3. 证明:奇排列变成标准排列的对换次数为奇数,偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

§3 n 阶行列式的定义

3.1 三阶行列式展开式的特征

对角线法则只适用于二阶、三阶行列式,为了给出 n 阶行列式的定义,我们先来研究二阶、三阶行列式的展开式的共同特征.三阶行列式的展开式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \tag{1.9}$$

容易看出具有特点:

(1) 每乘积项都是三个元素的乘积,这三个元素取自不同行、不同列,即每乘积项取到且仅取到不同行、不同列的元素一次.

(2) 每乘积项若不考虑符号,其一般形式为 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$,其中行标的排列都是三级标准排列123,列标的排列 $p_1p_2p_3$ 是1、2、3三个数的某个排列,对应于1、2、3三个数的6种排列,展开式共有6项.

(3) 不难验证,每乘积项的符号与列标的逆序数 $\tau(p_1p_2p_3)$ 有关,当 $\tau(p_1p_2p_3)$ 是偶数时,该项取正号;当 $\tau(p_1p_2p_3)$ 是负数时,该项取负号.

因此,(1.9) 式可表示为如下形式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3} (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中 $p_1p_2p_3$ 是一个三级排列,$\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 表示对所有三级排列取和.

易验证,二阶行列式的展开式也可表示为类似的形式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2} (-1)^{\tau(p_1p_2)} a_{1p_1}a_{2p_2}$$

综上所述,我们找到了二阶、三阶行列式结构上共同的最本质的特征,并且易推广到 n 阶行列式.

3.2 n 阶行列式的定义

定义 1.4 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.10}$$

等于所有取自(1.10)中属于不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1.11}$$

的代数和,其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是一个 n 级排列. 当 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 是偶数时,乘积项(1.11)前取正号;当 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 是奇数时,乘积项(1.11)前取负号. 因此,n 阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1.12}$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是一个 n 级排列, $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对所有的 n 级排列取和.

按此定义的二阶、三阶行列式,与用对角线法则给出的二阶、三阶行列式显然是一致的. 当 $n=1$ 时,规定一阶行列式 $|a|=a$.

为了方便,用记号 D 来表示行列式,也可简记为 $\det(a_{ij})$,其中 a_{ij} 是行列式 D 的第 i 行第 j 列元素.

在行列式定义(1.12)式的每一乘积项中,n 个元素的行标构成的是标准 n 级排列,而这 n 个元素的次序是可以改变的. 因此,n 阶行列式中乘积项一般可写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1.13}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$, $j_1j_2\cdots j_n$ 是两个 n 级排列. 现考虑如何用这两个排列来确定乘积项(1.13)的符号.

由于排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 可经若干次对换变为标准排列 $12\cdots n$,因此适当交换(1.13)中因子的位置,可得到

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} = a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots a_{ns_n} \tag{1.14}$$

其中,排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 经相同的对换分别变为排列 $12\cdots n$ 和 $s_1s_2\cdots s_n$. 由定理 1.1 可知,排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 同时作一次对换同时改变了奇偶性. 因此它们的逆序数之和的奇偶性不变,于是有

$$\begin{aligned}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)} &= (-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(s_1s_2\cdots s_n)} \\ &= (-1)^{\tau(s_1s_2\cdots s_n)} \end{aligned} \tag{1.15}$$

由行列式定义可知(1.15)恰是乘积项(1.14)前的符号,因此乘积项(1.13)前的

正负号是

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$$

根据上面的结论，特别地，我们取定 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为标准排列 $12\cdots n$，则 n 阶行列式也可定义为

$$D = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} \tag{1.16}$$

例 1　计算上三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解　按定义，其展开式中乘积项为

$$a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

由于 D 的第一列中除 a_{11} 外其余元素全为零，为此只有取 $p_1 = 1$ 时才有可能使对应的乘积项不为零；在第二列中除 a_{12} 及 a_{22} 外其余元素全为零，且因 p_1 已取 1，则 p_2 不能取 1，为此只有取 $p_2 = 2$ 才有可能使对应的乘积项不为零. 依此类推，D 的 $n!$ 项中，除了排列 $p_1 p_2 \cdots p_n = 12\cdots n$ 对应的乘积项外其余全为零. 又因 $\tau(12\cdots n) = 0$，所以

$$D = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \triangleq \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \quad (\textstyle\prod \text{ 为连乘号})$$

即上三角行列式等于其主对角线元素的乘积.

同理，可求得下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

特别地，主对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

其中未写出的元素都是 0.

例 2　证明副对角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

其中未写出的元素都是0.

证　记 $\lambda_i = a_{i,n-i+1}$,按定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \qquad \square$$

习题 1－3

1. 写出4阶行列式中含 $a_{12}a_{34}$ 的项.
2. 按定义计算下列行列式:

(1) $D_4 = \begin{vmatrix} 0 & b & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & e \end{vmatrix}$;

(2)
$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & \cos\varphi & \cdots & -\sin\varphi & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ & & & \sin\varphi & \cdots & \cos\varphi & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \text{第 } i \text{ 列} \qquad \text{第 } j \text{ 列} \end{array}$$

其中对角线元素除已标出元素外全为1,其它元素除已标出元素外全为0.

§4　行列式的性质

计算 n 阶行列式的值是本章的中心任务之一.从定义出发计算高阶($n \geqslant 4$)