新世纪高职高专教改项目成果教材

简明微积分

李亚杰　黄根隆　主编
王建荣　王桂枝　副主编

高等教育出版社

新世纪高职高专教改项目成果教材

简明微积分

主　编　李亚杰　黄根隆
副主编　王建荣　王桂枝

高等教育出版社

内容简介

本书是新世纪高职高专教改项目成果教材，是作者在多年从事课程改革和教学研究的基础上，专为二年制高职编写的一本微积分教材。作者结合高职教育的特点和学生的基础状况，适度降低理论水平，注重培养学生用数学思想、方法解决实际问题的能力。在教学内容的编排上，注意与专业课衔接。

本书内容主要包括：函数、导数与微分、积分、微积分的一些应用和多元微积分初步。书中各节后均附有习题，书末附有答案。

本书教学时数不超过70学时。

图书在版编目(CIP)数据

简明微积分/李亚杰，黄根隆主编．—北京：高等教育出版社，2004.5

ISBN 7-04-014709-2

Ⅰ．简…　Ⅱ．①李…②黄…　Ⅲ．微积分－高等学校：技术学校－教材　Ⅳ．O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第020866号

策划编辑　蒋　青　**责任编辑**　郑洪深　**封面设计**　杨立新　**责任绘图**　杜晓丹
版式设计　金　伟　**责任校对**　张　颖　俞声佳　**责任印制**　杨　明

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	中国农业出版社印刷厂		
开　本	787×1092　1/16	版　次	2004年5月　第1版
印　张	7.25	印　次	2004年5月　第1次印刷
字　数	170 000	定　价	9.10元

出版说明

为认真贯彻《中共中央国务院关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》和《面向21世纪教育振兴行动计划》，研究高职高专教育跨世纪发展战略和改革措施，整体推进高职高专教学改革，教育部决定组织实施《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》（教高[2000]3号，以下简称《计划》）。《计划》的目标是："经过五年的努力，初步形成适应社会主义现代化建设需要的具有中国特色的高职高专教育人才培养模式和教学内容体系。"《计划》的研究项目涉及高职高专教育的地位、作用、性质、培养目标、培养模式、教学内容与课程体系、教学方法与手段、教学管理等诸多方面，重点是人才培养模式的改革和教学内容体系的改革，先导是教育思想的改革和教育观念的转变。与此同时，为了贯彻落实《教育部关于加强高职高专教育人才培养工作的意见》（教高[2000]2号）的精神，教育部高等教育司决定从2000年起，在全国各省市的高等职业学校、高等专科学校、成人高等学校以及本科院校的职业技术学院（以下简称高职高专院校）中广泛开展专业教学改革试点工作，目标是：在全国高职高专院校中，遴选若干专业点，进行以提高人才培养质量为目的、人才培养模式改革与创新为主题的专业教学改革试点，经过几年的努力，力争在全国建成一批特色鲜明、在国内同类教育中具有带头作用的示范专业，推动高职高专教育的改革与发展。

教育部《计划》和专业试点等新世纪高职高专教改项目工作开展以来，各有关高职高专院校投入了大量的人力、物力和财力，在高职高专教育人才培养目标、人才培养模式以及专业设置、课程改革等方面做了大量的研究、探索和实践，取得了不少成果。为使这些教改项目成果能够得以固化并更好地推广，从而总体上提高高职高专教育人才培养的质量，我们组织了有关高职高专院校进行了多次研讨，并从中遴选出了一些较为成熟的成果，组织编写了一批"新世纪高职高专教改项目成果"教材。这些教材结合教改项目成果，反映了最新的教学改革方向，很值得广大高职高专院校借鉴。

新世纪高职高专教改项目成果教材适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

高等教育出版社

2002年11月30日

前　言

本书是作者在多年从事课程改革和教学研究的基础上,专为招收中职毕业生的三年制高职编写的一本微积分教材。

本书的编写原则是:夯实基础,强化能力,立足应用,服务专业,突出工具性。它有以下特色:

1. 力求从实际问题中引出数学概念,利用数学概念的图形和数值特性,揭示概念的本质,强化数学概念与实际问题的联系。

2. 针对学生的基础状况,适当增加中学数学的相关知识。

3. 结合高职教育的特点,适度降低理论水平,采用数形结合与描述的方法阐明数学概念和验证定理。尤其在函数极限与连续的处理上,只利用对函数值变化趋势的分析和函数图形的描述,给出函数极限与连续的概念,而略去了极限的运算、无穷小量和连续性的判断等。

4. 经广泛征求了专业课教师的意见,书中体现了必须、够用和为专业服务的原则,为专业课教学打下坚实的基础。例如,在教学内容的编排上把微积分的基本概念和计算放在前三章,在此之后再讲微积分的应用,以便更好地与专业课衔接。

5. 本书内容简明、条理清晰、语言简练、通俗直观。

6. 注重培养学生用数学思想、方法解决实际问题的能力。例如,在导数运算的例题和习题中都注重这方面能力的培养。

7. 书中例题较多,用以训练解题方法和思路,有利于学生掌握知识。

本书内容主要包括:函数、导数与微分、积分、微积分的一些应用和多元微积分初步。

本书教学时数不超过70学时,在实际教学中可根据具体情况对第一章和第五章适度把握,50学时即可完成本书的核心内容。“*”号为选学内容。

由于作者水平有限,时间仓促,错误和不当之处,恳请同行和读者指正。

目　　录

第一章　函数 …… 1

1.1　函数的概念 …… 1

1.2　一次函数与二次函数 …… 6

1.3　函数的简单性质与反函数 …… 11

1.4　基本初等函数 …… 16

1.5　初等函数 …… 23

1.6　函数的极限 …… 26

第二章　导数与微分 …… 33

2.1　导数的概念 …… 33

2.2　导数的一般运算 …… 37

2.3　几类求导问题 …… 42

2.4　函数的微分 …… 46

第三章　积分 …… 51

3.1　不定积分的概念和性质 …… 51

3.2　不定积分的积分方法 …… 55

3.3　定积分的概念 …… 59

3.4　定积分的计算 …… 66

第四章　微积分的一些应用 …… 71

4.1　函数的单调性与函数的极值 …… 71

4.2　函数的最大值与最小值 …… 76

4.3　平面图形面积和旋转体体积 …… 80

***第五章　多元微积分初步** …… 85

5.1　空间解析几何简介 …… 85

5.2　二元函数 …… 91

5.3　偏导数与全微分 …… 94

5.4　二元复合函数的求导法 …… 96

5.5　重积分的概念及计算 …… 97

习题答案 …… 102

第一章　函　　数

在同一个自然现象、工程技术和经济活动过程中，常常同时有几个变量在变化着，它们之间相互联系并遵循着一定的变化规律，所谓函数关系就是这些变量之间的依赖关系．它也是微积分研究的主要对象．本章将就函数及其相关内容作一概括性的研究，并对函数的极限作一简要介绍．

1.1　函数的概念

1.1.1　函数的定义

先看下面的例子：

例 1　某餐厅从 6 月 1 日(星期日)起开张早餐业务．表 1 - 1 是该餐厅从 6 月 1 日到 6 月 15 日早餐营业额的统计．

表 1 - 1　某餐厅早餐营业额

日期(6 月)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
营业额(百元)	5.3	8.9	9.1	9.0	8.9	11	6.1	5.8	9.2	9.1	8.9	9.0	10	5.2	5.7

我们看到对于其中的每一天 r，都产生一个营业额 h．如果你细心的话，可以从表中找出某些规律．

例 2　图 1 - 1 是某气象站用自动温度记录仪记录下来的某地一昼夜的温度变化规律，其中横坐标是时间 t(时)，纵坐标是温度 T(℃)．温度 T 随着时间 t 变化，对于每一个确定的时间 t，就有一个确定的温度 T 和它对应．

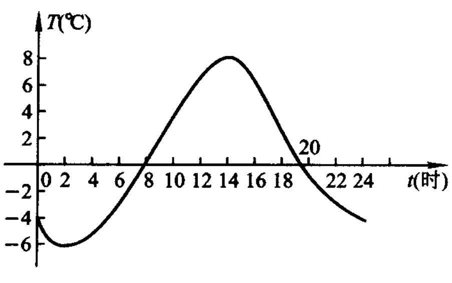


图 1 - 1

例 3　某位同学一个月的生活费用为 300 元，假定他吃饭用去 p 元，其他消费(如购买学习

用品)用去 q 元,则 $p+q=300$.显然饭费 p 的多少,决定了他的其他消费的额度 q,即

$$q=300-p.$$

例 4 某运输公司规定货物吨公里运价为:在 80 公里以内,每公里 3 元;超过 80 公里,超过的部分每公里按原来的八折收费,则运费 m 与里程 s 之间的关系为

$$m=\begin{cases}3s, & 0<s\leqslant 80,\\ 240+2.4(s-80), & s>80.\end{cases}$$

上面各例都体现了在某一特定过程中,变量之间的依赖关系:

$$r\to h,\ t\to T,\ p\to q,\ s\to m.$$

其中变量 r、t、p、s 可在一定范围内自由变化,这样的变量我们称为自变量;而变量 h、T、q、m 则分别依赖于 r、t、p、s,并且随着后者的变化而变化,这样的变量我们称为因变量.自变量和因变量之间的这种依赖关系就是函数关系.概括起来,我们给出函数的定义如下:

定义 设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的非空数集.如果对于 D 中的每一个数 x,按照某种对应法则 f,变量 y 都有惟一确定的数值和它对应,则称 y 是 x 的**函数**,记作

$$y=f(x).$$

集合 D 叫做这个函数的**定义域**,x 叫做**自变量**,y 叫做**因变量**.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**,记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.当 x 取遍 D 中的所有数值时,对应的函数值的集合 M,叫做函数的**值域**.

由上述定义可知,在前面的例题中,h 是 r 的函数,T 是 t 的函数,q 是 p 的函数,m 是 s 的函数.

函数定义中对应法则的记号 f 也可以用其他字母表示,如“F”,“φ”等等,这时函数就记作 $y=F(x)$,$y=\varphi(x)$ 等等.如果在同一个问题中需要同时讨论几个不同的函数,则要用不同的函数记号.

1.1.2 函数的表示法

表示函数的常用方法有表格法、图像法和公式法.

例 1 是把一系列自变量的值和与之对应的函数值列成表格来表示函数关系的,称为**表格法**;例 2 是用直角坐标系中的点或曲线来表示函数关系的,称为**图像法**;例 3 和例 4 是用公式表示两个变量间的函数关系的,称为**公式法**.其中例 4 中的函数在自变量不同的取值范围内采用了不同的式子来表示,称为**分段函数**.

分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并.

例 5 已知 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1,\\ x^2-1, & 1<|x|<2,\end{cases}$ 求 $f(-1)$,$f(-\sqrt{2})$ 及函数的定义域.

解 因为 $|-1|=1$,所以 $f(-1)=\sqrt{1-(-1)^2}=0$;
因为 $1<|-\sqrt{2}|<2$,所以 $f(-\sqrt{2})=(-\sqrt{2})^2-1=1$.
函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,2)$.

1.1.3 函数的定义域

实际问题中的变量都是与某一运动过程相联系的,因此它们都在某一特定范围内取值.如例

3中，该学生不可能一个月不吃饭，假定他每月饭费最少要 210 元，则 p 的取值范围只能是 $210\leqslant p\leqslant 300$.

一般地，函数的定义域要根据所考虑问题的实际情况来确定.但在数学上，常常只给出函数的表达式而没有说明实际背景，这时函数的定义域就是使表达式有意义的自变量的取值范围.

例 6 确定下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x-1}+(x-3)^0$；　　(2) $y=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x+2}$.

解 (1) 要使表达式有意义，必须满足偶次方根的被开方数非负、零次幂的底不等于零.

所以 $\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ x-3\neq 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\geqslant 1,\\ x\neq 3.\end{cases}$ 用区间表示函数的定义域为 $[1,3)\cup(3,+\infty)$.

(2) 由于分式的分母不为零才有意义，所以

$$\begin{cases}9-x^2\geqslant 0,\\ x+2\neq 0.\end{cases}$$

解得 $-3\leqslant x\leqslant 3$ 且 $x\neq -2$.用区间表示函数的定义域为 $[-3,-2)\cup(-2,3]$.

1.1.4 函数的对应法则

我们可以把函数想像成一个工作间，而对应法则就是工作间里的一种具体操作.如图 1－2 所启示的那样，对于定义域内的任一数 x 进入该工作间，在对应法则的操作下，就被转化成值域里的一个数 $f(x)$.

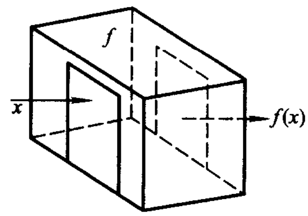


图 1－2

例如，工作间里的具体操作(对应法则)是 2 倍加 1，则定义域内的任一数 x 进入工作间，出来后就被转化成 $2x+1$；如果□是定义域内的一个数，它进入工作间再出来后，就被转化成 2□＋1.

例 7 设函数 $f(x)=2x^2+1$，求 $f(-2)$，$f(x+\Delta x)-f(x)$.

解 $f(-2)=2\times(-2)^2+1=9$,

$$f(x+\Delta x)-f(x)=[2(x+\Delta x)^2+1]-(2x^2+1)=4x\cdot\Delta x+2(\Delta x)^2.$$

例 8 设 $f(x+1)=x^2+3x+5$，求 $f(x)$.

解法一 求 $f(x)$，实际上就是求工作间内的具体操作是什么. $x+1$ 进入工作间再出来后，我们就要去找出结果中对 $x+1$ 是怎样描述的.

事实上，由于结果中 $x^2+3x+5=x^2+2x+1+x+4=(x+1)^2+(x+1)+3$，所以对于定义域内的任意一个自变量 x，在工作间内被施行的操作都可表示为 x^2+x+3，故

$$f(x)=x^2+x+3.$$

解法二 令 $u=x+1$，则 $x=u-1$，可得

$$f(u)=(u-1)^2+3(u-1)+5=u^2+u+3.$$

所以
$$f(x)=x^2+x+3.$$

1.1.5 建立函数关系式举例

运用数学工具解决实际问题，先要给问题建立数学模型，即建立函数关系式.一般需要注意

的是:(1) 确定问题中哪些是变量,哪些是常量;(2) 要把变化的量暂时固定,以便分析变量之间的依赖关系,继而建立它们之间的函数关系式;(3) 要依据变量在实际问题中的意义确定函数的定义域.

例 9 当某商品的价格为 6 元时,可以卖出 800 件;若价格每提高 0.5 元,则就少卖出 40 件.假设该商品的销售量随价格的变化是均匀的,求销售量 y 与价格 $x(x\geqslant 6)$之间的函数关系.

解 由于当价格提高 $x-6$ 元时,将少卖$\frac{x-6}{0.5}\times 40=80x-480$(件),所以销售量为

$$y=800-(80x-480),\quad 即\quad y=1\ 280-80x\quad (x\geqslant 6).$$

例 10 乘坐某种出租汽车,行驶路程不超过 4 公里时,付费 10 元;行驶路程超过 4 公里时,超过部分每公里付费 1.2 元.假定汽车行驶中没有等候时间,求付费金额与行驶路程之间的关系.

解 设行驶路程为 x 公里,付费金额为 y 元.

当 $x\leqslant 4$ 时,$y=10$;当 $x>4$ 时,$y=10+(x-4)\times 1.2=5.2+1.2x$,因此,付费金额与行驶路程之间的关系为

$$y=\begin{cases}10, & 0<x\leqslant 4,\\ 5.2+1.2x, & x>4.\end{cases}$$

例 11 降水量是指水平地面单位面积上所降雨水的深度.现用底面直径为 32 cm,高为 35 cm的圆锥形的容器来测量降水量(图 1-3).如果在一次降水过程中,此容器中的雨水深为x cm,则此次降水量 y cm 为多少(圆锥的体积=(底面积×高)÷3)?

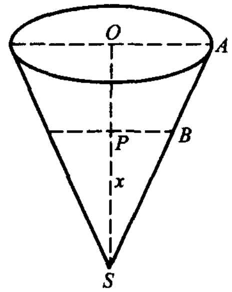


图 1-3

解 因为雨水都是从底面降入容器,要求降水量,只须求出容器中降水的体积,再除以容器的底面积.

如图 1-3 中,水面圆的半径为 PB,由相似三角形知识可知

$$\frac{PB}{OA}=\frac{PS}{OS},即\frac{PB}{16}=\frac{x}{35},PB=\frac{16}{35}x.$$

于是容器中降水的体积为$\frac{1}{3}\pi\left(\frac{16}{35}x\right)^2\cdot x$,又容器的底面积为 $\pi\cdot 16^2$,所以降水量为

$$y=\frac{\frac{1}{3}\pi\left(\frac{16}{35}x\right)^2\cdot x}{\pi\cdot 16^2},即\quad y=\frac{1}{3\ 675}x^3(\text{cm}),x\in(0,35].$$

习题 1.1

1. 王先生从学校离开.下列图中哪几个图像分别与下述三件事吻合得最好?并为剩下的那个图像做出解释.

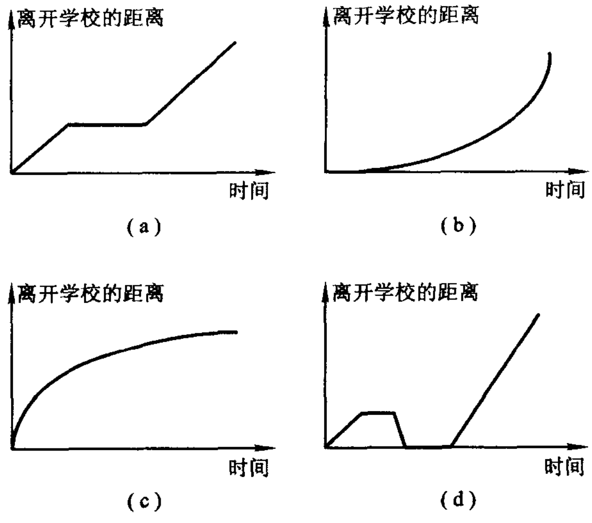
(1) 王先生离开学校不久,发现一些材料忘在教室里,于是立刻返回学校取了材料再上路.

(2) 王先生在路途中以匀速骑车,只是在途中给自行车打了一次气,耽误了一些时间.

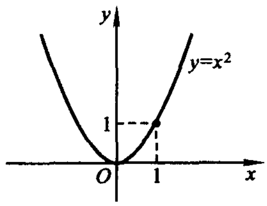
(3) 王先生出发后,心情轻松,边骑车,边欣赏四周景色,后来为了赶路便开始加速.

2. 下图给出了函数 $y=f(x)$的图像.说出函数的定义域和值域.

3. 作出本节例 1 所表示函数的图像.



(第 1 题图)



(第 2 题图)

4. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-9}$; (2) $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{x-1}$; (3) $y=\sqrt{4-x^2}$; (4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x(x-2)}}$.

5. 已知 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x<1,\\ 2, & x=1,\\ x+1, & x>1,\end{cases}$ 求(1) $f(0)$;(2) $f(1)$;(3) $f(2)$.

6. 已知 $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$,求(1) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$;(2) $f(-1)$;(3) $f[f(3)]$.

7. 已知 $f(x-1)=\dfrac{x+3}{x-2}$,求 $f(x)$.

8. 以常速 $A\ \mathrm{cm^3/s}$ 向一倒立的圆锥形容器内注水.容器的底面半径为 r cm,高为 h cm.试将容器中水的体积 $V(\mathrm{cm^3})$分别表示为时间 t(s)与水的高度 y(cm)的函数.

9. 有一边长为 a 的正方形铁片,从它的四个角截去相等的小正方形,然后折起各边做成一个无盖的小盒子,求小盒子的容积 V 与截去的小正方形边长 x 之间的函数关系,并确定其定义域.

10. 某市电话局规定市话收费标准为:3 分钟以内,收费 0.18 元,超过 3 分钟,每分钟收费 0.11 元,求每次

打电话的费用 y(元)与打电话的时间 t(分钟)的关系式.

11. 某工厂生产产品 1 000 吨,定价为 130 元/吨.销售量在 700 吨以内的部分,按原价出售,超过 700 吨的部分打 9 折出售.试将销售收入表示成销售量的函数,并作出函数的图像.

1.2 一次函数与二次函数

1.2.1 一次函数

形如 $y=kx+b$(k、b 为常数且 $k\neq0$)的函数称为**一次函数**.一次函数的定义域和值域都是 $(-\infty,+\infty)$.

当 $b=0$ 而 $k\neq0$ 时,一次函数化为 $y=kx$,称为**正比例函数**;

若 $k=0$,b 为常数,则 $y=kx+b$ 化为 $y=b$,称为**常函数**,它不是一次函数.

一次函数的图像是一条直线,因此也称一次函数为**线性函数**.通常,我们把一次函数 $y=kx+b$ 的图像叫做直线 $y=kx+b$,其中 k 称为直线的**斜率**,b 称为直线在 y 轴上**截距**.

图 1-4 中的(a)、(b)、(c)分别是函数 $y=2x-1$、$y=-\frac{1}{2}x+1$、$y=3x$ 的图像.

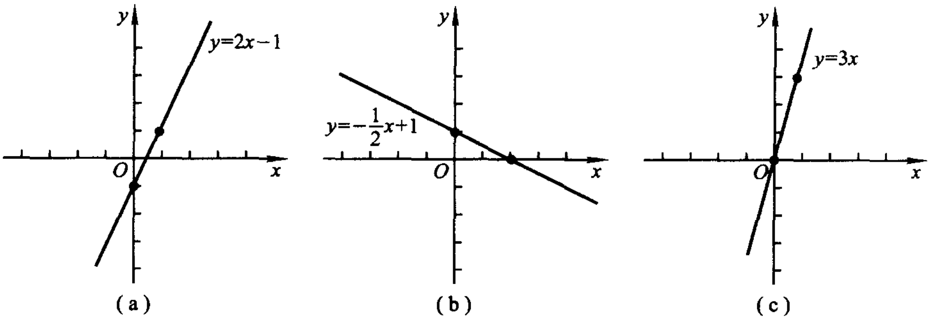


图 1-4

正如图 1-4 所显示的那样:$k>0$ 时,直线 $y=kx+b$ 从左到右逐渐升高,y 随着 x 的增大而增大,$k<0$ 时,直线逐渐降低,y 随着 x 的增大而减小;$b>0$ 时,直线与 y 轴的正半轴相交,$b<0$时,直线与 y 轴的负半轴相交,$b=0$ 时,直线过坐标原点.

例 1 若直线 $y=kx+b$ 不经过第三象限,确定 k、b 的取值.

解 一条直线不经过第三象限,则它必是从左到右逐渐降低的,且与 y 轴的负半轴没有交点.所以 $k<0$,$b\geqslant0$(图 1-5).

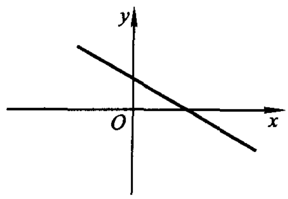


图 1-5

例 2 已知一次函数的图像过点(3,0),且与 y 轴交点的纵坐标为 -6,求函数关系式.

解 设一次函数为 $y=kx+b$.由于函数的图像与 y 轴交点的纵坐标为 -6,所以点$(0,-6)$和$(3,0)$都在函数的图像上.于是

$$\begin{cases}b=-6,\\3k+b=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}b=-6,\\k=2.\end{cases}$$

所以，所求一次函数关系式为 $y=2x-6$.

直线 $y=kx+b$ 的斜率可以根据直线上已知两点的坐标来确定.

设 $y_1=kx_1+b$，$y_2=kx_2+b$，则点 (x_1,y_1)、(x_2,y_2) 在直线 $y=kx+b$ 上，当 $x_1\neq x_2$ 时，比值 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 就是直线 $y=kx+b$ 的斜率(图 1－6)，即 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

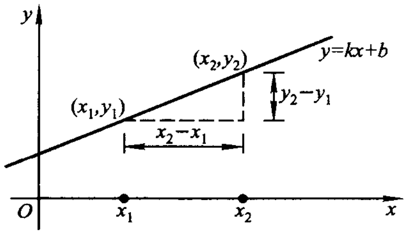


图 1－6

如果已知直线的斜率 k 和直线上的一点 (x_0,y_0)，可用下面公式求得这条直线的表达式：

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

我们也把上式叫做这条直线的方程. 通过化简，该直线方程可化为 $y=kx+b$ 的形式.

例如，已知直线的斜率是 2，且直线经过点 $(-1,1)$，则这条直线的方程为 $y-1=2(x+1)$，即

$$y=2x+3.$$

例 3 在某种新药的临床试验中，人体每毫升血液中含药量 y(微克)随时间 x(小时)的变化如图 1－7 所示. 求 y 与 x 之间的函数关系.

解 当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，原点和 $(2,6)$ 在图像上，设 $y=kx$，则 $6=k\cdot 2$，$k=3$. 所以函数关系为

$$y=3x.$$

当 $x\geqslant 2$ 时，点 $(2,6)$ 和 $(8,3)$ 在图像上，所以 $k=\dfrac{3-6}{8-2}=-\dfrac{1}{2}$，任取图像上一点，得

$$y-6=-\frac{1}{2}(x-2)，即\ y=-\frac{1}{2}x+7.$$

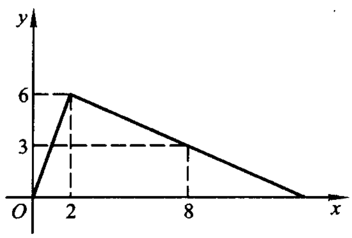


图 1－7

在图像与 x 轴交点处，含药量为零，即 $y=0$. 此时，$x=14$(小时).

于是，含药量 y(微克)与时间 x(小时)之间的关系为

$$y=\begin{cases}3x, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ -\dfrac{1}{2}x+7, & 2<x\leqslant 14.\end{cases}$$

1.2.2 二次函数

形如 $y=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$ 的函数称为**二次函数**，二次函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

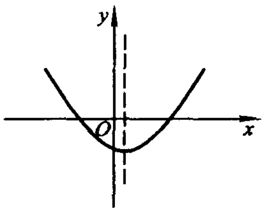
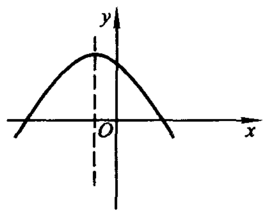
如 $y=2x^2-3x+6$,$y=-\frac{1}{2}x^2-1$,$y=3x^2$,$y=-2x^2+x$ 等都是二次函数.

将 $y=ax^2+bx+c$ 配方,可变形为 $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$,称为二次函数的**顶点式**.它对于我们作出二次函数的图像和研究其性质都有很重要的作用.

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像是一条对称轴垂直于 x 轴的抛物线.抛物线的顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$,对称轴是 $x=-\frac{b}{2a}$.通常,我们把函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像叫做抛物线 $y=ax^2+bx+c$.

根据二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像可归纳其性质如表 1-2.

表 1-2　二次函数的图像和性质

函数	二次函数 $y=ax^2+bx+c$(a、b、c 是常数,$a\neq0$)	
	$a>0$	$a<0$
图像		
性质	(1) 抛物线开口向上,并向上无限延伸. (2) 顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$,对称轴是 $x=-\frac{b}{2a}$. (3) 当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时,y 随着 x 的增大而减小;当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时,y 随着 x 的增大而增大. (4) 抛物线有最低点,当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时,y 有最小值,$y_{最小值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.	(1) 抛物线开口向下,并向下无限延伸. (2) 顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$,对称轴是 $x=-\frac{b}{2a}$. (3) 当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时,y 随着 x 的增大而增大;当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时,y 随着 x 的增大而减小. (4) 抛物线有最高点,当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时,y 有最大值,$y_{最大值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

例 4　将下列二次函数化为顶点式:

(1) $y=-2x^2+4x-1$;　　(2) $y=\frac{1}{2}x^2-2x$.

解　(1) 因为 $y=-2x^2+4x-1=-2(x^2-2x+1-1)-1=-2[(x-1)^2-1]-1=-2(x-1)^2+1$,所以,二次函数的顶点式为 $y=-2(x-1)^2+1$.

(2) 因为 $y=\frac{1}{2}x^2-2x=\frac{1}{2}(x^2-4x+4-4)=\frac{1}{2}[(x-2)^2-4]=\frac{1}{2}(x-2)^2-2$,所以,二

次函数的顶点式为 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-2$.

例 5 已知抛物线的顶点坐标是(2,2),且经过点(3,0),求这条抛物线的函数关系式.

解 设抛物线为 $y=a(x-2)^2+2$,由于抛物线过点(3,0),所以

$$0=a(3-2)^2+2,\text{故 } a=-2.$$

于是,所求抛物线为 $y=-2(x-2)^2+2$,即 $y=-2x^2+8x-6$.

例 6 某跳水运动员进行 10 m 跳台跳水训练时,身体(看成一点)在空中的运动路线是经过原点 O 的一条抛物线,如图 1-8 所示.在跳某个规定动作时,正常情况下,该运动员在空中的最高处距水面 $10\frac{2}{3}$ m,入水处距池边的距离为 4 m,同时,运动员在距水面高度为 5 m 以前,必须完成规定的翻腾动作,否则就会出现失误.

(1) 求这条抛物线的函数表达式;

(2) 在某次试跳中,测得运动员在空中的运动路线是图 1-8 中的抛物线,且运动员在空中调整好姿势后,距池边的距离为 $3\frac{3}{5}$ m,问此次试跳会不会失误?并通过计算说明理由.

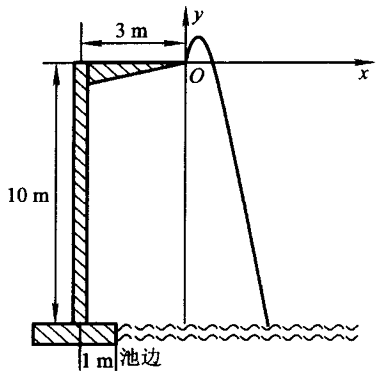


图 1-8

解 (1) 由题意可知:入水处对应的点的坐标为 $(2,-10)$,抛物线顶点的纵坐标为 $10\frac{2}{3}-10=\frac{2}{3}$,且原点在抛物线上.设抛物线解析式为 $y=ax^2+bx+c(a<0)$,则 $c=0$,且

$$\begin{cases}4a+2b=-10,\\ \dfrac{-b^2}{4a}=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

解上述方程组,考虑到抛物线顶点只能在 y 轴右侧,得 $a=-\frac{25}{6}$,$b=\frac{10}{3}$.

所以,这条抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{25}{6}x^2+\frac{10}{3}x$.

(2) 当 $x=3\frac{3}{5}-2=\frac{8}{5}$ 时,可求得 $y=-\frac{16}{3}$,此时,运动员距水面的高度为 $10-\frac{16}{3}=\frac{14}{3}<5$,故此次试跳会出现失误.

例 7 某旅社有客房 120 间,每间客房的日租金为 50 元,每天都客满.旅社装修后要提高租金,经市场调查,如果一间客房的日租金每增加 5 元,则客房每天出租会减少 6 间.不考虑其他因素,旅社将每间客房的日租金提到多少元时,客房日租金的总收入最高?比装修前的日租金总收入增加多少元?

解 设每间客房的日租金提高到 x 元,客房日租金的总收入为 y 元,则每天客房出租数会减少 $6\cdot\frac{x-50}{5}$.根据题意,有

$$y=\left(120-6\cdot\frac{x-50}{5}\right)\cdot x=-\frac{6}{5}x^2+180x.$$

因为 $-\frac{b}{2a}=-\frac{180}{2\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)}=75$, $\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{-180^2}{4\left(-\frac{6}{5}\right)}=6\ 750$,

故当 $x=75$ 时,y 有最大值,即 $y_{最大值}=6\ 750$. 装修前的日租金总收入为 $120\times 50=6\ 000$(元),$6\ 750-6\ 000=750$(元).

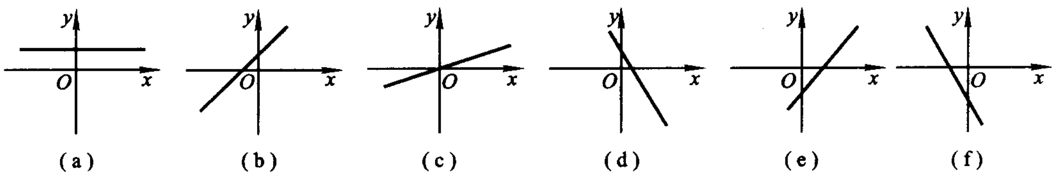
所以,将每间客房的日租金提到 75 元时,总收入最高,比装修前的日租金总收入增加 750 元.

习题 1.2

1. 将下面的图像与下列函数对应起来:

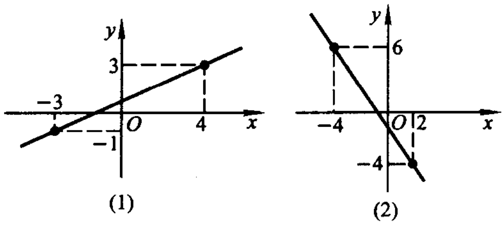
(1) $y=-3x+4$; (2) $y=x+6$; (3) $y=x-5$;

(4) $y=5$; (5) $y=\frac{1}{2}x$; (6) $y=-4x-5$.



(第 1 题图)

2. 指出下列图中所示直线的斜率,并求直线的方程:

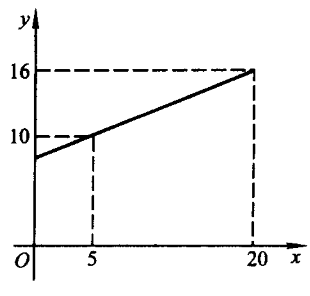


(第 2 题图)

3. 弹簧的长度 y 与所挂物体的质量之间的关系为一次函数,如图所示,求弹簧不挂物体时的长度,

4. 根据下列条件,求直线的方程:

(1) 斜率是 $-\frac{2}{3}$,过点 $(1,-2)$; (2) 过直线 $y=3x-6$ 与 y 轴的交点,且斜率为 $-\frac{1}{2}$.



(第 3 题图)

5. 假定你有 100 元钱,用于购买磁带和笔记本,其单价分别为 6 元/盘、2 元/本.

(1) 求出你购买的磁带盘数和笔记本本数之间的关系;

(2) 如果你手里的钱数不变,而磁带降为 5 元/盘,求出你购买的磁带盘数和笔记本本数之间的关系.

6. 某移动通讯公司开设了两种通讯业务."全球通":使用者先缴 50 元月租费,然后每通话一分钟,再付话费 0.4 元;"神州行":不缴月租费,每通话一分钟,付话费 0.6 元(以上均为市内通话).若一个月内通话 x 次,两种方式的费用分别为 y_1 元和 y_2 元.

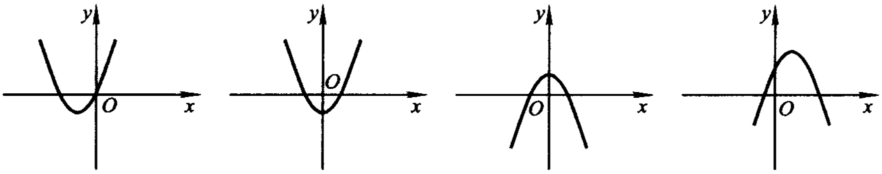
(1) 分别写出 y_1 和 y_2 与 x 之间的函数关系式;

(2) 一个月通话多少分钟,两种通讯费用相同?

(3) 某人估计一个月内要通话 300 分钟,应选择哪种通讯业务合算?

7. 将下面的图像与下列函数对应起来:

(1) $y=x^2-1$;　(2) $y=1-x^2$;　(3) $y=x^2+2x$;　(4) $y=-(x-1)^2+2$.



(a)　(b)　(c)　(d)

(第 7 题图)

8. 将下列二次函数化为顶点式:

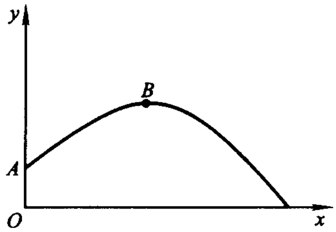
(1) $y=3x^2+12x$;　(2) $y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$;　(3) $y=-x^2-6x+1$.

9. 正方形的边长是 3,若边长增加 x,则面积增加 y,求 y 与 x 的函数关系式.

10. 一位学生测试铅球.已知铅球所经过的路线是抛物线的一部分(如图).如果这位学生出手处坐标为 $A(0,2)$,铅球到达的最高点坐标为 $B(6,5)$.

(1) 求抛物线的函数表达式;

(2) 该生把铅球推出多远?



(第 10 题图)

1.3 函数的简单性质与反函数

1.3.1 函数的单调性

观察下列图像: