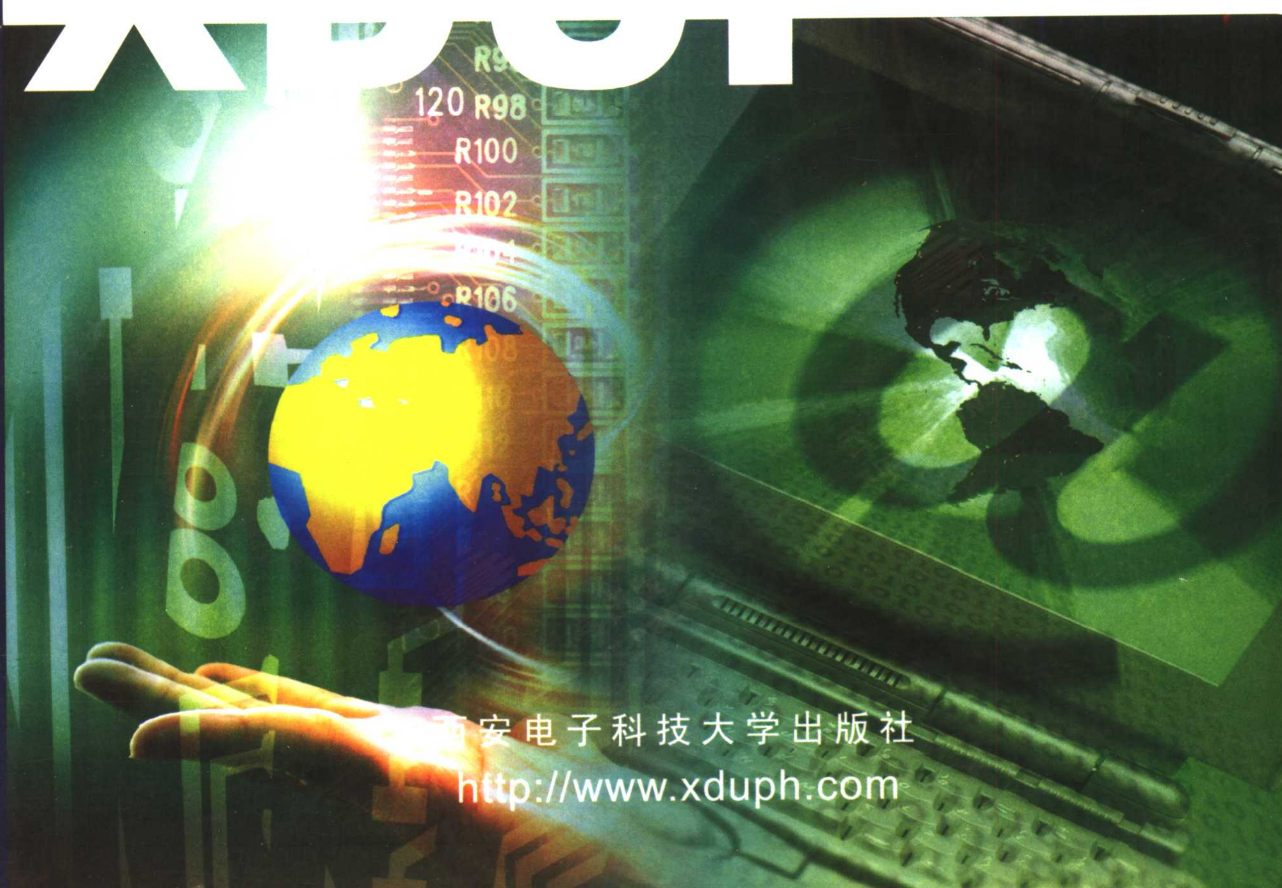
面向21世纪

高等学校计算机类专业系列教材

离 散 数 学

Discrete Mathematics

乔维声 编著



西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

面向21世纪高等学校计算机类专业系列教材

离散数学

Discrete Mathematics

乔维声　汤惟　编著

西安电子科技大学出版社

2005

内容简介

本教材根据应用型本科计算机专业的教学要求编写。

全书共分五篇十二章，主要内容有命题逻辑、谓词逻辑、集合、关系、函数、图论基础、图论的典型问题、代数系统、群与格、组合计数基本方法、差分方程、容斥原理和抽屉原理等。为使读者适应本课程概念多、内容抽象、逻辑性强的特点，编写时力求做到概念清晰、准确，推理严谨且通俗易读。

由于信息科学技术的发展，近年来计算机专业课程体系有较大变化，特别是数据通信、信息安全理论与技术等正在融入本科教学课程中。为适应这种变化，本教材对经典的离散数学教学内容做了一定取舍，将组合数学基础作为一篇设置。根据各校专业方向的侧重以及学时数不同，本书提供不同内容和学时的选择，用来满足离散数学单课型和多课型的教学要求。

本书既可作为普通应用型本科院校的计算机专业教材，也可作为信息系统专业或其他非计算机专业相应课程的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学＝Discrete Mathematics/乔维声等编著.
—西安：西安电子科技大学出版社，2004.10
（面向21世纪高等学校计算机类专业系列教材）
ISBN 7-5606-1447-7

Ⅰ.离… Ⅱ.乔… Ⅲ.离散数学-高等学校-教材 Ⅳ.0158

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第095283号

策　　划　毛红兵
责任编辑　邵汉平　毛红兵
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　编　710071
http://www.xduph.com　　E-mail：xdupfxb@pub.xaonline.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西华沐印刷科技有限责任公司
版　　次　2005年1月第1版　2005年1月第1次印刷
开　　本　787毫米×1092毫米　1/16　印张　19.625
字　　数　465千字
印　　数　1～4000册
定　　价　21.00元
ISBN 7-5606-1447-7/O·0073(课)

XDUP 1718001-1

前　言

离散数学是计算机各专业重要的基础理论课。它以研究离散量的结构和相互关系为主要目标。本课程旨在培养学生的抽象思维以及严格的逻辑推理能力，为学好后继的专业课程打好基础，并为今后处理离散信息、提高专业理论水平、从事计算机的实际工作提供必备的数学工具。

本教材根据应用型本科计算机专业的教学要求编写。由于信息科学技术的发展，近年来计算机专业课程体系有较大变化，特别是数据通信、信息安全理论与技术等正在融入本科教学课程中。为适应这种变化，本教材对经典的离散数学教学内容做了一定取舍，特别是将组合数学基础作为一篇设置。

全书共分五篇十二章，主要内容有命题逻辑、谓词逻辑、集合、关系、函数、图论基础、图论的典型问题、代数系统、群与格、组合计数基本方法、差分方程、容斥原理和抽屉原理等。为使读者适应本课程概念多、内容抽象、逻辑性强的特点，编写时力求做到概念清晰、准确，推理严谨且通俗易读。

本教材可以满足离散数学单课型和多课型教学要求。如果按照单课型安排教学，建议教学内容将第一、二、三篇作为必选，四、五篇任选其一，教学时数为 80 学时。如果按照多课型安排教学，建议《离散数学Ⅰ》的教学内容为第一、二、三篇，学时数 60；《离散数学Ⅱ》的教学内容为四、五篇，教学时数为 40 学时。

本教材由江汉大学乔维声主编。第 1 章至第 9 章由乔维声编写，第 10 章至第 12 章由汤惟编写。在本书的编写过程中，西安电子科技大学出版社的领导和同志们给予了极大的支持，我们的同事和朋友也提供了很大的支持和帮助，在此对所有关心和支持本书出版的同志们表示诚挚的谢意。

由于笔者水平有限，书中难免存在一些不妥和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编　者

2004 年 10 月于武汉

目　录

第一篇　数理逻辑

第二篇 集合论

第四篇 近世代数

第五篇 组合数学基础

第一篇 数理逻辑

逻辑是研究推理的。早在17世纪莱布尼兹就提出一种设想：能否使人们的推理不依赖于对推理过程中命题含义的思考，而用计算代替思维来完成推理过程。他希望能用数学的方法来研究思维。数理逻辑就是在这种思想下产生的。用希尔伯特的话来说，它(数理逻辑)是把数学上的形式化的方法应用到逻辑领域的结果。

计算机科学的诞生使数理逻辑得到更重要的应用。具备一些数理逻辑知识，对每个计算机工作者来说都是非常重要的。

本篇主要学习数理逻辑的基础——命题逻辑和谓词逻辑。

第1章　命题逻辑

本章介绍命题逻辑的基本内容：命题与命题公式、重言式、命题演算的推理规则和证明方法、范式等。

1.1　命题与命题公式

1.1.1　命题

人们的思维活动是靠自然语言来表达的。然而，由于自然语言易产生二义性，用它来表示严格的推理就不合适了。为了解决这个问题，在数理逻辑中引进了一种形式化的语言，这是一种符号语言。

自然语言的基本单位是句子。句子分为陈述句、祈使句、疑问句和感叹句等，其中能判断对错的只有陈述句，我们把具有这种特点的句子叫命题。它是形式语言中的基本单位。

定义 1.1-1　命题是能判断真假的陈述句。

【例 1】　判断下列句子是不是命题：

(1) 人的血液是白色的。

(2) 上海是中国的一座城市。

(3) 今年春节真热闹啊！

(4) 天在下雨。

(5) 你上网了吗？

(6) 火星上有人。

(7) 王琳是学生党员。

(8) $6x+3=5-7x$。

解　第3句和第5句不是陈述句，也就不是命题，第8句也不是命题(其真值随 x 的值而变)，其余5句都是命题。其中，第1句是假命题；第2句是真命题；第4句和第7句依当时的天气情况和王琳的情况可以判断真假，也是命题；第6句虽然目前暂时无法判断其真假，但它本身是有真假的，我们也称为命题。这里应明确的是，能判断真假与是否知道该陈述句的真假没有关系。

请读者注意，命题是能判断真假的陈述句，而有一类称为悖论的陈述句，它不能判断真假，也不是命题。悖论的典型例子是句子“我正在说假话”。

命题常用大写字母 A、B、C、…或加下标的大写字母 A_1、B_2、C_{10}、…表示。

任一命题或真或假，且非真即假，我们用真值来表示。当命题是真的时，称其真值为True(真)，用“T”或“1”表示；当命题是假的时，称其真值为False(假)，用“F”或“0”表示。

定义 1.1-2　不能再分解为其他命题的命题叫原子命题。

原子命题中的“原子”取原子的“不可再分”之意，它是最基本的命题，相当于自然语言

的简单陈述句。例1中除第7句外的4个命题都是原子命题，而第7句是由原子命题“王琳是学生”和“王琳是党员”组成的。

【例2】 下面的命题由哪些原子命题组成：

(1) 只要明天天气好，我就去春游。

(2) 如果10是一个大于1的整数，则10的大于1的最小因数一定是素数。

解 (1) 有两个原子命题 C 和 D，其中

C：明天天气好。

D：我去春游。

(2) 有两个原子命题 M 和 N，其中

M：10是一个大于1的整数。

N：10的大于1的最小因数是素数。

我们把例2中的两个命题都称为复合命题。复合命题是通过若干原子命题和下面所介绍的命题联结词构成的更复杂的命题。

1.1.2 命题联结词

这里引入五种常用的命题联结词，它们是自然语言中某些联结词的抽象。

定义1.1-3 若 P 是一个命题，则由否定词 $\neg$ 和命题 P 组成的复合命题 $\neg P$ 称为 P 的否定式，读作“非 P”。$\neg P$ 的真值定义为

$\neg P$ 为真 iff[①] P 为假

命题 $\neg P$ 和 P 的关系可以用表1-1表示。表1-1称为 $\neg P$ 的真值表。

表1-1 $\neg P$ 的真值表

P	$\neg P$
0	1
1	0

【例3】 设有命题 P 为

P：南京在江苏省。

则 P 的否定式为

$\neg P$：南京不在江苏省。

或 $\neg P$：南京在江苏省是假的。

定义1.1-4 若 P、Q 是两个命题，则由合取词 $\wedge$ 和命题 P、Q 组成的复合命题 $P\wedge Q$ 称为 P、Q 的合取式，读作“P 且 Q”。

$P\wedge Q$ 的真值定义为

$P\wedge Q$ 为真 iff P、Q 都为真

因此 P、Q 同时为假或一真一假时，$P\wedge Q$ 都为假。

复合命题 $P\wedge Q$ 的真值表如表1-2所示。

合取词 $\wedge$ 是自然语言中的连接词“并且”、“和”、“及”等的逻辑抽象。

---

① 符号iff表示“当且仅当”。

表 1-2　$P \wedge Q$ 的真值表

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

【例 4】 设有命题 P、Q 为

P：李红喜欢看小说。

Q：李红喜欢画画。

则 P、Q 的合取式 $P \wedge Q$ 为

$P \wedge Q$：李红喜欢看小说和画画。

或　　$P \wedge Q$：李红喜欢看小说又喜欢画画。

定义 1.1-5 若 P、Q 是两个命题，则由析取词 $\vee$ 和命题 P、Q 组成的复合命题 $P \vee Q$ 称为 P、Q 的析取式，读作“P 或 Q”。$P \vee Q$ 的真值定义为

$P \vee Q$ 为真 iff P、Q 至少有一个为真

因此只有 P、Q 同时为假时，$P \vee Q$ 才为假。

复合命题 $P \vee Q$ 的真值表如表 1-3 所示。

析取词 $\vee$ 是自然语言中的连接词“或者”等的逻辑抽象。

表 1-3　$P \vee Q$ 的真值表

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

【例 5】 以例 4 的两个命题 P、Q 为例，析取式 $P \vee Q$ 为

$P \vee Q$：李红喜欢看小说或喜欢画画。

【例 6】 设有命题 A、B 为

A：老王在教室里上课。

B：老王参加长跑比赛。

那么，命题“老王在教室里上课或者参加长跑比赛”能否表示为析取式 $A \vee B$ 呢？

解 要回答这个问题，必须分析该命题的真值情况。我们可以看出，命题 A 和 B 是不可能同时成立的，所以该命题仅仅在 A、B 只有一个为真时才为真，而同真或同假时都为假。因此该命题不能用析取式 $A \vee B$ 表示，有关论述见 1.5 节。

我们称例 6 命题中的“或”为“不可兼或”，而析取词 $\vee$ 所表示的“或”是“可兼或”，凡“不可兼或”都不能仅用析取词 $\vee$ 表示。

定义 1.1-6 若 P、Q 是两个命题，则由蕴含词 $\rightarrow$ 和命题 P、Q 组成的复合命题 $P \rightarrow Q$ 称为 P、Q 的蕴含式，读作“如果 P，则 Q”。$P \rightarrow Q$ 的真值定义为

$P \rightarrow Q$ 为假 iff P 为真而 Q 为假

因此，P 为假时，不管 Q 为真还是为假，$P \rightarrow Q$ 都为真；而 P、Q 同时为真时，$P \rightarrow Q$ 也为真。

复合命题 $P \rightarrow Q$ 的真值表如表 1-4 所示。

表 1-4　$P \rightarrow Q$ 的真值表

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

蕴含词→是自然语言中的连接词“如果……，则……”、“若……，则……”、“如果……，那么……”等的逻辑抽象。但是，从真值表可以看出：蕴含词→与自然语言中的连接词“如果……，则……”是有区别的。自然语言中的“如果……，则……”是联系两个有逻辑关系的语句。但是，在数理逻辑中对一个命题我们只讨论其真值。因此，对蕴含式 $P \rightarrow Q$，不管 P 和 Q 这两个命题有无逻辑上的联系，$P \rightarrow Q$ 的真值仅由 P、Q 的真值惟一确定。我们将数理逻辑中的蕴含称为实质蕴含，而将自然语言中的蕴含称为形式蕴含。

在蕴含式 $P \rightarrow Q$ 中，P 称为蕴含式的前件，Q 称为蕴含式的后件。

【例 7】 设有命题 A、B 为

A：$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是对顶角。

B：$\angle 1 = \angle 2$。

则蕴含式 $A \rightarrow B$ 为

$A \rightarrow B$：若 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是对顶角，则 $\angle 1 = \angle 2$。

这时我们也说“A 是 B 的充分条件”，或“B 是 A 的必要条件”。

定义 1.1-7　若 P、Q 是两个命题，则由等值词↔和命题 P、Q 组成的复合命题 $P \leftrightarrow Q$ 称为 P、Q 的等值式，读作“P 当且仅当 Q”。$P \leftrightarrow Q$ 的真值定义为

$$P \leftrightarrow Q \text{ 为真 iff } P\text{、}Q \text{ 同真值}$$

因此，P、Q 一真一假时，$P \leftrightarrow Q$ 为假。

复合命题 $P \leftrightarrow Q$ 的真值表如表 1-5 所示。

等值词↔是自然语言中的连接词“当且仅当”等的逻辑抽象。

表 1-5　$P \leftrightarrow Q$ 的真值表

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

【例 8】 设有命题 P、Q 为

P：实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实根。

Q：实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $b^2-4ac>0$。

则等值式 $P \leftrightarrow Q$ 为

$P \leftrightarrow Q$：实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实根当且仅当其判别式 $b^2-4ac>0$。

这时我们也说“P 是 Q 的充分必要条件”。

应该强调的是，在数理逻辑中，由原子命题通过命题联结词可以构成复合命题，其真值完全由原子命题的真值来确定，而与原子命题的含义以及原子命题之间有无某种逻辑联系无关。

【例 9】 设有命题 P、Q、R 为

P：雪是黑的。

Q：小李是共青团员。

R：小王是大学生。

请写出命题 $\neg P$、$P\wedge Q$、$P\vee Q$ 和 $(P\wedge Q)\rightarrow R$ 的含义。

解 $\neg P$：雪不是黑的。

$P\wedge Q$：雪是黑的且小李是共青团员。

$P\vee Q$：雪是黑的或者小李是共青团员。

$(P\wedge Q)\rightarrow R$：如果雪是黑的且小李是共青团员，那么小王是大学生。

1.1.3 命题公式

上节我们介绍了 5 个命题联结词，反复利用这些命题联结词可以产生更复杂的命题。

如符号串

$$\neg P\rightarrow(Q\wedge\neg R)\text{ 、}(\neg A\vee\neg B)\wedge(C\rightarrow\neg D)$$

当这些符号串中的大写字母都表示确定的命题时，该符号串就表示更复杂的命题；若这些大写字母不表示确定的命题时，该符号串就是我们下面所称的命题公式。但并不是随意产生的符号串都能称为命题公式，而是必须遵循一定的规则。

一个有确定真值的命题，其真值不是 0 就是 1。我们常将真值 0 和 1 称为命题常元；而一个不表示确定真值的命题符号称为命题变元，仍用大写字母或加下标的大写字母表示。一个命题变元若被某个确定的命题替代，就具有确定的真值。

定义 1.1-8 一个命题公式是由下列规则所产生的符号串：

(1) 命题常元是命题公式。

(2) 命题变元是命题公式。

(3) 若 P、Q 是命题公式，则 $\neg P$、$(P\wedge Q)$、$(P\vee Q)$、$(P\rightarrow Q)$、$(P\leftrightarrow Q)$ 也是命题公式。

(4) 只有有限次地运用(1)、(2)、(3)所产生的符号串才是命题公式。

命题公式也简称为公式。

由定义可知，下面的符号串

$$P\rightarrow Q\rightarrow R\text{、}\wedge P\text{、}(P\leftrightarrow Q\vee)$$

都不是公式。而符号串

$$((P\rightarrow Q)\rightarrow R)\text{、}((\neg P\leftrightarrow Q)\vee(R\wedge S))$$

都是公式。

为了简便起见，我们常常省去公式最外层的圆括号。所以，上面两个公式又可以分别写成

$$(P\rightarrow Q)\rightarrow R\text{、}(\neg P\leftrightarrow Q)\vee(R\wedge S)$$