21

21世纪高等院校经济与管理类继续教育教材

线性代数

杨荫华　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21世纪高等院校经济与管理类继续教育教材

线性代数

杨荫华　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/杨荫华编著.—北京:北京大学出版社,2004.3
(21世纪高等院校经济与管理类继续教育教材)
ISBN 7-301-06954-5

Ⅰ.线… Ⅱ.杨… Ⅲ.线性代数-成人教育:高等教育-教材
Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第007027号

书　　　名:**线性代数**
著作责任者:杨荫华　编著
责 任 编 辑:刘云艳　梁鸿飞
标 准 书 号:ISBN 7-301-06954-5/F·0781
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　　址:http://cbs.pku.edu.cn　电子信箱:em@pup.pku.edu.cn
电　　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　经管事业部 62752926
排　版　者:北京高新特打字服务社　51736661
印　刷　者:北京大学印刷厂
经　销　者:新华书店
890毫米×1240毫米　A5　11.875印张　330千字
2004年3月第1版　2004年3月第1次印刷
定　　　价:20.00元

21世纪高等院校经济与管理类继续教育教材
编 委 会

内容提要

本书是高等成人教育、继续教育经济与管理类本科“线性代数”课程教材．本书按照教育部颁布的《线性代数自学考试大纲》，并结合作者多年从事教学实践的经验编写而成．全书共分七章．内容包括行列式、线性方程组、n维向量空间、矩阵、矩阵的相似、二次型，以及线性空间与线性变换等．每节后配有适量练习题，每章后附有复习提纲和综合性习题，书末有习题参考答案与提示，供教师和学生参考．本书叙述深入浅出、通俗易懂、论证严谨、便于自学，也可作为参加经济与管理类自学考试本科段考生的自学教材或参考书．

作者简介

杨荫华，副教授，毕业于原北京师范学院．长期在该院和中央财政金融学院、北京工业大学计算机学院从事基础数学教学工作．

早年在推广线性规划工作中经济效益显著，曾出席全国第一届运筹学现场会．曾与学部委员王湘浩教授合编《线性代数》一书，被多所高校采用．

近年在北京大学成人教育学院、北京科技研修学院、中新企业管理学院和吉利大学等高校任教，并从事远程教学．课堂教学受到学生普遍欢迎．2002 年所授课班参加国家统考，通过率达 100％．

前　言

数学是研究客观世界空间形式与数量关系的科学.线性(一次)代数是研究经济学和从事经济管理工作的工具之一.计算机的出现使矩阵论的方法得到广泛应用."线性代数"已成为经济类本科继续教育的必修课程.本书就是在远程教学实践基础上写成的.前六章涵盖了教育部线性代数自学考试大纲,第七章是前六章内容的深化和提高,可供经济理论工作者阅读.

本书的预备知识含和号"$\sum$"、数域、充分必要条件、逆否命题和数学归纳法,供有需要的读者参阅.

为了便于自学,每一章开篇都从已有知识出发,说明本章学习目的.数学来源于实践,服务于实践.关于矩阵、线性空间和线性变换等重要概念都从实际引入.重要定理,采用分析方法引导读者自己证明.为了使读者掌握消元法、矩阵运算、初等变换和行列式计算,在详细说明算法原理的基础上,本书举了各种类型的例题.例题的解答过程可供读者做习题时参考.

数学的高度抽象性决定了它具有广泛的应用性.例如数字"1",在宏观经济学和微观经济学中都用,因为"1"的本质是"单位".为了使读者学起来不感到抽象,行文采用系统、重点、启发式讲解的书面语言,并配有平面和三维几何空间图形.

实践是认知的基础.学数学就得动手做题,因此要求(不是建议)

读者每学完一节就做后面的练习. 做完练习后再学下一节. 每章后有复习提纲和复习题,书后有习题参考答案和解法提示.

线性代数比较抽象. 为适应网络教学的需要,作者尝试写出这本书奉献给读者,企盼得到读者意见和同行指正.

本书在出版过程中得到熊汉富、崔建华、林君秀、刘勇、周月梅和梁鸿飞同志的鼎力相助,在此深表谢意.

杨荫华

2003年12月于畅春园

目　录

预 备 知 识

1. 和号“$\sum$”(读作西格玛)

定义 1 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

性质 1 $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$.

证
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \cdots + a_n + b_n \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i.\end{aligned}$$

性质 2 $\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$ (k 为常数).

证
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} ka_i &= ka_1 + ka_2 + \cdots + ka_n \\ &= k(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\ &= k\sum_{i=1}^{n} a_i.\end{aligned}$$

性质 3 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$ $(1 < k < n)$.

证 $\sum_{i=1}^{n}a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + (a_{k+1} + \cdots + a_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{k}a_i + \sum_{i=k+1}^{n}a_i.$$

本课程还要用到双重和号. $s \times n$ 个数$a_{ij}(i = 1,2,\cdots,s;j = 1,2,\cdots,n)$之和

$$\begin{aligned} S = &a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} \\ &+ a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} \\ &+ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ &+ a_{s1} + a_{s2} + \cdots + a_{sn}. \end{aligned}$$

先将上式每一行用和号缩写. 如第 1 行为$\sum_{j=1}^{n}a_{1j}$, 第 2 行为$\sum_{j=1}^{n}a_{2j}$, $\cdots$, 第 s 行为$\sum_{j=1}^{n}a_{sj}$. 于是

$$S = \sum_{j=1}^{n}a_{1j} + \sum_{j=1}^{n}a_{2j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n}a_{sj} = \sum_{i=1}^{s}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\Big). \tag{1}$$

由于加法有交换律和结合律, 因此求和 S 也可先将每一列用和号缩写. 如第 1 列为$\sum_{i=1}^{s}a_{i1}$, 第 2 列为$\sum_{i=1}^{s}a_{i2}$, $\cdots$, 第 n 列为$\sum_{i=1}^{s}a_{in}$. 于是

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{s}a_{i1} + \sum_{i=1}^{s}a_{i2} + \cdots + \sum_{i=1}^{s}a_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{s}a_{ij}\Big). \end{aligned} \tag{2}$$

显然(1) 和(2) 都表示 S. 故得

性质 4 $\sum_{i=1}^{s}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\Big) = \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{s}a_{ij}\Big)$.

一般地, 可以省略括号, 记作

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{s}a_{ij}.$$

称双重和号可交换.

2. 数域

讨论数学问题首先要明确所用数的范围,才能有确定的结论.例如,方程 $2x+1=0$ 在整数范围内无解;在有理数范围内有解.

定义 2 如果数集 $\boldsymbol{P}$ 中包含 0 和 1,且 $\boldsymbol{P}$ 对四则运算封闭,即任意 $a,b\in\boldsymbol{P}$ 都有 $a\pm b,a\cdot b\in\boldsymbol{P}$,当 $b\neq 0$ 时,$\frac{a}{b}\in\boldsymbol{P}$.则称 $\boldsymbol{P}$ 是**数域**.

例 1 有理数全体 $\boldsymbol{Q}$ 构成数域.

有理数也称有比数,即能够表示成两个整数之比的数(分数).显然,$0=\frac{0}{1}\in\boldsymbol{Q}$;$1=\frac{1}{1}\in\boldsymbol{Q}$;任意$\frac{a}{b},\frac{c}{d}\in\boldsymbol{Q}$,

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}\in\boldsymbol{Q},$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\in\boldsymbol{Q};$$

当$\frac{c}{d}\neq 0$ 时,

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}\in\boldsymbol{Q},$$

所以 $\boldsymbol{Q}$ 是数域.

例 2 实数全体 $\boldsymbol{R}$ 构成数域.

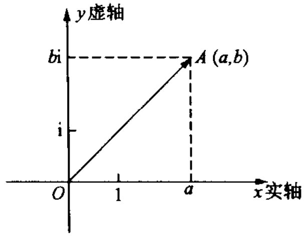
$\boldsymbol{R}$ 包括全体有理数和全体无理数(即无比数,亦即无限不循环小数).把规定了原点、方向和单位的直线称为实数轴,如下图所示:

实数与实数轴上的点一一对应.实数具有有序性(可以比较大小)、稠密性(任意两个实数之间有无穷多实数)和连续性.

例 3 $\mathbf{C}=\{a+b\mathrm{i}\mid a,b\in\boldsymbol{R},\mathrm{i}=\sqrt{-1}\}$ 是复数域.

复数 $a+b\mathrm{i}$ 中,a 称为**实部**,$b\mathrm{i}$ 称为**虚部**,$a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}$ 当且

仅当 $a=c, b=d$. 平面直角坐标系,当 y 轴以虚数 i 为单位时,称为**复平面**. 如下图所示.



复数与复平面上的点一一对应:

$$a+b\mathrm{i} \longleftrightarrow A(a,b).$$

复数 $a+b\mathrm{i}$ 中如果 $b=0$, 则为实数 a. 因此 $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$. 如果 $a=0$, $b \neq 0$, 称 $b\mathrm{i}$ 为**纯虚数**.

复数的绝对值定义为

$$|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

即向量 $\overrightarrow{OA}$ 的长度,因此也称为复数的**模**.

$a-b\mathrm{i}$ 称为 $a+b\mathrm{i}$ 的**共轭复数**. 如果记 $z=a+b\mathrm{i}$, 那么记 $a-b\mathrm{i}=\bar{z}$. 例如

$$\overline{2+3\mathrm{i}}=2-3\mathrm{i}; \quad \overline{2-3\mathrm{i}}=2+3\mathrm{i}.$$

一般地, $\bar{\bar{z}}=z$. 又如

$$\overline{2\mathrm{i}}=-2\mathrm{i}, \quad \overline{-3\mathrm{i}}=3\mathrm{i}, \quad \bar{3}=\overline{3+0\mathrm{i}}=3-0\mathrm{i}=3,$$

即实数 a 的共轭仍为 a. 今后要证明 z 是实数, 只需证明 $\bar{z}=z$ 就可以了.

$z=a+b\mathrm{i}$ 与 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$ 还有如下关系:

(1) $z+\bar{z}=(a+b\mathrm{i})+(a-b\mathrm{i})=2a$;

(2) $z \cdot \bar{z}=(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=a^2-(b\mathrm{i})^2=a^2+b^2$.

本课程主要在一般数域 $\boldsymbol{P}$ 上讨论,有些内容限定在实数域或复数域上讨论.

思考题 有理数域是最小的数域.

3. 逆否命题

逆否命题是对原命题而言.例如,

原命题:如果 z 是实数,则 $\bar{z} = z$.

逆否命题:如果 $\bar{z} \neq z$,则 z 不是实数.

逆否命题与原命题是等价的.

4. 充分条件,必要条件

能充分保证结论成立的条件称为充分条件.

例 4 对于复数 $z_1 = a + b\mathrm{i}, z_2 = c + d\mathrm{i}$,当 $a = c$,且 $b = d$ 时,则(充分保证)$z_1 = z_2$.

这里"$a = c$ 且 $b = d$"是使"$z_1 = z_2$"成立的充分条件.

必要条件是指结论成立必不可少的条件.换句话说,缺了这个条件结论就不成立.

例 5 对于复数 $z_1 = a + b\mathrm{i}, z_2 = c + d\mathrm{i}, z_1 = z_2$ 的必要条件是 $a = c$;

例 6 对于复数 $z_1 = a + b\mathrm{i}, z_2 = c + d\mathrm{i}, z_1 = z_2$ 的必要条件是 $b = d$.

例 7 对于复数 $z_1 = a + b\mathrm{i}, z_2 = c + d\mathrm{i}, z_1 = z_2$ 的必要充分条件是 $a = c$ 且 $b = d$.或者说:$a + b\mathrm{i} = c + d\mathrm{i}$,当且仅当 $a = c$ 且 $b = d$.

5. 数学归纳法

对于自然数 n 成立的命题,一般用数学归纳法证明.例如,

命题 对于任意自然数 n,恒有等式

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

成立.

证 当 $n = 1$ 时,上式左边 $= 1^2 = 1$;右边 $= \frac{1}{6} \times 1(1+1)(2 \times 1 + 1) = 1$,因此等式成立.