21世纪普通高等学校管理科学与工程教材

运筹学

（下册）

Operational Research

徐 渝 何正文 编著

清华大学出版社

21 世纪普通高等学校管理科学与工程教材

运　筹　学

（下册）

徐　渝　何正文　编著

清华大学出版社

北　京

内容简介

本教材力图反映面向21世纪教学内容和课程体系改革研究项目的成果；融教师多年的教学经验与教改成果于一体，注意选材的精炼性、框架结构的整体性和文字表达的可接受性，使读者能在较短的时间内领略到运筹学的特点、优化模型和方法的核心、优化思想的精髓和创新应用的潜力；实现教学内容基础性、实践性和先进性的结合，体系化和精益化的统一；力求做到整体框架合理，原理、模型、方法、应用有机结合，思路清晰且具启发性，便于学生举一反三；突出管理实践平台，注重对学生研究能力和实践能力的培养，同时配备相当数量的基本练习题、思考讨论题、应用案例和小实践素材、探讨与研究示例和选题建议，为读者在课程学习的基础上进一步深入钻研和实践提供条件。

本教材分上、下两册，上册内容适用于经济、管理类各专业的本科生及相应层次各类学员；下册内容适用于经济、管理类硕士研究生及相应层次各类学员。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学(下册)/徐渝，何正文编著．—北京：清华大学出版社，2005.2

(21世纪普通高等学校管理科学与工程教材)

ISBN 7-302-10455-7

Ⅰ.运… Ⅱ.①徐…②何… Ⅲ.运筹学—高等学校—教材 Ⅳ.O22

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第010611号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦

http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084

社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969

组稿编辑：樊　勇

文稿编辑：鲁秀敏

封面设计：姜凌娜

版式设计：郑铁文

印 刷 者：北京密云胶印厂

装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂

发 行 者：新华书店总店北京发行所

开　本：185×230　**印张**：14.25　**字数**：260千字

版　次：2005年2月第1版　2005年2月第1次印刷

书　号：ISBN 7-302-10455-7/F・1083

印　数：1～5000

定　价：22.00元

序

管理科学与工程是我国管理学科中的重要一级学科，在国民经济建设中发挥着重要的作用。编写该学科的教材是十分必要的。本系列教材是为该专业的本科生及硕士生编写的，也可以用于其他管理经济类学生作为参考。该系列教材多以定量分析为主来研究管理问题，将工程思想和管理思想相结合，应用系统的、科学的、数学的方法，通过建模、分析和求解数学模型等方法来研究管理问题。力图培养和提高本科生和硕士生科学思维、科学方法、实践技能和创新能力综合素质，为学生的进一步深造和科研打下坚实的理论基础，也为学生的创新思维与应用创造良好条件。

在教材的编写中，注意了本科阶段与硕士研究生阶段的衔接，强调基本概念、基本原理、基本方法与技能的训练，对比较成熟的分支要求做到**概念准确、原理清楚、方法熟练，注重创新应用**，并尽量与计算机相结合。注意将知识的传授、能力的培养和素质的提高有机地统一起来，倡导更新思维、激活知识、挖掘潜能的创造性教育方法，强调科学思维、科学方法、实践技能和创新能力的综合培养。

本系列教材包括运筹学、应用统计分析、生产运作管理、管理学。

本系列教材力图反映面向 21 世纪教学内容和课程体系改革研究项目的成果，适应厚基础、宽口径、高素质的培养方向与学习型、创造型和个性化培养方式；融教师多年的教学经验与教改成果为一体，注意选材的精练性、框架结构的整体性和文字表达的可接受性，使读者能在较短的时间内领略学科特点和方法的核心；实现教学内容基础性、实践性和先进性的结合，体系化、精益化的统一，为读者进一步拓宽研究领域练好基本功提供有益的帮助。

汪应洛

2004 年 6 月

前　言

《运筹学》是经济、管理类本科及硕士各专业一门重要的学科基础课，也是理工科学生不可或缺的重要基础。该课程是以定量分析为主来研究管理问题，使学生掌握运筹学整体优化的思想和若干定量分析的优化技术，正确应用各类模型分析、解决不十分复杂的实际问题，以培养和提高科学思维与方法、实践技能与创新能力。通过《运筹学》课程的学习和实践为学生的进一步深造和科研奠定较为扎实的定量分析基础。

在教材的编写中，特别注意到本科阶段与硕士研究生阶段的衔接和研究型教与学的特点。本科生学完本课程后，应达到如下要求：正确理解运筹学方法论，掌握运筹学整体优化思想；掌握线性规划、动态规划、网络模型、排队模型等基本模型的功能和特点，熟悉其建模条件、步骤和相应的技巧，能根据实际背景抽象出适当的运筹学模型；熟练掌握各种模型特别是确定性模型的求解方法，并能对求解结果作简单分析；掌握与基本模型有关的基本概念及基本原理，做到思路清晰、概念明确；具有初步运用《运筹学》思想和方法分析、解决实际问题的能力。硕士生在达到本科生的基本要求基础上，应在内容涉及的深、广度上以及自主研究、创新思维和拓展应用方面有更高的要求。

本教材分上、下两册，上册由徐渝、贾涛编著，内容适用于经济、管理类本科各专业的学生及相应各层次各类学员。建议总学时为64学时，其中授课54学时、上机10学时。下册由徐渝、何正文编著，内容适用于经济、管理类硕士研究生及相应各层次各类学员，建议总学时为54学时，其中授课44～48学时、专题讲座与讨论6～10学时。

本教材的特色是：将面向21世纪教学内容和课程体系改革研究项目的成果融入其中，力求做到整体框架合理，原理、模型、方法、应用有机结合，思路清晰且具启发性，便于学生举一反三；基本概念准确、原理分析透彻、方法步骤清晰、可操作性强；突出管理实践平台，注重对学生研究能力和实践能力的培养，教材将配备相当数量的基本练习题、思考讨论题、应用案例和小实践素材、探讨与研究示例和选题建议，为读者在课程学习的基础上，进一步深入钻研和实践提供条件。

感谢所列参考书目的作者和诸多同行朋友的帮助关心，感谢西安交通大学《运筹学》精品课程项目组成员的大力支持，感谢在多年的教学实践中，同学们的积极配合和提出的大量有益建议，感谢参与教学辅导并为本教材配发习题的博士生宋悦林、李毅学、薛顺利和硕士生管岭飞、胡信步。

作者　瑾识于　西安交通大学管理学院

2004年6月

目　录

第6篇　线性规划的若干深入与发展

第 7 篇　非线性规划及其应用

第 8 篇　对策论与冲突分析

第 9 篇 专题选讲简介

第 6 篇　线性规划的若干深入与发展

内容框架

- 线性规划
  - 通用算法（单纯形法）→ 修正单纯形法 → 大 LP 分解算法
  - 灵敏度分析 → 参数规划
    - 两类单参数 LP 的求解
    - 更复杂情况的讨论
  - 扩展
    - 变量有界 LP → 剖分法求解
    - 整数 LP
      - 一般 LP
        - 分支定界解法
        - 割平面法
      - 0-1 规划

第 13 章　修正单纯形法与大线性规划

本章要点：

- 单纯形法的矩阵描述
- 修正单纯形法的特点
- Dantzig-Wolfe 分解算法

13.1　单纯形法的矩阵描述

13.1.1　单纯形法的数据分析

例 13.1

$$\max Z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_2 - x_4 + x_5$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 7 \\ x_1, x_2, \cdots, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

用表格单纯形法求解例 13.1 的过程如表 13.1 所示。

表 13.1　例 13.1 求解过程

C_B	X_B	c_j	5	2	3	−1	1	θ_j
		b \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
−1	x_4	8	1	2	2	1	0	8/2
1	x_5	7	3	4	1	0	1	7/1
$-Z$		1	3	0	4	0	0	

续表

C_B	X_B	c_j / b \ x_j	5	2	3	−1	1	θ_j
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
3	x_3	4	1/2	1	1	1/2	0	4/(1/2)
1	x_5	3	5/2	3	0	−1/2	1	3/(5/2)
$-Z$		−15	1	−4	0	−2	0	
3	x_3	17/5	0	2/5	1	3/5	−1/5	
5	x_1	6/5	1	6/5	0	−1/5	2/5	
$-Z$		−81/5	0	−26/5	0	−9/5	−2/5	

分析在单纯形法迭代求解过程中必不可少的数据有：

- 非基变量的检验数
- 主元列元素
- 解答列元素

为了减少存储，便于上机，可以设计一个简化的单纯形表格，使上述计算过程得到简化。上机计算时，还有一个必须考虑的问题就是尽量减少舍入误差。这就是研究修正单纯形法的动因。

13.1.2　单纯形法的矩阵描述

矩阵形式是表达最为简洁又便于理论推证的形式，单纯形法的矩阵描述是研究修正单纯形法的基础。用矩阵语言表述整个单纯形法迭代过程实质上可归结为两个最基本的表达式的矩阵描述，即用非基变量表示基变量的表达式和用非基变量表示目标函数的表达式。

先写出线性规划的标准型及约束条件的分块形式。

标准型：$\max Z = CX$

$$\text{s. t.} \begin{cases} AX = b \\ X \geqslant 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{分块形式}} \text{s. t.}\ (B, B_N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} BX_B + B_N X_N = b$$

由此得到用非基变量表示基变量的表达式为

$$X_B = B^{-1}(b - B_N X_N) = B^{-1}b - B^{-1}B_N X_N \tag{13-1}$$

用非基变量表示目标函数的表达式为

$$
\begin{aligned}
Z = CX &= (C_B, C_N)(X_B, X_N)^{\mathrm{T}} = C_B X_B + C_N X_N \\
&= C_B(B^{-1}b - B^{-1}B_N X_N) + C_N X_N \\
&= C_B B^{-1}b - C_B B^{-1}B_N X_N + C_N X_N \\
&= C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}B_N)X_N \qquad \text{令 } \sigma_N = C_N - C_B B^{-1}B_N \\
&= C_B B^{-1}b + \sigma_N X_N \qquad (13\text{-}2)
\end{aligned}
$$

注意到有恒等式$(C_B - C_B B^{-1}B)X_B = 0$，将其代入式(13-2)，还可以推出它的一个等价表达式

$$
\begin{aligned}
Z &= C_B B^{-1}b + \sigma_N X_N = C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}B_N)X_N + (C_B - C_B B^{-1}B)X_B \\
&= C_B B^{-1}b + C_N X_N - C_B B^{-1}B_N X_N + C_B X_B - C_B B^{-1}BX_B \\
&= \pi b + CX - C_B B^{-1}(BX_B + B_N X_N) \\
&= \pi b + CX - \pi AX \\
&= \pi b + (C - \pi A)X \qquad (13\text{-}3)
\end{aligned}
$$

这里，σ_N 是非基变量的检验数构成的向量，$C-\pi A$ 可以看作是全体变量的检验数构成的向量，其中基变量的检验数等于零。

13.2 修正单纯形法原理与实施

13.2.1 修正单纯形法的特点

考查式(13-1)及式(13-3)可以发现，除了 B^{-1}外，其他数据均为原始数据，而采用原始数据计算可以在很大程度上减少计算机计算中的舍入误差，故 B^{-1}的求解成为关键，由此得知修正单纯形法的两个特点：

(1) 对应于任意一个基本可行解的单纯形表格，可以直接从原线性规划标准型运用矩阵—向量的运算产生。

(2) B^{-1}的计算是最关键的也是最具特色的。

考虑 B^{-1}的计算时，其基本出发点是：已知线性规划的一个基及其逆，如何在基变换后用最少的计算量求出新基的逆。

当前基 $B=(P_{j1},\cdots,P_{jl},\cdots,P_{jm})$，$B^{-1}$已知。新基为 $\widetilde{B}=(P_{j1},\cdots,P_{jl-1},P_{jk},P_{jl+1},\cdots,P_{jm})$，由于 $\widetilde{B}$ 是用进基变量 x_k 替换出基变量 x_l 后得到的，因此 B 和 $\widetilde{B}$ 仅仅相差一

个列。

由于

$B^{-1}B = I,\ B^{-1}B = B^{-1}(P_{j1},\cdots,P_{jl},\cdots,P_{jm}) = (B^{-1}P_{j1},\cdots,B^{-1}P_{jl},\cdots,\ B^{-1}P_{jm})$

因此

$$B^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}(B^{-1}P_{j1},\cdots,B^{-1}P_{jl},\cdots,\ B^{-1}P_{jm})$$

而

$$B^{-1}\widetilde{B} = (B^{-1}P_{j1},\cdots,B^{-1}P_{jk},\cdots,\ B^{-1}P_{jm}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & y_{1k} & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y_{2k} & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & y_{lk} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & y_{mk} & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \tag{13-4}$$

其中，$B^{-1}P_{jk} = (y_{1k},\ y_{2k},\cdots,y_{mk})^{\mathrm{T}}$。

式(13-4)中的矩阵很特殊，逆阵的求取极其容易。

例 13.2　写出一个特殊矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix};\qquad \text{则 } \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

可以看出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特点是，除去第 2 列外，其他两列均为三阶单位阵的相应列，其逆阵的第 1 列和第 3 列保持为三阶单位阵的相应列，第 2 列主对角线上的元素为 $\boldsymbol{A}$ 中相应元素的倒数，第 2 列其他元素等于 $\boldsymbol{A}$ 中相应元素乘以主对角线元素的负元素。

令$(B^{-1}\widetilde{B})^{-1} = E_{1k}$，则有 $\widetilde{B}^{-1}(B^{-1})^{-1} = E_{1k}$，两边乘 B^{-1}得

$$\widetilde{B}^{-1} = E_{1k}B^{-1} \tag{13-5}$$

于是就转化为求一个具有特殊结构的矩阵(式(13-4)中的矩阵)之逆 E_{1k}的问题了：

$$E_{1k}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & -\dfrac{y_{1k}}{y_{lk}} & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{y_{2k}}{y_{lk}} & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \dfrac{1}{y_{lk}} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & -\dfrac{y_{mk}}{y_{lk}} & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \tag{13-6}$$

13.2.2 修正单纯形法的步骤与例

根据修正单纯形法的主要特点结合单纯形法迭代过程，归纳出修正单纯形法的基本步骤如下。

(1) 对给出的线性规划标准型，确定初始可行基 B_0，计算 B_0^{-1}，得初始基本可行解

$$X_B^{(0)}=B_0^{-1}b,\quad 或\ X^{(0)}=\begin{pmatrix} B_0^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}_{\}n-m个0}$$

(2) 计算单纯形乘子 $\pi_0=C_BB_0^{-1}$，进而计算出对应当前基本可行解的目标函数值

$$Z_0=C_BB_0^{-1}b=\pi_0 b(=C_BX_B)$$

(3) 最优性检验：计算非基变量的检验数 $\sigma_N=C_N-C_BB_0^{-1}B_N=C_N-\pi_0B_N$。

若 $\sigma_N\leqslant 0$，则已得到最优解。否则，必定存在某个 k，使得 $\sigma_k>0$；对于 $\sigma_k>0$，计算 $B_0^{-1}P_k$，即 $\tilde{P}_k$（主元列），若 $B_0^{-1}P_k\leqslant 0$，该问题无“有限最优解”；否则，转下一步。

(4) 基变换：选 x_k 进基，再根据最小比值原则，若 $\theta_l=\min\left\{\dfrac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}P_k)_l}\,\middle|\,(B^{-1}P_k)_i>0\right\}$，则选 x_l 离基，以 P_k 代替 P_l 得到新基 B_1。

(5) 计算新基的逆，进而求出新的基本可行解。由式(13-5)知 $B_1^{-1}=E_{lk}B_0^{-1}$，其中 E_{lk} 可根据式(13-6)进行计算。

于是，新的基本可行解 $X_B^{(1)}=B_1^{-1}b$。然后返回步骤(2)。

例 13.3 试用修正单纯形法求解下面的线性规划：

$$\max Z=5x_1+2x_2+3x_3-x_4+x_5$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4 & =8 \\ 3x_1+4x_2+x_3 \qquad +x_5 & =7 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0 \end{cases}$$

由于本题已是标准型，直接进入修正单纯形法迭代步骤。

第 1 轮迭代

① 初始可行基 $B_0=(P_4,P_5)=\begin{array}{c}X_4\quad X_5\\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}=I$，基变量为 x_4,x_5；

初始基本可行解是　$X_B^{(0)}=B_0^{-1}b=I^{-1}\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}$。

② $\pi_0=C_{B_0}B_0^{-1}=(\overset{c_4}{-1},\overset{c_5}{1})\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=(-1,1)$，所以，$Z_0=\pi_0 b=(-1,\ 1)\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}=-8+7=-1$。

③ $\sigma_N=C_N-C_BB^{-1}B_N=C_N-\pi_0B_N=(C_1,C_2,C_3)-(-1,1)\begin{array}{c}P_1\quad P_2\quad P_3\\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix}\end{array}=(5,2,3)-(2,2,-1)=(\overset{\sigma_1}{3}\quad\overset{\sigma_2}{0}\quad\overset{\sigma_3}{4})$，选最大正检验数所对应的变量 x_3 进基。

又主元列 $B_0^{-1}P_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}>0$，故不属于无“有限最优解”的情况，可以进行基变换。

④ 基变换：上一步已确定了进基变量为 x_3，只需再根据最小比值原则确定出基变量即可。由 $\min\left\{\frac{(B_0^{-1}b)_i}{(B_0^{-1}P_3)_i}\middle|(B_0^{-1}P_3)_i>0\right\}\min\left\{\frac{8}{2},\frac{7}{1}\right\}=4$，所以应选最小比值对应的变量 x_4 出基，用 P_3 代替 P_4 得到新基 B_1。

⑤ 新基的逆 B_1^{-1}：由式(13-5)有

$$B_1^{-1}=E_{lk}B_0^{-1}=\underset{\substack{\downarrow\\ B_0^{-1}P_3}}{\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}}B_0^{-1}=\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}}_{E_{43}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$$

于是可得新的基本可行解：$X_{B_1}^{(1)}=B_1^{-1}b=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\begin{matrix}x_3\\x_5\end{matrix}$

第 2 轮迭代(从步骤②开始)

② $\pi_1=C_{B_1}B_1^{-1}=(\underset{c_3}{3},\underset{c_5}{1})\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}=(1,1)$，$Z_1=C_{B_1}B_1^{-1}b=\pi_1 b=(1,1)\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}=15$。

③ $\sigma_N = C_N - C_{B_1} B_1^{-1} B_N = C_N - \pi_1 B_N \doteq (c_1, c_2, c_4) - (1,1) \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

$$= (5,2,-1) - (1,1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = (5,2,-1) - (4,6,1) = (\underset{\sigma_1}{1}, \underset{\sigma_2}{-4}, \underset{\sigma_2}{-2})$$

因主元列 $B_1^{-1} P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} > 0$，故不是最优解无界的情况。

④ 基变换：选最大正检验数 σ_1 所对应的变量 x_1 作为进基变量，用最小比值原则确定出基变量为 x_5，计算过程是 $\min\limits_i \left(\frac{(B_1^{-1} b)_i}{(B_1^{-1} P_1)_I} \right) = \min \left(\underset{x_3}{\frac{4}{1/2}}, \underset{x_5}{\frac{3}{5/2}} \right) = \frac{6}{5}$；用 P_1 代替 P_5 得到新基 B_2。

⑤ 计算新基的逆 B_2^{-1}

$$B_2^{-1} = E_{51} B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{B_1^{-1} P_1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

于是

$$X_{B_2}^{(2)} = B_2^{-1} b = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix} \begin{matrix} x_3 \\ x_1 \end{matrix}$$

第 3 轮迭代(从步骤②开始)

② $\pi_2 = C_{B_2} B_2^{-1} = (c_3, c_1) B_2^{-1} = (3,5) \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \left(\frac{4}{5}, \frac{7}{5} \right)$

$$Z_2 = C_B B_2^{-1} b = \pi_2 b = \left(\frac{4}{5}, \frac{7}{5} \right) \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{81}{5} = 16\frac{1}{5}$$

③ $\sigma_N = C_N - C_{B_2} B_2^{-1} B_N = C_N - \pi_2 B_N = (c_2, c_4, c_5) - \pi_2 (P_2, P_4, P_5)$

$$= (2,-1,1) - \left(\frac{4}{5}, \frac{7}{5} \right) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (2,-1,1) - \left(\frac{36}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{5} \right)$$

$$= \left(-\frac{26}{5}, -\frac{9}{5}, -\frac{2}{5} \right) < 0$$