

工科课程提高与应试丛书

ENGINEERING
COURSE

矩阵论

(第2版)

典型题解析
及自测试题

张凯院 徐仲 陆全 编

.21-44
(2)

北工业大学出版社

工科课程提高与应试丛书

矩阵论

典型题解析及自测试题

(第2版)

张凯院 徐 仲 陆 全 编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书通过简明的理论介绍与方法总结,以及对大量有代表性的典型例题进行分析、求解和评注,揭示了矩阵论的解题方法与技巧。附录一按课程要求给出了6套自测试题。附录二为习题及自测试题答案。阅读本书,能够帮助读者加深对矩阵理论的理解,提高数学推理能力和计算能力。

本书叙述简明,内容丰富,可作为理、工科研究生和本科高年级学生学习矩阵论课程的辅导书,也可供科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

矩阵论典型题解析及自测试题/张凯院,徐仲,陆全编.—2版.
—西安:西北工业大学出版社,2003.10
(工科课程提高与应试丛书)
ISBN 7-5612-1313-1

I. 矩… II. ①张… ②徐… ③陆… III. 矩阵—高等学校—
解题 IV. O151.21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 077038 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路127号 邮编:710072 电话:(029)8493844

网 址:www.nwpu.com

印刷者:西安东江印务有限公司

开 本:850 mm×1 168 mm 1/32

印 张:9.625

字 数:240千字

版 次:2001年3月 第1版 2003年10月 第2版第3次印刷

印 数:14 001~20 000册

定 价:13.00元

第 2 版前言

本书是国内第一本矩阵论课程的教学辅导书,自 2001 年 3 月出版以来,深受读者欢迎,但在使用过程中也发现了其中的一些问题和需要进一步完善的地方。为此,我们对本书第 1 版做了修订,主要改动之处如下:

(1) 在第一章中增加了专题“十四、线性变换的不变子空间判定”。

(2) 在附录一中增加了“自测试题六”。

(3) 在习题一和习题二中增加了部分习题。

(4) 每一章中均增加或者更换了一些例题。

我们衷心感谢广大读者对本书的关心,并欢迎提出宝贵意见。

编 者

2003 年 8 月

第 1 版前言

矩阵论是高等学校和研究院所理、工科研究生的一门重要基础课程。作为一种数学工具,矩阵理论在数学学科与其它科学技术领域都有广泛的应用。对于将来从事工程技术工作的研究生来说,掌握矩阵理论和方法是必不可少的。

矩阵论课程的理论性强,概念比较抽象,而且有独特的数学思维方式和解题技巧。编者根据多年从事矩阵论课程教学工作的经验,将该门课程的主要内容按知识点归纳为一些小专题,在简明的理论介绍及方法总结之后,通过对大量有代表性的典型例题进行分析、求解和评注,揭示了矩阵论的解题方法与技巧。阅读本书,能够帮助读者加深对矩阵理论的理解,提高数学推理能力和计算能力。

本书分为六章,由张凯院(第一、二、五章及自测试题)、徐仲(第三、四章)、陆全(第六章)分工编写,张凯院负责统稿。本书的出版得到了西北工业大学出版社的大力支持,在此表示衷心的感谢。

本书可作为理、工科研究生和本科高年级学生学习矩阵论课程的辅导书,也可供科技工作者参考。

由于作者水平所限,在编写中难免有疏漏和不妥之处,恳请读者指正。

编 者

2000 年 10 月于西北工业大学

符号说明

$\mathbf{R}(\mathbf{C})$	实(复)数集合
$\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$	实(复) n 维向量集合
$\mathbf{R}^{m \times n}(\mathbf{C}^{m \times n})$	实(复) $m \times n$ 矩阵集合
$\mathbf{R}_r^{m \times n}(\mathbf{C}_r^{m \times n})$	秩为 r 的实(复) $m \times n$ 矩阵集合
$P[t]_n$	次数不超过 n 的一元多项式集合
V^n	n 维线性空间
$W^\perp$	子空间 W 的正交补
$\dim V$	线性空间 V 的维数
$L(x_1, x_2, \dots, x_m)$	由元素 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 生成的子空间
0	零向量或线性空间的零元素
e_i	第 i 个分量为 1, 其余分量为 0 的向量
O	零矩阵
I	单位矩阵
E_{ij}	第 i 行 j 列元素为 1, 其余元素为 0 的矩阵
J	Jordan 标准形矩阵
$\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$	以 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为对角元素的对角矩阵
$\det A$	方阵 A 的行列式
$\text{tr} A$	方阵 A 的迹
$\rho(A)$	方阵 A 的谱半径
$\text{adj} A$	方阵 A 的伴随矩阵
$\text{rank} A$	矩阵 A 的秩
$R(A)$	矩阵 A 的值域
$N(A)$	矩阵 A 的零空间

$R(T)$	线性变换 T 的值域
$N(T)$	线性变换 T 的零空间
$\overline{\text{vec}}(A)$	矩阵 A 按行拉直的列向量
A^T	矩阵 A 的转置
A^H	矩阵 A 的共轭转置
A^+	矩阵 A 的 Moore-Penrose 逆
$A^{(1)}$	矩阵 A 的 $\{1\}$ -逆
$A^{(1,j)}$	矩阵 A 的 $\{1, j\}$ -逆
$A\{1\}$	矩阵 A 的 $\{1\}$ -逆的集合
$A\{1, j\}$	矩阵 A 的 $\{1, j\}$ -逆的集合
$A \otimes B$	矩阵 A 与 B 的直积
(x, y)	元素 x 与 y 的内积
$x \perp y$	元素 x 与 y 正交
$\ x\ _p$	向量 x 的 p -范数
$\ A\ _F$	矩阵 A 的 Frobenius 范数
$V_1 \cap V_2$	子空间 V_1 与 V_2 的交
$V_1 \cup V_2$	子空间 V_1 与 V_2 的并
$V_1 + V_2$	子空间 V_1 与 V_2 的和
$V_1 \oplus V_2$	子空间 V_1 与 V_2 的直和
$\text{Re}(\lambda)$	复数 λ 的实部
$\text{Im}(\lambda)$	复数 λ 的虚部
$\partial f(\lambda)$	多项式 $f(\lambda)$ 的次数

工科课程提高与应试丛书

- ☆ 运筹学典型题解析及自测试题
- ☆ 结构力学(I)典型题解析及自测试题
- ☆ 结构力学(II)典型题解析及自测试题
- ☆ 高等数学典型题解析及自测试题
- ☆ 矩阵论典型题解析及自测试题
- ☆ 理论力学典型题解析及自测试题
- ☆ 材料力学典型题解析及自测试题
- ☆ C 语言程序设计典型题解析及自测试题
- ☆ 微型计算机原理典型题解析及自测试题
- ☆ 汇编语言程序设计典型题解析及自测试题
- ☆ 数据库原理典型题解析及自测试题
- ☆ 计算机组成原理与系统结构
典型题解析及自测试题
- ☆ 计算机操作系统典型题解析及自测试题
- ☆ 数据结构典型题解析及自测试题
- ☆ 自动控制原理典型题解析及自测试题
- ☆ 电工技术(电工学I)典型题解析及自测试题
- ☆ 钢结构典型题解析及自测试题
- ☆ 电子技术(电工学II)典型题解析及自测试题
- ☆ 高频电子线路典型题解析及自测试题
- ☆ 信号与系统典型题解析及自测试题
- ☆ 通信原理典型题解析及自测试题
- ☆ 机械原理典型题解析及自测试题
- ☆ 通信原理典型题解析及自测试题
- ☆ 电力电子技术典型题解析及自测试题
- ☆ 电磁场与电磁波典型题解析及自测试题
- ☆ 电波传播典型题解析及自测试题
- ☆ 随机过程典型题解析及自测试题
- ☆ 电路基础典型题解析及自测试题
- ☆ 模拟电子技术基础典型题解析及自测试题
- ☆ 数字电子技术基础典型题解析及自测试题
- ☆ 无机化学典型题解析及自测试题
- ☆ 有机化学典型题解析及自测试题
- ☆ 物理化学典型题解析及自测试题
- ☆ 土木工程材料典型题解析及自测试题
- ☆ 传热学典型题解析及自测试题
- ☆ 数值分析典型题解析及自测试题

目 录

第一章 线性空间与线性变换	1
一、线性空间的判定	1
二、线性子空间的判定	6
三、线性空间中元素组的线性相关性判别	10
四、线性(子)空间的基与维数的求法	15
五、两个基之间过渡矩阵的求法及证明	21
六、线性变换的矩阵求法	30
七、线性变换的矩阵为对角矩阵时对应基的求法	37
八、矩阵的 Jordan 标准形的求法	44
九、内积的判定	51
十、基的度量矩阵与内积运算的矩阵形式	56
十一、标准正交基的构造方法	60
十二、正交变换与对称变换的证明	64
十三、子空间及其运算的证明	67
十四、线性变换的不变子空间判定	76
十五、矩阵的秩 1 对称分解的证明	80
习题一	82
第二章 向量范数与矩阵范数	87
一、向量范数的构造与验证	87
二、矩阵范数的构造与验证	95
三、矩阵范数与向量范数的相容性证明	100

四、范数在数值分析中的应用	103
习题二	109
第三章 矩阵分析	111
一、矩阵序列的极限	111
二、矩阵级数	115
三、矩阵函数	122
四、矩阵的微分与积分	138
五、矩阵分析的一些应用	146
习题三	152
第四章 矩阵分解	155
一、矩阵的三角分解	155
二、矩阵的 QR 分解	163
三、矩阵的 Hermite 标准形及满秩分解	182
四、矩阵的奇异值分解	189
习题四	197
第五章 矩阵的特征值估计与直积的应用	200
一、特征值的分布区域估计	200
二、广义特征值问题的解法	211
三、广义特征值极性的证明	214
四、矩阵的直积及其应用	218
习题五	225
第六章 广义逆矩阵	228
一、投影矩阵与幂等矩阵	228
二、矩阵的 $\{1\}$ -逆与 $\{1,2\}$ -逆	234

三、矩阵的 $\{1,3\}$ -逆与 $\{1,4\}$ -逆	245
四、矩阵的 Moore-Penrose 逆	250
习题六	260
附录一 自测试题	264
自测试题一	264
自测试题二	266
自测试题三	268
自测试题四	269
自测试题五	271
自测试题六	273
附录二 习题及自测试题答案	276
一、习题答案(提示)	276
二、自测试题答案	286
参考文献	294

第一章 线性空间与线性变换

线性空间是对向量空间的推广,它在形式上具有多样性,但在理论上又有统一性. 线性空间的核心内容是线性变换. 在有限维线性空间中,线性变换及其运算可以转化为矩阵问题进行讨论,其联系方式涉及到三个重要矩阵,即两个基之间的过渡矩阵、线性变换在给定基下的矩阵以及欧氏(酉)空间中基的度量矩阵.

一、线性空间的判定

(一) 内容提要

线性空间的概念建立于非空集合 V 与数域 K 之上,其中的加法运算和数乘运算(合称为线性运算)不仅要满足封闭性,即

(1) 对于任意的 $x, y \in V$, 有 $x + y \in V$;

(2) 对于任意的 $x \in V$ 及任意的 $k \in K$, 有 $kx \in V$.

而且还要满足相应的 8 条运算律.

在线性空间的判定中,确定零元素的方法如下:设 $y \in V$ 满足

$$x + y = x \quad (\text{任意 } x \in V)$$

根据加法运算规则求出 $x + y$, 代入上式左端可求出 y , 那么 $0 = y$;
确定 V 中元素 x 的负元素的方法如下:设 $y \in V$ 满足

$$x + y = 0$$

根据加法运算规则求出 $x + y$, 代入上式左端可求出 y , 那么 $(-x) = y$.

常用的线性空间有以下两类:

(1) 矩阵空间 给定自然数 m 和 n , 数域 K 与集合

$$V = \{A \mid A = (a_{ij})_{m \times n}, a_{ij} \in K\} \quad (1.1)$$

对于 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ 及 $k \in K$, 定义加法运算和数乘运算如下:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}, \quad kA = (ka_{ij})_{m \times n}$$

那么, V 是 K 上的线性空间, 称为矩阵空间. 当 K 为实数域 $\mathbf{R}$ 时, 将 V 记作 $\mathbf{R}^{m \times n}$; 当 K 为复数域 $\mathbf{C}$ 时, 将 V 记作 $\mathbf{C}^{m \times n}$. 特别地, 称 $\mathbf{R}^{1 \times n} (\mathbf{C}^{1 \times n})$ 为行向量空间, 记作 $\mathbf{R}^n (\mathbf{C}^n)$; 称 $\mathbf{R}^{m \times 1} (\mathbf{C}^{m \times 1})$ 为列向量空间, 也记作 $\mathbf{R}^m (\mathbf{C}^m)$.

(2) 多项式空间 给定自然数 n , 数域 K 与集合

$$V = \{f(t) \mid f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n, a_i \in K\} \quad (1.2)$$

对于 $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$, $g(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n$ 及 $k \in K$, 定义加法运算和数乘运算如下:

$$f(t) + g(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n$$

$$kf(t) = (ka_0) + (ka_1)t + \cdots + (ka_n)t^n$$

那么, V 是 K 上的线性空间, 称为多项式空间, 记作 $P[t]_n$.

(二) 典型题解析

例 1.1 设 V 是数域 K 上的线性空间, 证明:

(1) 对于任意的 $x \in V$, 有 $0x = 0$;

(2) 对于任意的 $k \in K$, 有 $k0 = 0$;

(3) 对于任意的 $x \in V$, 有 $(-1)x = -x$.

证 根据 V 中的线性运算规则, 有

$$0x = 0x + [x + (-x)] = (0x + x) + (-x) =$$

$$(0x + 1x) + (-x) = (0 + 1)x + (-x) =$$

$$1x + (-x) = x + (-x) = 0$$

$$k0 = k0 + [kx + (-kx)] = (k0 + kx) + (-kx) =$$

$$\begin{aligned}
 k(0+x) + (-kx) &= kx + (-kx) = 0 \\
 (-1)x &= (-1)x + [x + (-x)] = \\
 &= [(-1)x + x] + (-x) = \\
 &= [(-1)x + 1x] + (-x) = \\
 &= [(-1) + 1]x + (-x) = 0x + (-x) = \\
 &= 0 + (-x) = -x
 \end{aligned}$$

例 1.2 设 $n \geq 1$, 给定数域 $\mathbf{R}$ 与集合

$$V = \{f(t) \mid f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n, a_i \in \mathbf{R}, a_n \neq 0\}$$

对于通常的多项式加法和数乘运算, 判断 V 是否构成 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

解 取 V 中的多项式 $f(t) = 1 + 2t^n, g(t) = 3 - 2t^n$, 因为

$$f(t) + g(t) = 4 \notin V$$

即 V 中的加法运算不封闭, 所以 V 不构成 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

【评注】 定义的加法运算与数乘运算之一不封闭, 或者 8 条运算律之一不成立时, 所论集合不构成线性空间.

例 1.3 设数域为 $\mathbf{R}$, 集合为 $V = \{\alpha \mid \alpha = (\xi_1, \xi_2), \xi_i \in \mathbf{R}\}$.

对于 $\alpha = (\xi_1, \xi_2), \beta = (\eta_1, \eta_2)$ 及 $k \in \mathbf{R}$, 指定两种线性运算如下:

(1) 加法运算 $\alpha + \beta = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2)$

数乘运算 $k \circ \alpha = (k\xi_1, \xi_2)$

(2) 加法运算 $\alpha \oplus \beta = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2 + \xi_1 \eta_1)$

数乘运算 $k \odot \alpha = (k\xi_1, k\xi_2 + \frac{1}{2}k(k-1)\xi_1^2)$

分别判断 V 是否构成 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

解 在运算方式(1)之下, 考虑 $\alpha = (1, 1) \in V$ 及 $k, l \in \mathbf{R}$. 因为

$$(k+l) \circ \alpha = (k+l, 1)$$

$$k \circ \alpha + l \circ \alpha = (k, 1) + (l, 1) = (k+l, 2)$$

所以元素对数加法的分配律不成立, 故 V 不构成 $\mathbf{R}$ 上的线性

空间.

在运算方式(2)之下,易见 $\alpha \oplus \beta \in V, k \odot \alpha \in V$, 即线性运算封闭. 再设 $\gamma = (t_1, t_2) \in V$ 及 $l \in \mathbf{R}$, 则有

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) &= (\xi_1, \xi_2) \oplus (\eta_1 + t_1, \eta_2 + t_2 + \eta_1 t_1) = \\ &= (\xi_1 + (\eta_1 + t_1), \xi_2 + (\eta_2 + t_2 + \eta_1 t_1) + \xi_1(\eta_1 + t_1)) = \\ &= ((\xi_1 + \eta_1) + t_1, (\xi_2 + \eta_2 + \xi_1 \eta_1) + t_2 + (\xi_1 + \eta_1)t_1) = \\ &= (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2 + \xi_1 \eta_1) \oplus (t_1, t_2) = \\ &= (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \alpha \oplus \beta &= (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2 + \xi_1 \eta_1) = \\ &= (\eta_1 + \xi_1, \eta_2 + \xi_2 + \eta_1 \xi_1) = \beta \oplus \alpha \end{aligned}$$

对于任意的 $\alpha \in V$, 由 $\alpha \oplus \beta = \alpha$ 可得

$$(\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2 + \xi_1 \eta_1) = (\xi_1, \xi_2)$$

即

$$\xi_1 + \eta_1 = \xi_1, \quad \xi_2 + \eta_2 + \xi_1 \eta_1 = \xi_2$$

解之得 $\eta_1 = 0, \eta_2 = 0$, 于是 $0 = (0, 0)$ 满足 $\alpha \oplus 0 = \alpha$.

对于任意给定的 $\alpha \in V$, 由 $\alpha \oplus \beta = 0$ 可得

$$(\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2 + \xi_1 \eta_1) = (0, 0)$$

即

$$\xi_1 + \eta_1 = 0, \quad \xi_2 + \eta_2 + \xi_1 \eta_1 = 0$$

解之得 $\eta_1 = -\xi_1, \eta_2 = \xi_1^2 - \xi_2$, 于是 $-\alpha = (-\xi_1, \xi_1^2 - \xi_2)$ 满足 $\alpha \oplus (-\alpha) = 0$.

$$\text{(v)} \quad k \odot \alpha \oplus k \odot \beta = (k\xi_1, k\xi_2 + \frac{1}{2}k(k-1)\xi_1^2) \oplus$$

$$(k\eta_1, k\eta_2 + \frac{1}{2}k(k-1)\eta_1^2) =$$

$$(k\xi_1 + k\eta_1, k\xi_2 + \frac{1}{2}k(k-1)\xi_1^2 + k\eta_2 +$$

$$\frac{1}{2}k(k-1)\eta_1^2 + (k\xi_1)(k\eta_1)) =$$

$$(k(\xi_1 + \eta_1), k(\xi_2 + \eta_2) +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}k(k-1)(\xi_1^2 + \eta_1^2) + k^2\xi_1\eta_1 = \\
& (k(\xi_1 + \eta_1), k(\xi_2 + \eta_2 + \xi_1\eta_1) + \\
& \frac{1}{2}k(k-1)(\xi_1 + \eta_1)^2) = \\
& k \odot (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2 + \xi_1\eta_1) = k \odot (\alpha \oplus \beta) \\
\text{(vi)} \quad k \odot \alpha \oplus l \odot \alpha &= (k\xi_1, k\xi_2 + \frac{1}{2}k(k-1)\xi_1^2) \oplus \\
& (l\xi_1, l\xi_2 + \frac{1}{2}l(l-1)\xi_1^2) = \\
& (k\xi_1 + l\xi_1, k\xi_2 + \frac{1}{2}k(k-1)\xi_1^2 + l\xi_2 + \\
& \frac{1}{2}l(l-1)\xi_1^2 + (k\xi_1)(l\xi_1)) = \\
& ((k+l)\xi_1, (k+l)\xi_2 + \\
& \frac{1}{2}(k+l)(k+l-1)\xi_1^2) = (k+l) \odot \alpha \\
\text{(vii)} \quad k \odot (l \odot \alpha) &= k \odot (l\xi_1, l\xi_2 + \frac{1}{2}l(l-1)\xi_1^2) = \\
& (kl\xi_1, kl\xi_2 + \frac{1}{2}kl(l-1)\xi_1^2 + \\
& \frac{1}{2}k(k-1)(l\xi_1)^2) = \\
& ((kl)\xi_1, (kl)\xi_2 + \frac{1}{2}(kl)(kl-1)\xi_1^2) = \\
& (kl) \odot \alpha \\
\text{(viii)} \quad 1 \odot \alpha &= (1 \times \xi_1, 1 \times \xi_2 + \frac{1}{2} \times 1 \times (1-1)\xi_1^2) = \\
& (\xi_1, \xi_2) = \alpha
\end{aligned}$$

即 8 条运算律成立. 故 V 构成 $\mathbf{R}$ 上的线性空间, 记作 $\mathbf{R}^2(\oplus \odot)$.

【评注】 给定了数域 K 与集合 V , 如果指定的线性运算方式不同, 那么,

可能在一种运算方式之下 V 能构成 K 上的线性空间,而在另外一种运算方式之下 V 不能构成 K 上的线性空间;也可能在两种不同的运算方式之下 V 都不能构成 K 上的线性空间,或者 V 都能构成 K 上的线性空间(此时应视 V 为两个不同的线性空间). 另外,对于一个具体的线性空间,如果指定的线性运算方式不是通常的,那么,相应的零元素和负元素可能与通常的形式不同. 比如,本例给出的线性空间 $\mathbf{R}^2(\oplus \odot)$ 中的负元素形式与通常的负元素形式不同.

二、线性子空间的判定

(一) 内容提要

线性子空间简称为子空间. 子空间的概念建立于线性空间 V 的非空子集 V_1 之上. 如果 V_1 对 V 中定义的线性运算封闭, V_1 就构成 V 的子空间. 子空间本身也是一个线性空间.

常用的子空间有以下 6 类:

(1) 生成子空间 给定数域 K 上的线性空间 V 中的元素 $x_1, x_2, \dots, x_m$, 则

$$L(x_1, x_2, \dots, x_m) = \{x \mid x = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_m x_m, k_i \in K\} \quad (1.3)$$

是 V 的子空间,称为由 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 生成的子空间.

(2) 矩阵的值域 设 $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$ 的 n 个列向量为 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 则

$$R(A) = L(a_1, a_2, \dots, a_n) = \{y \mid y = Ax, x \in \mathbf{C}^n\} \quad (1.4)$$

是 $\mathbf{C}^m$ 的子空间,称为矩阵 A 的值域.

(3) 矩阵的零空间 设 $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$, 则

$$N(A) = \{x \mid Ax = 0, x \in \mathbf{C}^n\} \quad (1.5)$$

是 $\mathbf{C}^n$ 的子空间,称为矩阵 A 的零空间.