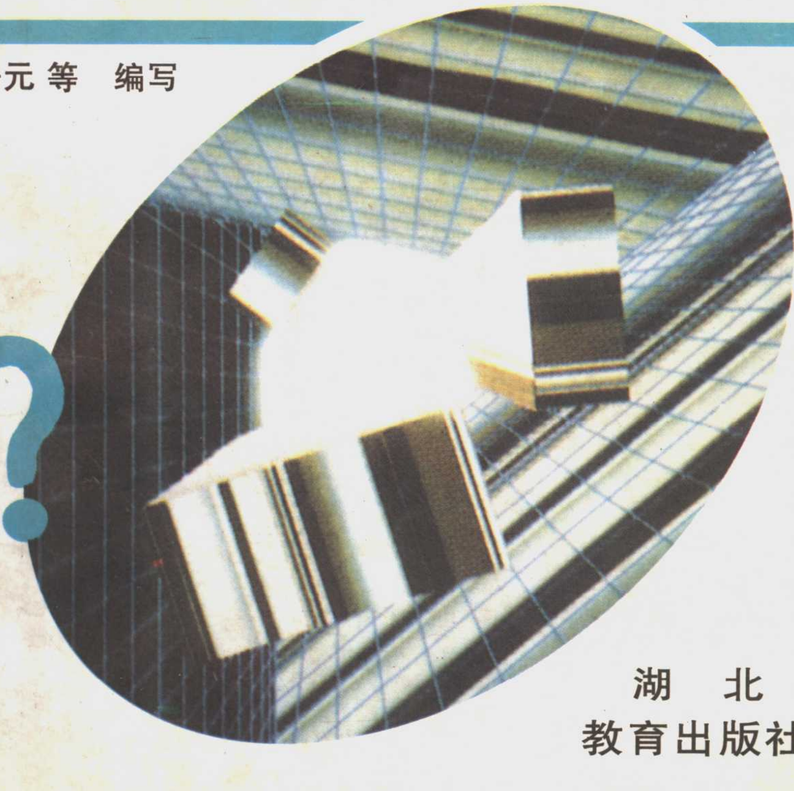
WEISHEN
MECUO

为什么错

高二数学习题错解评析

方培元 等 编写



湖 北
教育出版社

为什么错

——高二数学习题错解评析

方培元　邱应麟　程细茂
汪胜礼　　　　　　王志成　编

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

为什么错:高二数学习题错解评析/方培元等编.—武汉:湖北教育出版社,1998

(为什么错丛书)

ISBN 7-5351-2278-7

Ⅰ.为… Ⅱ.方… Ⅲ.数学课-解题-高中

Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 06201 号

出版发行:湖北教育出版社　　汉口解放大道新育村 33 号

邮编:430022　电话:5830435

经　销:新 华 书 店

印　刷:通山县印刷厂　　(437600·通山县通羊镇南市路 165 号)

开　本:787mm×1092mm　1/32　　8.75 印张

版　次:1998 年 6 月第 1 版　　1998 年 6 月第 1 次印刷

字　数:199 千字　　印数:1—5 000

ISBN 7—5351—2278—7/G·1858　　定价:7.80 元

前　　言

在中学数理化各科教学实践中，解答习题，错误常难避免，发生错误和改正错误贯穿于整个教学过程。为什么错？错在哪里？如何解决这一问题？这就需要我们找出产生错误的原因，研究纠正和避免错误的方法，从而吸取有益的教训，加深基础知识的理解，提高分析问题和解决问题的能力。基于以上目的，我们编写了这套《为什么错丛书》。

本册《高二数学习题错解评析》按照现行高中课本和新的教学大纲编写，内容包括高中代数（下册）和平面解析几何两部分，可供高二、高三年级学生使用。本书每章包括“基本内容”、“易出现的错误”、“例题与评析”和“练习题”四部分。每章开篇简要地介绍全章的主要内容及重点难点，指出该章中一些常见的错误及值得注意的问题，然后给出与教材内容同步的例题。本书的主要特点是，对每道例题以错误解答、评析、正确解答三个层次进行编写。其中错解多收集于日常教学中学生的作业或数学试卷，颇具典型性和代表性；对错解的评析，既指出错误，又指出产生错误的原因，极具对症性；其正确解答，对照错解，正误鲜明，具有批判性。在每章之后，还配备有一定数量的练习题，书末附有全部练习题的答案或提示。因此本书是一本很好的课外辅导读物。

由于时间和水平所限，书中错误难免，敬请读者指正。

编　者

1998 年 3 月

目　录

代　数

几　何

代　数

第五章　不　等　式

一、基 本 内 容

本章主要介绍实数大小的比较法则；不等式的性质；证明不等式的几种基本方法：比较法、综合法、分析法、数学归纳法、判别式法、代换法、公式法、放缩法、反证法等；两个或三个正数的平均不等式及这两个平均不等式取等号的条件；代数不等式及一些简单超越不等式的解法；含有绝对值的不等式的基础知识及和差绝对值与绝对值和差的性质；不等式的应用.

两个实数大小的比较法则是本章整个内容的出发点，必须予以高度重视，做到熟练掌握. 不等式的基本性质是学习不等式的证明与解不等式的基础，一定要牢记. 不等式的证明和解不等式是本章的重点又是本章的难点之一，如何根据所要求证的不等式，采用恰当的证明方法是学习不等式证明的关键. 根据有关性质或定理，进行同解变形，这是解不等式时更应值得注意的地方. 解含参数的不等式时必须注意参数的取值范围，并在此范围内对参数进行分类讨论. 不等式有着广泛的应用，最值问题往往归结为不等问题，不等式的性质以及解不等式的方法都可用于解决最值问题，要掌握两个极值定理的条件，并能灵活运用这两个极值定理解决实际问题.

二、易出现的错误

1. 忽视解不等式中的增根、失根问题.

2. 忽视函数的增减性.

3. 乱用不等式的有关性质. 如不等式的传递性：若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$，这是放缩法的依据. 在运用传递性时，要注意不等号的方向，否则易产生错误. 如欲证 $a>c$，选择 b，在证出 $a>b$，$c>b$ 后，误认为就能得到 $a>c$. 又如同向不等式可以相加，但不能相减；同向正项不等式可以相乘，但不能相除. 不等式两边同乘以一个正数不等号不改变方向，但不能误认为不等式两边也能同时乘偶次方，等等.

4. 忽视用平均值不等式求最值的条件，利用不等式

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots\cdots x_n}$$

求最值时，需要同时满足下列三个条件：

①x_i 为正数（$i=1$，2，$\cdots$，n）；

②必须存在 $x_1=x_2=\cdots=x_n$；

③这 n 个正数的和或积为定值.

即：一要正、二可能、三定值，否则将会出现错误. 在求函数的值域或求函数的最值时，有时会连续几次使用基本不等式，易忽视几个不等式取等号的条件的一致性.

5. 忽视了对参数的讨论或对参数讨论时出现了重复或遗漏.

三、例题与评析

【例 1】 解不等式 $x^2+2x-\frac{x}{x-1}>-\frac{1}{x-1}-1$.

错误解答 移项合并得

$$x^2+2x+1-\frac{x-1}{x-1}>0$$

约简合并得

$$x^2+2x>0$$

所以原不等式的解集为$\{x|x>0 或 x<-2\}$.

评析 错在约简分式后使原不等式的未知数允许值范围扩大了，原不等式中分母 $x-1\neq0$ 不能忽略.

正确解答 1 移项合并得

$$x^2+2x+1-\frac{x-1}{x-1}>0$$

约简合并得

$$\begin{cases}x^2+2x>0\\x-1\neq0\end{cases}$$

所以原不等式的解集为

$$\{x|x<-2 或 x>0，且 x\neq1\}$$

正确解答 2 (1)若 $x>1$，原不等式可化为

$$x(x-1)(x+2)>0$$

解得 $x>1$

(2)若 $x<1$，原不等式可化为

$$x(x-1)(x+2)<0$$

解得 $x<-2$ 或 $0<x<1$

综上，原不等式的解集为

$$\{x|x<-2 \quad 或 \quad 0<x<1 或 x>1\}$$

【例 2】 解不等式$\frac{x^2-x+2}{x^2+x+2}\geqslant\frac{x+1}{3x+1}$.

错误解答 由合分比定理得

$$\frac{2x^2+4}{-2x}\geqslant\frac{4x+2}{-2x}$$

移项合并得

$$\frac{(x-1)^2}{x}\leqslant 0$$

所以 $x<0$ 或 $x=1$.

评析 在用合分比定理后原不等式中的未知数 x 的允许值由原来的可以为零变为不能为零，由原来的不能为$-\frac{1}{3}$变为可以等于$-\frac{1}{3}$，因此变形后原不等式的未知数的允许值范围发生了变化.

正确解答 由合分比定理得

$$\frac{2x^2+4}{-2x}\geqslant\frac{4x+2}{-2x}$$

移项合并得

$$\frac{(x-1)^2}{x}\leqslant 0$$

所以 $\quad x<0$ 或 $x=1$

又 $x=0$ 仍适合原不等式，应是原不等式的解，且原不等式中 $x\neq-\frac{1}{3}$，故原不等式的解集为

$$\{x|x\leqslant 0\text{ 或 }x=1,\text{且 }x\neq-\frac{1}{3}\}$$

由以上两例可见，解不等式时不能忽视不等式中未知数的允许值范围，防止产生增失解.

【例 3】 解不等式$\frac{(x-3)(10-x)}{(x-1)x^2}\geqslant 0$.

错误解答 1 找零点

$x=0, x=1, x=3, x=10$

用列表法或穿线法解得解集为

$\{x \mid x<0$ 或 $1<x\leqslant 3$ 或 $x\geqslant 10\}$

错误解答 2 首先由原不等式得

$$\frac{(x-10)(x-3)}{(x-1)x^2}\leqslant 0$$

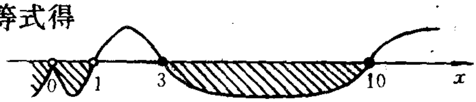
找零点 $x=0, x=1, x=3, x=10$，用穿线法解得解集为

$\{x \mid 0<x<1$ 或 $3\leqslant x\leqslant 10\}$

评析 令分母 $x^2(x-1)=0$，得 $x=1, x=0$，而 $x=0$ 是二重根，错误解答 2 忽略了这一点. 错误解答 1 除了忽略这一点外，还忽略了首先应使原不等式变形，使 x 的系数为正.

正确解答 由原不等式得

$$\frac{(x-10)(x-3)}{(x-1)x^2}\leqslant 0$$



找零点 $x=0, x=1, x=3$，$x=10$，用穿线法解得解集为

$\{x \mid x<0$ 或 $0<x<1$ 或 $3\leqslant x\leqslant 10\}$

【例 4】 解不等式 $\sqrt{x^2-3x+2}>x-3$.

错误解答 1 由原不等式两边平方得

$$x^2-3x+2>(x-3)^2$$

解得 $x>\frac{7}{3}$.

错误解答 2 原不等式等价于

$$\begin{cases} x^2-3x+2\geqslant 0 \\ x^2-3x+2>(x-3)^2 \end{cases}$$

解得 $x>\frac{7}{3}$.

评析 错在不讨论不等号两边的符号就将不等式两边平方去根号，乱用了不等式的性质. 错误解答 1 还忽略了偶次根号下

应为非负数这一前提.

正确解答 原不等式等价于

$$\begin{cases} x^2-3x+2\geqslant 0 \\ x-3<0 \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} x^2-3x+2\geqslant 0 & ① \\ x-3\geqslant 0 \\ x^2-3x+2>(x-3)^2 & ② \end{cases}$$

解①得 $2\leqslant x<3$ 或 $x\leqslant 1$

解②得 $x\geqslant 3$

所以原不等式的解集为$\{x\mid x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant 1\}$.

【例 5】 已知 $0<x<\pi,\alpha\neq\frac{\pi}{2}$,且 $|x-1|\lg\sin\alpha>\lg(1-\cos^2\alpha)$,求 x 的取值范围.

错误解答 原不等式即

$$|x-1|\lg\sin\alpha>\lg\sin^2\alpha=2\lg\sin\alpha$$

两边同除以 $\lg\sin\alpha$,得$|x-1|>2$,所以

$$x>3 \text{ 或 } x<-1$$

评析 忽视了 $\lg\sin\alpha<0$ 的情况,事实上 $\lg\sin\alpha\not>0$.

正确解答 原不等式即

$$|x-1|\lg\sin\alpha>\lg\sin^2\alpha=2\lg\sin\alpha$$

等价于
$$\begin{cases} \lg\sin\alpha>0 \\ |x-1|>2 \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} \lg\sin\alpha<0 \\ |x-1|<2 \end{cases}$$

因为 $\alpha\in(0,\pi)$,且 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$,所以

$$\lg\sin\alpha<0$$

所以$|x-1|<2$,解得

$$-1<x<3$$

【例 6】 解不等式 $x^{\log_a x}>\frac{x^{\frac{9}{2}}}{a^2}$.

错误解答 两边取以 a 为底的对数,得

$$(\log_a x)^2>\frac{9}{2}\log_a x-2$$

即 $$(\log_a x)^2-\frac{9}{2}\log_a x+2>0$$

解得 $$\log_a x>4 \text{ 或 } \log_a x<\frac{1}{2}$$

所以 $$x>a^4 \text{ 或 } 0<x<\sqrt{a}$$

评析 此解法忽视了对参数 a 的讨论,因为当 $a>1$ 时,对数函数 $y=\log_a x$ 是增函数;当 $0<a<1$ 时,对数函数 $y=\log_a x$ 是减函数.本题由于 a 的大小未定.故在两边取对数时,不等号的方向无法确定.

正确解答 (1)当 $a>1$ 时,两边取以 a 为底的对数得

$$(\log_a x)^2-\frac{9}{2}\log_a x+2>0$$

解得 $$x>a^4 \text{ 或 } 0<x<\sqrt{a}$$

(2)当 $0<a<1$ 时,两边取以 a 为底的对数得

$$(\log_a x)^2-\frac{9}{2}\log_a x+2<0$$

解得 $$a^4<x<\sqrt{a}$$

综上:当 $a>1$ 时,不等式的解集为

$$\{x|x>a^4 \text{ 或 } 0<x<\sqrt{a}\}$$

当 $0<a<1$ 时,不等式的解集为

$$\{x|a^4<x<\sqrt{a}\}$$

【例 7】 解不等式 $x^2-(a+a^2)x+a^3<0$.

错误解答 原不等式可化为 $(x-a)(x-a^2)<0$,解得

$$a<x<a^2$$

评析　错在没有对参数 a 进行分析、讨论. 因为 a^2 与 a 哪个大没有确定，上述解法只是在 $a^2 \geqslant a$ 时正确，而当 $a^2 < a$ 时就不正确了.

正确解答　原不等式可化为 $(x-a)(x-a^2)<0$.

(1)当 $a>1$ 或 $a<0$ 时，有 $a^2>a$　原不等式的解集为

$$\{x|a<x<a^2\}$$

(2)当 $a=1$ 时，原不等式即为 $(x-1)^2<0$，解集为 $\varnothing$

(3)当 $a=0$ 时，原不等式即为 $x^2<0$，解集为 $\varnothing$

(4)当 $0<a<1$ 时，有 $a^2<a$，原不等式的解集为

$$\{x|a^2<x<a\}$$

【例 8】　设集合

$$A=\{x|\frac{x-2}{x-1}\leqslant 0\},B=\{x|\lg 2ax<\lg(a+x),a\in R^+\}$$

试求使 $A\cap B=A$ 的实数 a 的取值范围.

错误解答　由 $\frac{x-2}{x-1}\leqslant 0$，得 $1<x\leqslant 2$，故

$$A=\{x|1<x\leqslant 2\}$$

由 $a\in R^+$ 及 $\lg 2ax<\lg(a+x)$，得

$$\begin{cases}a>0\\2ax>0\\a+x>0\\2ax<a+x\end{cases}\quad 即 \begin{cases}a>0\\x>0\\(2a-1)x<a\end{cases}$$

所以　$$0<x<\frac{a}{2a-1}$$

故　$$B=\{x|0<x<\frac{a}{2a-1}\}$$

欲使 $A\cap B=A$，则 $\frac{a}{2a-1}>2$，所以 $0<a<\frac{2}{3}$.

评析　(1)由 $(2a-1)x<a \Rightarrow x<\frac{a}{2a-1}$ 是错误的，因为 $2a$

-1 不一定为正，也可能为负或零.

(2)由$\frac{a}{2a-1}>2 \Rightarrow 0<a<\frac{2}{3}$也是错误的，这里仍然存在 $2a-1$ 有可能为负的问题.

正确解答 由$\frac{x-2}{x-1}\leqslant 0$ 得，$1<x\leqslant 2$，故

$$A=\{x \mid 1<x\leqslant 2\}$$

由 $a\in R^{+}$ 及 $\lg 2ax<\lg(a+x)$，得

$$\begin{cases} a>0 \\ 2ax>0 \\ a+x>0 \\ 2ax<a+x \end{cases} \text{即} \begin{cases} a>0 \\ x>0 \\ (2a-1)x<a \end{cases}$$

$$\text{所以} \quad \begin{cases} a>\frac{1}{2} \\ x>0 \\ x<\frac{a}{2a-1} \end{cases} \text{或} \begin{cases} 0<a<\frac{1}{2} \\ x>0 \\ x>\frac{a}{2a-1} \end{cases} \text{或} \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ x>0 \end{cases}$$

$$\text{即} \quad \begin{cases} a>\frac{1}{2} \\ 0<x<\frac{a}{2a-1} \end{cases} \text{或} \begin{cases} 0<a\leqslant\frac{1}{2} \\ x>0 \end{cases}$$

故当 $a>\frac{1}{2}$时，$B=\{x \mid 0<x<\frac{a}{2a-1}\}$；.

当 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$时，$B=\{x \mid x>0\}$.

所以当 $a>\frac{1}{2}$时，欲使 $A\cap B=A$，则$\frac{a}{2a-1}>2$，所以

$$\frac{1}{2}<a<\frac{2}{3}$$

当 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$时则显然有 $A\cap B=A$.

综上，欲使 $A\cap B=A$，则 $0<a<\frac{2}{3}$.

解不等式就是根据不等式的等价变形和函数的单调性，求出不等式中未知数的允许值范围，因此应特别注意以下几点：

(1)变形过程要正确运用不等式的性质和同解定理，保持不等式的同解性，特别要注意与解方程不同的一些性质和定理.

(2)对于分式、根式、指数、对数、三角函数、反三角函数的不等式，求解时首先要考虑使不等式两边有意义的未知数的允许值范围.

(3)超越不等式变形为代数不等式时，要注意函数的增减性.

(4)解含有参数的不等式，必须注意参数的取值范围，并在此范围内对参数进行分类讨论. 分类的标准要通过理解题意(例如，能根据题意挖掘出题目的隐含条件)，根据方法(例如，利用单调性解题时，抓住使单调性发生变化的参数值)，按照解答的需要(例如，进行不等式变形时必须具备的变形条件)等方面来决定，一般都应做到不重复、不遗漏.

(5)要善于运用数形结合的方法灵活处理.

【例 9】 已知函数 $f(x)=ax^2-c$，且 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$，$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$，求 $f(3)$ 的取值范围.

错误解答 因为 $f(1)=a-c$，$f(2)=4a-c$，故有

$$-4\leqslant a-c\leqslant -1$$

$$-1\leqslant 4a-c\leqslant 5$$

所以 $0\leqslant a\leqslant 3$，$1\leqslant c\leqslant 7$

$$0\leqslant 9a\leqslant 27,\ -7\leqslant -c\leqslant -1$$

所以 $-7\leqslant 9a-c\leqslant 26$

即 $-7\leqslant f(3)\leqslant 26$

评析　错解扩大了取值的范围，因为当 $9a$ 取到最大值 27 时，$-c$ 未必能取到最大值 -1，由

$$\begin{cases} a\geqslant b \\ c\geqslant d \end{cases} \Rightarrow a+c\geqslant b+d$$ 并不可逆，所以

$$\begin{cases} -4\leqslant a-c\leqslant -1 \\ -1\leqslant 4a-c\leqslant 5 \end{cases} \text{ 与 } \begin{cases} 0\leqslant a\leqslant 3 \\ 1\leqslant c\leqslant 7 \end{cases}$$

并不同解.

为了求得 $f(3)$ 的确切的取值范围，就要设法把 $f(3)$ 表示成 $f(1)$ 和 $f(2)$ 的线性组合.

正确解答　由 $f(1)=a-c, f(2)=4a-c$，解得

$$a=\frac{1}{3}[f(2)-f(1)]$$

$$c=\frac{1}{3}[f(2)-4f(1)]$$

于是
$$\begin{aligned} f(3)&=9a-c \\ &=3[f(2)-f(1)]-\frac{1}{3}[f(2)-4f(1)] \\ &=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1) \end{aligned}$$

因为
$$-4\leqslant f(1)\leqslant -1$$
$$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$$
$$1\leqslant -f(1)\leqslant 4$$

所以
$$\begin{aligned} (-1)\cdot\frac{8}{3}+1\cdot\frac{5}{3}&\leqslant\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1) \\ &\leqslant\frac{8}{3}\times 5+4\times\frac{5}{3} \end{aligned}$$

即
$$-1\leqslant f(3)\leqslant 20$$

【例 10】　设 $a,b,c\in R^{+}$，求证 $\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{a+b+c}\geqslant abc$.

错误解答　因为 $a,b,c\in R^{+}$，所以

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant 3abc\sqrt[3]{abc}>0$$

又　　$a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}>0$

相除得　$\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a+b+c}\geqslant\dfrac{3abc\sqrt[3]{abc}}{3\sqrt[3]{abc}}=abc$

评析　此证法犯了“同向正项不等式相除”的错误.

正确解答 1　因为 $a,b,c\in R^+$,所以

$$a^2b^2+b^2c^2\geqslant 2ab\cdot bc=2ab^2c$$

$$b^2c^2+c^2a^2\geqslant 2bc\cdot ca=2abc^2$$

$$c^2a^2+a^2b^2\geqslant 2ca\cdot ab=2a^2bc$$

相加得

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geqslant 2abc(a+b+c)$$

又　　$a+b+c>0$

所以　$\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a+b+c}\geqslant abc$

正确解答 2　作差证:

$$\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a+b+c}-abc$$

$$=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-a^2bc-ab^2c-abc^2}{a+b+c}$$

$$=\frac{(ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ca-ab)^2}{2(a+b+c)}\geqslant 0$$

所以　$\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a+b+c}\geqslant abc$

【例 11】　设 $a,b,c,d\in R^+$,求证:

$$1<\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+d+b}+\frac{d}{d+a+c}<2$$

错误解答　因为

$$\frac{a}{a+b+c+d}<\frac{a}{a+b+d}<1$$

$$\frac{b}{a+b+c+d}<\frac{b}{b+c+a}<1$$