广义生灭过程

吴群英　著

科学出版社
www.sciencep.com

广义生灭过程

吴群英　著

广西自然科学基金
广西教育厅科研基金　资助项目

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要研究广义生灭(拟)Q 矩阵的构造问题及Q过程的其他相关论题，是作者近几年来对广义生灭(拟)Q 矩阵的研究成果. 全书共分四篇. 第一篇是预备知识，介绍了一些基本概念，是后三篇的基础. 第二篇和第三篇分别讨论了广义全稳定生灭 Q 过程和广义单瞬时生灭Q过程. 第四篇研究 Q 过程的μ不变测度.

本书可供理工科高年级本科生、研究生，特别是概率统计方向的硕士、博士，以及从事概率统计的科研工作者阅读和参考.

图书在版编目(CIP)数据

广义生灭过程/吴群英 著. —北京：科学出版社，2004

ISBN 7-03-013512-1

Ⅰ.广… Ⅱ.吴… Ⅲ.生灭过程-研究 Ⅳ.O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 061319 号

责任编辑：陈玉琢 潘继敏／责任校对：朱光光

责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年8月第一版 开本：B5(720×1000)

2004年8月第一次印刷 印张：12 1/2

印数：1—2 500 字数：226 000

定价：32.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

序

马尔可夫过程是一类极为重要的随机过程，它的原始模型是马尔可夫链，由俄国数学家 Markov A. A. (马尔可夫) 于 1907 年提出，它已成为概率论的一个重要分支. 而生灭过程无疑是其中极为重要的一类，这不仅因为生灭过程模型有很强的应用背景，例如，它在排队论、生物学、物理学等中都有重要的应用，直观明确，而且在理论研究中，由于其模型精练，往往是一般马尔可夫过程研究的切入点，因此强烈地吸引着概率统计工作者的兴趣. 有大量的文献对它进行研究，并取得了许多完美的结果，其基本结果被总结在侯振挺等老师的专著中.

设状态空间 $E=\{0, 1, 2, \cdots\}$，由于在许多现实模型中，从任一状态 i 出发，下一步不但能达到相邻的状态 $i+1$ 或 $i-1$ $(i \geq 1)$，且能回到初始状态 0，从 0 出发可以达到任意状态. 因此，将一般生灭(拟) Q 矩阵推广到更一般的具有突变率的广义生灭(拟) Q 矩阵，具有更广泛的应用背景及理论研究价值.

本书主要研究广义生灭拟 Q 矩阵的构造问题及其他相关论题. 关于含有限个瞬时态、无限个稳定态的混合型拟 Q 矩阵，由于研究难度较大，所获结果很少，故获得广义生灭拟 Q 矩阵的直接加在 Q 矩阵本身且易于检验的存在性准则以及获得如常返性、遍历性、遍历测度等重要概率性质是非常有价值和有意义的，且有较大的难度.

本书第一篇是预备知识，主要取材于侯振挺等的专著[1]；第二篇至第四篇是作者在读博士期间，对广义生灭拟 Q 矩阵的研究结果.

作者衷心地感谢导师侯振挺、张汉君教授，在作者读博士期间，他们倾注了大量的心血，他们常常和作者一起讨论，使作者深受启发；他们严谨的治学态度、活跃的数学思想，常常能激发作者的思维、灵感和创作激情. 他们的谆谆教诲，使作者终身受益.

由于作者才疏学浅，书中不可避免会存在一些缺点和错误，恳请各位专家、读者批评指正.

吴群英

2004 年 3 月

目　　录

第一篇 预备知识

本篇介绍一些基本概念，主要是 Q 矩阵、 Q 过程、 Q 预解式，Q 过程的拉普拉斯 (Laplace) 变换，非负线性方程组的最小非负解和最小 Q 过程，分解定理，这些内容主要取材于侯振挺等的专著 [1], 它们是后面三篇的基础.

第一章 Q 过程

1.1 马尔可夫过程

设 E 为可列集.

定义 1.1.1 一个马尔可夫过程 (以下简称马氏过程或过程), 是指具有下列性质的一族实值函数 $p_{ij}(t)(i,j\in E,t\geq 0)$:

$$p_{ij}(t)\geq 0,\quad i,j\in E,t\geq 0; \tag{1.1.1}$$

$$\sum_{j\in E}p_{ij}(t)\leq 1,\quad i\in E,t\geq 0; \tag{1.1.2}$$

$$p_{ij}(s+t)=\sum_{k\in E}p_{ik}(s)p_{kj}(t),\quad i,j\in E,s,t\geq 0; \tag{1.1.3}$$

$$p_{ij}(0)=\delta_{ij}=\begin{cases}1,i=j,\\ 0,i\neq j,\end{cases}\quad i,j\in E. \tag{1.1.4}$$

马尔可夫过程记为 $(p_{ij}(t);i,j\in E,t\geq 0)$, 或简记为 $(p_{ij}(t))$, 或用矩阵形式记为 $P(t)$.

一个马尔可夫过程 $(p_{ij}(t);i,j\in E,t\geq 0)$, 如果满足条件

$$\lim_{t\downarrow 0}p_{ij}(t)=p_{ij}(0), \tag{1.1.5}$$

则称之为标准马尔可夫过程.

本书讨论的过程均指标准马尔可夫过程. 若还有

$$\sum_{j\in E}p_{ij}(t)=1,\ i\in E,t\geq 0, \tag{1.1.6}$$

则称 $P(t)$ 为诚实的马氏过程，否则称为非诚实的.

条件 (1.1.1)~(1.1.4) 也可用矩阵形式写为

$$P(t) \geq \mathbf{0},\ t \geq 0; \tag{1.1.1$'$}$$

$$P(t)\mathbf{1} \leq \mathbf{1},\ t \geq 0; \tag{1.1.2$'$}$$

$$P(s+t) = P(s)P(t),\ s,t \geq 0; \tag{1.1.3$'$}$$

$$P(0) = I. \tag{1.1.4$'$}$$

其中 I 为单位矩阵 $(\delta_{ij}; i,j \in E)$, $\mathbf{1}$ 表示每个分量均为 1 的列向量, $\mathbf{0}$ 表示每个分量均为 0 的矩阵.

条件 (1.1.5) 和 (1.1.6) 也可相应地写为

$$\lim_{t \downarrow 0} P(t) = P(0). \tag{1.1.5$'$}$$

$$P(t)\mathbf{1} = \mathbf{1},\ t \geq 0. \tag{1.1.6$'$}$$

注　条件 (1.1.1), (1.1.2) 称为范条件, (1.1.3) 称为 K-C(Kolmogorov-Chapman) 方程或预解方程, 条件 (1.1.5) 称为标准性条件.

下面的定理说明, 对于一个非诚实的马氏过程, 总可以化为诚实的过程.

定理 1.1.1　设 $(p_{ij}(t); i,j \in E, t \geq 0)$ 是一个马氏过程, 任取 $\Delta \notin E$, 令 $\hat{E} = E \bigcup \{\Delta\}$,

$$\hat{p}_{ij}(t) = \begin{cases} p_{ij}(t), & i,j \in E; \\ 1 - \sum\limits_{k \in E} p_{ik}(t), & i \in E, j = \Delta; \\ 0, & i = \Delta, j \in E; \\ 1, & i = j = \Delta. \end{cases}$$

则 $\hat{P}(t) = (\hat{p}_{ij}(t); i,j \in \hat{E}, t \geq 0)$ 是一个诚实的马氏过程.

证明　显然有

$$\hat{p}_{ij}(t) \geq 0, \quad i,j \in \hat{E}; \tag{1.1.7}$$

$$\sum_{j \in \hat{E}} \hat{p}_{ij}(t) = 1, \quad i \in \hat{E}. \tag{1.1.8}$$

注意到 $\hat{p}_{\Delta j}(t) = 0, j \in E$ 得

$$\hat{p}_{\Delta j}(t+s) = 0 = \sum_{k \in \hat{E}} \hat{p}_{\Delta k}(t)\hat{p}_{kj}(s), \quad j \in E, \tag{1.1.9}$$

注意

$$\hat{p}_{i\Delta}(t) = 1 - \sum_{k \in E} p_{ik}(t), \quad i \in E,$$

得

$$\begin{aligned}
\hat{p}_{i\Delta}(t+s) &= 1-\sum_{j\in E}p_{ij}(t+s)\\
&=\sum_{k\in\hat{E}}\hat{p}_{ik}(t)-\sum_{j\in E}\sum_{k\in E}p_{ik}(t)p_{kj}(s)\\
&=\sum_{k\in E}p_{ik}(t)+\hat{p}_{i\Delta}(t)-\sum_{k\in E}p_{ik}(t)\sum_{j\in E}p_{kj}(s)\\
&=\sum_{k\in E}p_{ik}(t)\left(1-\sum_{j\in E}p_{kj}(s)\right)+\hat{p}_{i\Delta}(t) \qquad (1.1.10)\\
&=\sum_{k\in E}p_{ik}(t)\hat{p}_{k\Delta}(s)+\hat{p}_{i\Delta}(t)\hat{p}_{\Delta\Delta}(s)\\
&=\sum_{k\in\hat{E}}\hat{p}_{ik}(t)\hat{p}_{k\Delta}(s),\quad i\in E.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{p}_{ij}(t+s) &= p_{ij}(t+s)\\
&=\sum_{k\in E}p_{ik}(t)p_{kj}(s)=\sum_{k\in E}\hat{p}_{ik}(t)\hat{p}_{kj}(s)\\
&=\sum_{k\in E}p_{ik}(t)p_{kj}(s)=\sum_{k\in E}\hat{p}_{ik}(t)\hat{p}_{kj}(s)\\
&=\sum_{k\in\hat{E}}\hat{p}_{ik}(t)\hat{p}_{kj}(s),\quad i,j\in E. \qquad (1.1.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{p}_{\Delta\Delta}(t+s) &= 1=\hat{p}_{\Delta\Delta}(t)\hat{p}_{\Delta\Delta}(s)\\
&=\sum_{k\in E}\hat{p}_{\Delta k}(t)\hat{p}_{k\Delta}(s)+\hat{p}_{\Delta\Delta}(t)\hat{p}_{\Delta\Delta}(s)\\
&=\sum_{k\in\hat{E}}\hat{p}_{\Delta k}(t)\hat{p}_{k\Delta}(s). \qquad (1.1.12)
\end{aligned}$$

又显然有

$$\hat{p}_{ij}(0)=\delta_{ij},\quad i,j\in E; \qquad (1.1.13)$$

$$\hat{p}_{\Delta j}(0)=0,\quad j\in E; \qquad (1.1.14)$$

$$\hat{p}_{\Delta\Delta}(0)=1; \qquad (1.1.15)$$

$$\hat{p}_{i\Delta}(0)=1-\sum_{j\in E}p_{ij}(0)=0. \qquad (1.1.16)$$

由 (1.1.7)~(1.1.16) 知 $\hat{P}(t)$ 是一个诚实的马氏过程.

定理 1.1.2 设 $P(t)=(p_{ij}(t);i,j\in E,t\geq 0)$ 是一个诚实的马氏过程，对任意 $\lambda>0$, 令

$$\tilde{p}_{ij}(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}p_{ij}(t), \qquad (1.1.17)$$

则 $\tilde{P}(t)=(\tilde{p}_{ij}(t);i,j\in E,t\geq 0)$ 是一个非诚实的马氏过程.

证明　显然有

$$\tilde{p}_{ij}(t)\geq 0; \tag{1.1.18}$$

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{ij}(s+t)&=\mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}p_{ij}(s+t)\\&=\mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}\sum_{k\in E}p_{ik}(s)p_{kj}(t)\\&=\sum_{k\in E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda s}p_{ik}(s)\right)\cdot\left(\mathrm{e}^{-\lambda t}p_{kj}(t)\right)\\&=\sum_{k\in E}\tilde{p}_{ik}(s)\tilde{p}_{kj}(t);\end{aligned} \tag{1.1.19}$$

$$\tilde{p}_{ij}(0)=p_{ij}(0)=\delta_{ij}; \tag{1.1.20}$$

$$\sum_{j\in E}\tilde{p}_{ij}(t)=\sum_{j\in E}\mathrm{e}^{-\lambda t}p_{ij}(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{j\in E}p_{ij}(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}<1. \tag{1.1.21}$$

由 (1.1.18)~(1.1.21) 知，$\tilde{P}(t)$ 是一个非诚实的马氏过程.

1.2　$p_{ij}(t)$ 的连续性

定理 1.2.1　对任意马氏过程 $(p_{ij}(t))$, 下列条件等价

(1) $(p_{ij}(t))$ 是标准的;

(2) 每一 $p_{ij}(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上一致连续，而且该一致性对 j 也成立.

证明　(1)$\Longrightarrow$(2) 设 $(p_{ij}(t))$ 标准. 为证明 (2), 只需证明

$$|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)|\leq 1-p_{ii}(h),\quad \forall t\geq 0,h>0;i,j\in E. \tag{1.2.1}$$

这可由下式得到

$$\begin{aligned}|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)|&=\left|\sum_{k\in E}p_{ik}(h)p_{kj}(t)-p_{ij}(t)\right|\\&=\left|(p_{ii}(h)-1)p_{ij}(t)+\sum_{k\neq i}p_{ik}(h)p_{kj}(t)\right|\\&=\left|\sum_{k\neq i}p_{ik}(h)p_{kj}(t)-(1-p_{ii}(h))p_{ij}(t)\right|\end{aligned}$$

$$\le \max\left\{\sum_{k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t), (1-p_{ii}(h))p_{ij}(t)\right\}$$
$$\le \max\left\{\sum_{k\neq i} p_{ik}(h), 1-p_{ii}(h)\right\}$$
$$= 1-p_{ii}(h).$$

(2)$\Longrightarrow$(1) 显然.

1.3 $p'_{ij}(0)$ 的存在性

定理 1.3.1 设 $(p_{ij}(t))$ 是标准马氏过程，则对于任意 $i\in E$, 极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-p_{ii}(t)}{t} = -p'_{ii}(0)$$

存在 (可为 $+\infty$).

证明 由 (1.1.1) 与 (1.1.2) 得

$$p_{ii}(s+h)\ge p_{ii}(s)p_{ii}(t). \tag{1.3.1}$$

由标准性条件及 (1.3.1) 知

$$0<p_{ii}(t)\le 1,\quad t\ge 0, \tag{1.3.2}$$

令

$$\varphi(t) = -\ln p_{ii}(t).$$

由 (1.3.2) 知，$\varphi(t)$ 取有限值，由标准性条件和 (1.3.1) 得

$$\lim_{t\to 0}\varphi(t) = 0; \tag{1.3.3}$$

$$\varphi(s+t)\le\varphi(s)+\varphi(t). \tag{1.3.4}$$

令

$$q_i = \sup_{0<t<\infty}\frac{\varphi(t)}{t}\le +\infty.$$

如 $q_i<+\infty$, 则存在 t_0 使

$$\frac{\varphi(t_0)}{t_0} > q_i-\varepsilon,$$

其中 $\varepsilon>0$. 又对任意的 $t>0$, 存在非负整数 n 及 δ 使

$$t_0 = nt+\delta,\quad 0\le\delta<t. \tag{1.3.5}$$

于是由 (1.3.4) 得

$$q_i - \varepsilon < \frac{\varphi(t_0)}{t_0} \le \frac{n\varphi(t) + \varphi(\delta)}{t_0} = \frac{nt}{t_0} \cdot \frac{\varphi(t)}{t} + \frac{\varphi(\delta)}{t_0}, \tag{1.3.6}$$

由 (1.3.3) 和 (1.3.5) 得

$$\lim_{t\to 0} \delta = \lim_{t\to 0} \varphi(\delta) = 0, \tag{1.3.7}$$

及

$$\lim_{t\to 0} \frac{nt}{t_0} = 1, \tag{1.3.8}$$

由 (1.3.6), (1.3.7) 和 (1.3.8) 得

$$q_i - \delta \le \varliminf_{t\to 0} \varphi(t)/t \le \varlimsup_{t\to 0} \varphi(t)/t \le q_i.$$

由 ε 的任意性得

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)}{t} = q_i.$$

如 $q_i = +\infty$, 那么为了得到这个结果，以任给的任意大的正数 M 代替 $q_i - \varepsilon$ 进行讨论就可以了．再由标准性及微积分中一个简单的事实

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1,$$

得

$$\begin{aligned}
q_i &= \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{-\ln[1-(1-p_{ii}(t))]}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{-\ln[1-(1-p_{ii}(t))]}{1-p_{ii}(t)} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{1-p_{ii}(t)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1-p_{ii}(t)}{t}.
\end{aligned}$$

定理 1.3.2　对任意 $i, j \in E, i \ne j$,

$$p'_{ij}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{p_{ij}(t)}{t}$$

存在且有限.

证明 任意固定 $h>0$, 那么 $(p_{ij}(h))$ 是离散时间马氏链 $\{x(nh);n\ge 0\}$ 的转移概率矩阵, 固定 $i\ne j, i,j\in E$, 定义

$$\begin{aligned}
{}_jp_{ii}^{(0)}(h) &= 1;\\
{}_jp_{ii}^{(n)}(h) &= \sum_{k_1\ne j}\sum_{k_2\ne j}\cdots\sum_{k_{n-1}\ne j} p_{ik_1}(h)p_{k_1k_2}(h)\cdots p_{k_{n-1}i}(h) \quad n\ge 1;\\
f_{ij}^{(n)}(h) &= \sum_{k_1\ne j}\sum_{k_2\ne j}\cdots\sum_{k_{n-1}\ne j} p_{ik_1}(h)p_{k_1k_2}(h)\cdots p_{k_{n-1}j}(h) \quad n\ge 1;
\end{aligned}$$

则由离散马氏链的性质可得

$$p_{ij}(nh)\ge \sum_{m=0}^{n-1} {}_jp_{ii}^{(m)}(h)p_{ij}(h)p_{jj}((n-m-1)h), \tag{1.3.9}$$

$$p_{ii}(mh) = {}_jp_{ii}^{(m)}(h)+\sum_{a=1}^{m-1} f_{ij}^{(a)}(h)p_{ji}((m-a)h), \tag{1.3.10}$$

$$p_{ij}(mh)=\sum_{a=1}^{m} f_{ij}^{(a)}(h)p_{jj}((m-a)h),$$

因 $\lim\limits_{t\to 0}p_{ij}(t)=\delta_{ij}$, 故对 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, 存在 $t_0>0$, 使对给定的 i,j

$$\begin{cases}
\max\limits_{0\le t\le t_0} p_{ij}(t)<\varepsilon, & \max\limits_{0\le t\le t_0} p_{ji}(t)<\varepsilon,\\
\min\limits_{0\le t\le t_0} p_{ii}(t)>1-\varepsilon, & \min\limits_{0\le t\le t_0} p_{jj}(t)>1-\varepsilon.
\end{cases}$$

对于 $0<t\le t_0$, 及已给的 h, 令 $n=[t/n]$, 则当 $m\le n$ 时,

$$\varepsilon\ge p_{ij}(mh)=\sum_{a=1}^{m} f_{ij}^{(a)}(h)p_{jj}((m-a)h)>\sum_{a=1}^{m} f_{ij}^{(a)}(h)(1-\varepsilon),$$

$$\sum_{a=1}^{m} f_{ij}^{(a)}(h)\le 1. \tag{1.3.11}$$

由 (1.3.10) 及 (1.3.11) 得

$$p_{ii}(mh)\le {}_jp_{ii}^{(m)}(h)+\sum_{a=1}^{m-1} f_{ij}^{(a)}(h)\max_{0\le t\le t_0}p_{ji}(t)< {}_jp_{ii}^{(m)}(h)+\varepsilon.$$

故有

$${}_jp_{ii}^{(m)}(h)>p_{ii}(mh)-\varepsilon\ge \min_{0\le t\le t_0}p_{ii}(t)-\varepsilon>1-2\varepsilon.$$

再由 (1.3.9) 得

$$
\begin{aligned}
p_{ij}(nh) &\geq (1-2\varepsilon)\sum_{m=1}^{n-1} p_{ij}(h)(1-\varepsilon) \\
&= n(1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)p_{ij}(h) \\
&\geq (1-3\varepsilon)np_{ij}(h),
\end{aligned}
$$

从而

$$
\frac{p_{ij}(nh)}{nh} \geq (1-3\varepsilon)\frac{p_{ij}(h)}{h}. \tag{1.3.12}
$$

令

$$
q_{ij} = \varlimsup_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)}{t}.
$$

在 (1.3.12) 中，令 $h \to 0$, 则 $nh \to t$. 因 $p_{ij}(t)$ 关于 t 连续，故

$$
\frac{p_{ij}(t)}{t} \geq (1-3\varepsilon)q_{ij}. \tag{1.3.13}
$$

在上式中令 $t \to 0$ 得

$$
\varliminf_{t\to 0}\left(\frac{p_{ij}(t)}{t}\right) \geq (1-3\varepsilon)q_{ij}.
$$

由 ε 的任意性得

$$
\varliminf_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)}{t} \geq q_{ij} = \varlimsup_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)}{t},
$$

故

$$
q_{ij} = \lim_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)}{t}.
$$

由 (1.3.13) 知，$q_{ij} < \infty$.

今后我们用 q_{ij} 表示 $p'_{ij}(0)$, 常以 q_i 表示 $-p'_{ii}(0)$, 即 $q_i = -q_{ii}$.

定义 1.3.1　设 $(p_{ij}(t))$ 是标准马氏过程，$(q_{ij}) = (p'_{ij}(0))$. $\forall i \in E$; 若 $q_i < \infty$, 则称 i 为 $P(t)$ 的稳定状态；若 $q_i = \infty$ 则称 i 为 $P(t)$ 的瞬时状态. 如果对任意 $i \in E, i$ 均为 $P(t)$ 的稳定状态，则称 $P(t)$ 是全稳定的；否则称为带瞬时态的.

定理 1.3.3　设 $(p_{ij}(t))$ 是标准马氏过程，则对任意 $i \in E$ 有

$$
0 \leq \sum_{j\neq i} q_{ij} \leq q_i \leq \infty.
$$

证明　由于 $\sum_{j\in E} p_{ij}(t) \leq 1$, 故

$$
\sum_{j\neq i}\frac{p_{ij}(t)}{t} \leq \frac{1-p_{ii}(t)}{t}.
$$

令 $t \to 0$, 由 Fatou 引理得

$$
0 \leq \sum_{j\neq i} q_{ij} \leq q_i \leq \infty.
$$

1.4 $p'_{ij}(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上的存在性及连续性

引理 1.4.1 设 $(p_{ij}(t))$ 是标准马氏过程, 则对一切 $i\in E, p_{ii}(t)$ 在某区间 $[0,t_i]$ 中具有有界变差.

证明 固定 $i\in E$, 因 $p_{ii}(t)$ 在任一有限区间中一致连续, 故只需证明存在 $t>0$ 使得

$$\sum_{r=1}^{N}\left|p_{ii}\left(\frac{r-1}{N}t\right)-p_{ii}\left(\frac{r}{N}t\right)\right|\leq M<+\infty,$$

其中上界 M 与 N 无关 (可能与 i 有关), 从而 $p_{ii}(t)$ 在 $[0,t]$ 中的变差也不会超过 M.

设 $s>0$, 令

$$G_{ij}^{(1)}(s)=1-p_{ij}(s),\quad i,j\in E;$$

$$\begin{aligned}G_{ij}^{(n)}(s)&=1-p_{ij}(s)-\sum_{k_1\neq j}p_{ik_1}(s)p_{k_1j}(s)\\&\quad-\sum_{k_1\neq j}\sum_{k_2\neq j}p_{ik_1}(s)p_{k_1k_2}(s)p_{k_2j}(s)-\cdots\\&\quad-\sum_{k_{n-1}\neq j}p_{ik_1}(s)p_{k_1k_2}(s)\cdots p_{k_{n-1}j}(s),\quad i,j\in E,n\geq 1.\end{aligned}$$

往证对任意 $i,j\in E$, 任意正整数 $n, G_{ij}^{(n)}(s)\geq 0$.

当 $n=1$ 时, 结论显然成立; 归纳假设对 n 结论成立, 则

$$\begin{aligned}G_{ij}^{(n+1)}(s)&\geq\sum_{k\in E}p_{ik}(s)-p_{ij}(s)-\sum_{k_i\neq j}p_{ik_1}(s)p_{k_1j}(s)-\cdots\\&\quad-\sum_{k_1\neq j}\sum_{k_2\neq j}\cdots\sum_{k_n\neq j}p_{ik_1}(s)p_{k_1k_2}(s)\cdots p_{k_nj}(s)\\&=\sum_{k_1\neq j}p_{ik_1}(s)\left[1-p_{k_1j}(s)-\sum_{k_2\neq j}p_{k_1k_2}(s)p_{k_2j}(s)-\cdots\right.\\&\quad\left.-\sum_{k_2\neq j}\sum_{k_3\neq j}\cdots\sum_{k_n\neq j}p_{k_1k_2}(s)p_{k_2k_3}(s)\cdots p_{k_nj}(s)\right]\\&\geq 0.\end{aligned}$$

故由归纳法知

$$G_{ij}^{(n)}(s)\geq 0,\quad i,j\in E,n\geq 1.\tag{1.4.1}$$

记

$$\begin{aligned}u_n&=p_{ii}(ns),\quad n=0,1,2,\cdots;\\W_n&=\min\{u_1,u_2,\cdots,u_n\},\quad n\geq 1;W_0=1.\end{aligned}$$

今定义

$$f_1 = u_1;$$

$$f_{n+1} = \sum_{k_1\neq i}\sum_{k_2\neq i}\cdots\sum_{k_n\neq i} p_{ik_1}(s)p_{k_1k_2}(s)\cdots p_{k_ni}(s), \quad n\geq 1;$$

$$g_n = G_{ii}^{(n)}(s) = 1-\sum_{r=1}^{n} f_r, \quad n\geq 1.$$

则

$$u_n \geq W_n > 0, \quad n\geq 0;$$

$$f_n \geq 0, \quad n\geq 1.$$

由 (1.4.1) 知

$$g_n \geq 0, \quad n\geq 1;$$

$$\sum_{r=1}^{n} f_r \geq 1, \quad n\geq 1.$$

由

$$u_n = p_{ii}(ns) = \sum_{k_1\in E}\cdots\sum_{k_{n-1}\in E} p_{ik_1}(s)p_{k_1k_2}(s)\cdots p_{k_{n-1}i}(s),$$

可得

$$u_n = \sum_{r=1}^{n} f_r u_{n-r}, \quad n\geq 1. \tag{1.4.2}$$

往证

$$1-u_n = \sum_{r=1}^{n} g_r u_{n-r}, \quad n\geq 1. \tag{1.4.3}$$

因 $1-u_1 = 1-f_1 = g_1 = g_1u_0$, 故 (1.4.3) 当 $n=1$ 时成立.

归纳假设对 $k\leq n$(1.4.3) 成立. 则由 (1.4.2) 得

$$\begin{aligned}
1-u_{n+1} &= g_{n+1} + \sum_{r=1}^{n+1} f_r - \sum_{r=1}^{n+1} f_r u_{n+1-r} \\
&= g_{n+1} + \sum_{r=1}^{n+1} f_r(1-u_{n+1-r}) \\
&= g_{n+1} + \sum_{r=1}^{n} f_r \sum_{s=1}^{n+1-r} g_s u_{n+1-r-s} \\
&= g_{n+1} + \sum_{s=1}^{n} g_s \sum_{r=1}^{n+1-s} f_r u_{n+1-r-s}
\end{aligned}$$