数理统計在地質勘探中的应用

（专　　輯）

地质部地质科学技术情报研究所編譯

1965.11.

数理統計
在地质勘探中的应用

（专　輯）

地质部地质科学技术情报研究所編譯

1965.11

关于数理統計在地质勘探工作中的应用問題（代序）

赵 鵬 大

（北京地質学院勘探系）

研究随机現象規律性的科学称为概率論，而应用概率論的基本理論研究实际观察或試驗所获得的大量資料或現象的数学分支，則称之为数理統計。換言之，数理統計的基本任务是：从对大量現象和过程的观察或試驗所获得的資料中，得出所謂概率規律性的結論，并应用概率論中的一些理論来对实际資料进行統計分析和推断。

数理統計在軍事、經济、工业技术和自然科学領域中早已有着广泛的应用。例如在机械制造、紡織工业、水工、水力、天文、医学、农业以及生物学等方面都占有重要地位，而数理統計在某些方面的成功应用，甚至已經形成了一些专門的学科分支。如工业技术数理統計学、統計物理学、統計力学、生物統計学等等。近几十年来，地质科学的各学科領域也日益广泛地应用了数理統計的方法，以致近年来在地质文献中已經出現了"数学地质"及"地质統計学"的概念。

数理統計之所以如此广泛地应用到工业技术及自然科学領域之中，是由于在生产实践过程中以及在自然現象中存在着大量的所謂"随机事件"或"随机現象"。为了对这类現象获得正确和深刻的认識就需要应用数理統計的方法。另一方面，更重要的是：数理統計的应用可以充分发揮已有資料的作用，根据对有限資料的分析可以預測或判断所研究对象的整体面貌。这样不仅在某些情况下可取得节約观察、試驗的工作量或成本的效果，而且是由于对不少研究对象来說，我們是不可能对其总体全部进行观察或試驗的。例如，检驗炮弹或某些其它工业产品的质量，我們就不可能将其全部进行破坏性試驗。

在矿床地质勘探工作中有意識地应用数理統計方法只是近三十年来的事情。尽管历史不长，但它已逐漸引起了人們的广泛重視，并已成为地质勘探工作中一种很有前途的手段或方法。这首先是由于生产发展的客观需要。如对矿石中伴生有益組分的綜合利用問題推动了相关分析法在勘探工作中的应用；为了保証矿山所获得的勘探儲量的必要精度而促进了抽样誤差理論的应用等等。其次，是矿床普查勘探学学科发展的需要。任何一門自然科学的发展，当其由宏观观察进入微观研究，由定性描述进入定量評定，由观察推断进入模拟实驗，由局部資料进入大量材料的情况下都向数学提出了迫切的要求，都要求借助数学这一强而有力的工具。而事实表明，数学的引入反过来对于自然科学各学科的进一步发展又必然起着重要的推动作用。矿床普查勘探学和其它地质科学一样，已經日益不能滿足于

原有的定性描述和掌握一般經驗性規律的水平，而大量的勘探資料数据也急待分析总結，使其上升到理論以进一步指导地质勘探工作。所有这些都成为在地质勘探中应用数理統計的客观基础。再其次，就地质勘探工作本身的特点来看，数理統計的应用也是十分必要的：(1) 地质現象或矿体特点一般具有統計規律的性质，也就是說，这种規律只有在研究現象的集合体时才有可能发現，而在研究个别現象时不易发現；(2) 地质勘探工作拥有大量的分析和測量数据。例如勘探一个矿体，所获得的不是一个品位，一个厚度値，而是大量的品位値和厚度値的集合体，某事件的实現可以用概率的大小来估計；(3) 地质勘探工作具有抽样观察的性质。在勘探时不可能对矿床的每一部分进行完全的測量或分析，而对矿体整体的評定乃是根据一定数量的勘探工程，对矿体进行局部揭露所获得的資料来进行；(4) 地质勘探工作的某些結果具有一定的随机性。例如，采用相同的样品間距或工程間距，但如果起点的座标位置不同則可能获得不同的結果等等。

总括上述情况，在地质勘探工作中研究数理統計法的应用是有可能的，在某种意义上来說，是必要的，因为目前有許多問題还未找到其它的解决途径。但是，任何一門科学都有它本身的特点。毛主席指出：“科学研究的区分，就是根据科学对象所具有的特殊的矛盾性，因此，对于某一現象的領域所特有的某一种矛盾的研究，就构成某一門科学的对象”（矛盾論）。不言而諭，矿床普查勘探学不同于生物学，物理学，甚至也不同于岩石学，地球化学。因此，数理統計在不同学科中的应用也必然具有其特性。

矿床地质勘探工作所面临的一个重要問題是矿体的变化性和对矿体观察度量的有限性之間的矛盾。正确地解决这个矛盾，就使我們有可能多快好省地完成矿床勘探的具体任务，达到最好的地质效果和經济效果。我們知道，矿体变化性是受地质因素所制約的客观存在。我們的任务在于最充分地掌握矿体的变化規律并查明矿体变化性对矿床勘探（主要是对勘探程度和勘探精度）的影响，以便正确地布署勘探工作。而勘探中对矿体观察度量的有限性則主要是受經济因素或技术政策所制約的主观对策。我們的任务在于选择最經济合理的勘探手段和勘探工程数量（間距）去取得最大的地质效果，以便多快好省的探明矿体、加快矿山建設的速度。因此，数理統計的应用也必需最終为解决这一任务服务。

概括起来，目前在地质勘探中应用数理統計主要有下列几方面：

1. 定量地表示矿体的变化特征。矿体的許多标志在勘探中是以大量的数值形态表現的。矿体地质标志的这些数値往往服从于一定的分布律，因此有可能利用各种統計特征数来定量地反映矿体的变化特征。不同成因的矿体乃通过其质和量的变化而相区别。所以，定量地研究矿体的变化特征不仅可以确切地查明每个个别矿体的变化性，而且有助于定量地区分和对比不同的矿体，并有助于闡明其某些成因特点。

2. 采用推导理論分布函数的办法解决有关地质勘探工作中的一些实际問題。为此，需要首先确定所研究对象的概率分布类型，查明此分布的某些基本参数，然后考查其在不同試驗条件下的概率分布。例如，对在某一复杂矿体的勘探中其钻孔見矿率的分布服从于二項分布律。那么，根据这一分布类型，当我們确定了矿体某典型地段的工业矿化与非工业矿化地段的比較以后，就可以推导不同工程間距条件下钻孔見矿率的可能变化情况。这样，通过概率分布函数的推导就可以代替大量的复杂的試驗工作。类似方法有人还利用来判断在某些地区找到工业矿体的概率等等。

3．利用数理統計中关于統計推断的原理及抽样誤差理論評定勘探工作精度或誤差。例如，对比和評定坑道和钻孔取样效果时，借助于差异显著性检驗来估計被对比的变量平均值之差；取样工作中評定基本化学分析与检查分析結果的差别等等。此外，勘探工作中誤差問題的研究主要涉及确定各种平均值的誤差，以及在儲量計算时涉及到誤差的分布及传递等方面的問題，这都是抽样誤差或誤差理論研究的对象。

4．确定必要的观察度量（勘探工程或样品等）数量。这主要是利用数理統計中研究抽样及实驗方法的原理，关鍵在于保証抽样观察的代表性及給定誤差范围的問題。

5．运用相关分析解决有关伴生有益組分的取样、儲量計算問題，以及研究其它諸标志之間相互关系的問題。如品位与厚度之間的关系、矿化强度与深度之間的关系等。

6．采用方差分析的方法判断个别因素在控制某标志之变化中的作用。目前这方面的应用較少。有人利用它評定儲量計算中的誤差。

从以上簡要叙述中可以看出，数理統計的各个基本部分几乎均在地质勘探工作中找到其应用的場所。而地质勘探工作的各环节，从矿床普查、勘探、取样到儲量計算均在不同程度上尝試着应用数理統計。事实上，不仅数理統計，目前数学的一些其它新分支，諸如运筹学，对策論、信息論等也开始試图被应用于解决地质勘探工作中的实际問題。

数理統計应用的可能性及效果問題是地质勘探界中的一个长期爭論的問題。在早些时候，爭論的焦点在于地质勘探数值是否是随机变量、同时也有人怀疑应用数理統計的实效。他們认为应用数理統計需要大量的数据資料，这只有在勘探后期才能获得，因而数理統計工作不能走在勘探工作的前面，去能动地指导勘探工作。再则认为地质因素复杂多变，数理統計的应用会把地质問題簡单化等等。当然也还有另一些人过分强調数理統計在目前的地质勘探工作中的作用，认为沒有它，地质勘探工作就无法进行，因为計算任何一个平均值实际上就已經应用了数理統計。

毛主席教导我們：“只有人們的社会实践，才是人們对于外界认識的眞理性的标准”（实践論）。对于数理統計在地质勘探中应用的效果問題同样需要我們在广泛实践的基础上去做出全面恰当的結論。值得注意的是，数理統計在其它部門的成功应用告訴我們：借助于数理統計，使我們有可能利用相对較少的資料数据对某些事物的規律性做出更为正确的判断；借助于数理統計，使我們在复杂多样的因素中区分出主要和次要因素，区分出带有趋势性的規律現象和带有“干扰性”的随机現象。类似这些問題在地质勘探中都具有同样重要的意义。因此，在地质勘探中应用数理統計的方法和原理应該作为一个值得我們十分重視的方向来对待。

数理統計在地质勘探工作中的应用还是一个新事物，我們应該抱着积极試驗、认眞研究的实事求是的态度。为了取得預期的效果，必需在工作中具有明确的目的性，必需与解决生产实际問題紧密相联系，必需以地质观察研究为基础并充分考虑地质現象或地质数值的特殊性，避免形式主义和煩瑣哲学。数学方法不仅不可能在任何时候完全代替地质方法，而且如果它脱离了地质研究的基础就一定会导致毫无意义或錯誤的結論。

目前在地质勘探工作中应用数理統計的实际困难是不少地质工作者还不十分熟悉数理統計。为了改变这种現状，需要我們加强学习，同时应該积极普及数理統計知識，在高等地质院校中增設数理統計課程、以及在一些专題研究工作中加强地质工作者与数学工作者

的协作等。

这本由地质科学研究院情报所主編的“数理統計在地质勘探工作中的应用”譯文集的出版，对于促进这一工作的开展将会起到有益的作用。从这些譯文中我們可以对国外近几年来在地质勘探工作中应用数理統計的基本状况有一概括了解，这对我們的工作是可能有参考意义的。但应指出的是，某些論文中的观点、方法和結論还不够成熟、甚至不一定确切，因而需要批判地对待。

我国地质勘探工作十几年来在党的领导下取得了极大的成就。特别是58年以来我們創造了許多宝貴的經驗，积累了大量的資料。为了进一步提高我国地质勘探工作水平和提高矿床普查勘探科学的理論水平，系統地总結和研究这些經驗和資料具有重要現实意义。在这方面，正确地、有計划有目的地应用和試用数理統計的原理和方法将会起到良好的作用。毫无疑問，我国地质工作者在伟大的毛泽东思想指引下，必然在这方面創造出自己的經驗，做出卓越的成績。

目　　录

一般性的問題

矿体地质方面的应用

在确定勘探工程数量方面的应用

勘探手段方面的应用

取样方面的应用

儲量計算方面的应用

矿山地质方面的应用

現代地质学中应用数学的三个主要方面[1]

A. Б. 維斯捷利烏斯

（苏联斯契柯洛夫数学研究所列宁格勒分所）

近几十年来，数学方法开始被推广到許多地质学科中，如地球化学、岩石学、矿物学、沉积岩石学以及地质測量、勘探工作等。

电子計算机和控制論方法被广泛应用后，有可能迅速地整理大量的地质資料，从而推动了有效地利用数学方法来解决地质学不同領域中各种复杂而实际的問題。就地质学而言，新的数学研究方法发展得极为迅速，但大多数地质人員却沒有运用这些方法的經驗。因此，有必要向广大地质界介紹数学方法的应用。本文以具体实例来說明用数学方法解决最普遍的地质問題的类型。

过程模型和概率分布

絕大多数的地质体都用一些量来表示，要事先准确地估計这些量是困难的，而只能說出这些量的概率值。这些特征量包括：矿床的矿石中的金属含量、地层层面的空間位置（在进行含油构造的塡图中，就須了解这种层面），确定地球化学过程的微分方程中的系数，岩层厚度等。在地质学中根据这些特征量的概率性质，来研究特征量所取値的概率分布。这时，概率分布能提供有关被研究量所取値的特性的全部信息，因而可以利用概率分布作为检驗各种成因理論的手段。包含在概率分布內的信息还可以使分布更加得到广泛的实际应用，如評价矿产儲量、預測区域远景、选择最合适的普查和勘探工作方法等。揭开概率分布函数的地质意义，可以解决許多极重要的地质問題。

概率分布函数是从有关地质作用的理論概念中推导出来的，而这些地质作用就决定了所研究特征量的特性。在用理論推导出的概率分布与观察所得的結果进行比較时，可认为这些理論与实际情况也即与观察現象幷不矛盾。

实例 需要利用钻探来勘探某一白云母粗晶的伟晶岩型矿床。岩心的直径比对我們有意义的晶体小得多，所以不可能用一般的方法来計算晶体的大小。然而，如果知道白云母晶体的大小的概率分布函数的类型，則可以解决这个問題。为此，必須知道白云母的世代数和掌握有关晶体生长机理的具体概念。在这些資料的基础上，导出分布函数、求出它的参数和計算出白云母的儲量。

假設經过矿物鑑定已确定，該矿床中存在着两个世代的白云母，它們具有同一类型的

[1] 原名：現代地质学中应用数学解的基本类型（編者注）。

正态分布函数（否則，可用晶体大小的某一函数来代替該晶体大小的方法，将它們变換成正态分布函数）。这时还可查明，两个世代中晶体的平均大小很不相同。

为了解决所提出的問題，在取得上述資料之后，我們按不同的大小对从岩心中取出的晶体进行分組，再計算每一組中有多少个晶体。通过計算后，可得出类似于晶体大小的概率分布函数的部分（图1）。因为根据矿物鑑定确定，存在着两个世代的晶体，两个世代中晶体的平均大小有显著不同，它們的概率分布函数都服从正态律，所以可以根据分布函数的截除部分，对平均大小較小的世代白云母重拟晶体大小的概率分布。图1上用虛綫表示了这一重拟的分布。現在我們从总概率分布中减去修改过的概率分布（当然，具有相应的重量）后，可得出余量（見图1上的粗虛綫）。这一余量属于白云母晶体第二代的分布函数部分，該部分代表了有工业价值的大小的晶体。我們再按所求得的截除部分重拟分布函数，于是得到所需要的世代的白云母晶体大小的概率分布函数。現在有了給定具体矿床的概率分布函数及其参量的估値，便可以按它們大小的任一等級計算出粗晶白云母的儲量。

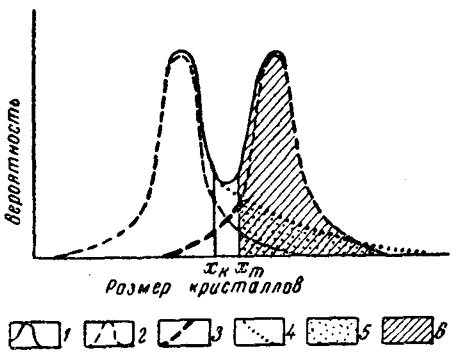

图 1　两个世代白云母的概率分布关系示意图

1—与两种分布部分相重合的分布曲綫部分；2—两种不同世代的分布；3—与細晶的分布相重合的粗晶的分布部分，在实际工作中常用于重拟粗晶的分布；4—用經驗方法建立的分布部分；5—有工业价值的晶体的儲量，計算时未考虑到矿床中白云母的成因；6—有工业价值的晶体的儲量，考虑到两个世代的白云母。图中：纵座标——概率，横座标——晶体大小。

我們分析了实例的邏輯示意图之后，可以看出：

1. 概率分布函数不是从所开采的晶体大小的观察中得出的，而是根据对有关产生一定大小的晶体的过程类型所进行的矿物学推断，再从理論上导出来的。因此，从理論上可以求出分布函数，它不受偶然变化的影响，而是一定矿床的唯一的分布函数，因而該分布函数具有一套，也只有一套特征数。我們并不知道这些参数值，因为目前从理論上一般只能推导出分布函数的类型，所以我們只有根据观測数据来估計这些参数。

2. 根本不允許用平滑所观察到的頻率分布的办法来确定分布函数的类型。实际上，如图1所示，晶体大小的分布函数的截除部分是有些不对称的。如果沒有分布函数类型的理論概念，就会对类似的观察取非对称型的分布曲綫，如图1上的点虛綫所示，在这种情况下，儲量計算的誤差很显著。

如果从理論推导出的分布函数中得出，矿床中大于 x_m 的晶体数量約占晶体总量的46%，而純經驗方法所选择的分布函数表明，它約等于23%。

許多地球化学人員总是认为，分散元素含量的概率分布服从于对数正态律。然而，迄今还沒有任何証据足以証明这种分布的存在，仅仅知道，在許多情况下这种分布能很好地平滑一些个别观測值，当然，在一定情况下可能还存在着許多其它类型的分布。虽然那些类型在成因上与对数正态类型有显著不同，但在平滑观測曲綫上并不比对数正态类型差。参考文献[9,10]就着重叙述了这个問題。

在过程机理的成因概念的基础上推导分布函数一般是复杂的。已有許多文献都論述了

这一問題，但对这一极为重要的地质問題，仅是开始研究[2,3,4,6,7]。

让我們用一个最簡单的实例来說明推导分布函数的特点。

实例 在重砂实驗室中，把富含白鎢矿的云英岩碾碎后，計算其中重組分的精矿中白鎢矿的品位。計算时，在一条計算綫上总是先确定 n 个顆粒。然后求出在这 n 个顆粒中遇到 m 个白鎢矿顆粒的概率 $P_{m,n}$，也就是导出遇到一定数量的白鎢矿顆粒的概率分布函数。显然，用某一种方法从計算綫上所取出的 m 个白鎢矿顆粒出現的概率等于一个顆粒出現概率 P 的 m 次冪。从計算綫上抽取 $n-m$ 个非白鎢矿顆粒的所有情况都是有利的。因此，从 m 个白鎢矿顆粒与 $n-m$ 个非白鎢矿顆粒中抽取某种組合的概率等于 $P^m(1-P)^{n-m}$。但是，无論是什么样的組合，从計算綫上所抽取的白鎢矿顆粒都沒有什么区别。因而，在含有 m 个白鎢矿顆粒的 n 个顆粒中，具有 C_n^m 个挑选样品的組合，其中的任何一种組合都能滿足我們的条件。由此得出所求的概率等于

$$P_{m,n}=\frac{n!}{m!(n-m)!}P^m(1-P)^{n-m}.$$

这是众所周知的二項分布，用它可以解决許多地质問題。

估 計

在理論学說的基础上得到概率分布后，地质人員应当查明这种理論概率分布与观測資料，即与化学分析、产状要素的測量、岩层厚度的測定的資料等的符合程度。这时，最广泛采用的工作方法是估計概率分布参数 Θ_i 与从观測所得到的該参数值的符合程度。

我們再引述一个最簡单的实例。設概率分布特性的参数为 Θ。已有一种方法能够計算出該参数的經驗值 t。这种数值称为参数 Θ 的統計值或估值。前一节已經指出过，参数 Θ 的数值对于一定的分布是唯一的常数。而統計量 t 是一个随机变量，它是参数 Θ 和观測次数的函数，也具有随机变量的方差及其它一切特征数。

数理統計学是数学的一个分支，它是研究統計分布函数和估計参数 Θ 的数值的方法。这些参数値的估計一般籍助于确定置信区間来进行的。假設已知 t 值及其方差 S_t^2。这时，我們可以根据对每組样品所計算的 $t_i \pm ks_{t_i}$ 区間作出寬度为 $t \pm ks_{t_i}$ 的带。在这种情况下可以証明，被估計的参数 Θ 在平行于統計量 t 軸方向上所取的区間內，信任系数为 α，而 α 决定于 t 的方差和系数 k。显然，置信区間愈寬，估計参数的可靠程度愈高。但从滿足实际需要来看，这种估計参数的区間的上下界綫相距太远，同时，窄置信区間估計参数的可能数值的范围不大，可靠程度小，也就是說，参数可能出現在置信区間以外。

在实际工作中，当参数可能出現的数值所組成的区間不太寬，可靠程度不很低时，可求出最佳解。并且还确定，在进行比較中，当可靠程度低于 0.95 时就不能进行估計(可靠程度的最大值等于 1)。

在地质学方面，大多数实际計算的估計中具有自己的基本特性，它要求謹愼地对待从实践中所获得的数字。如果不会运用統計对比法，便容易犯严重的錯誤，这些錯誤会造成无意义的大量开支。

让我們来研究下述的一个实例。对三个超基性岩体进行采样，求其中鉑的品位。这时对每一个岩体采取了 50个岩样。表 1 列出了三个岩体中鉑的平均品位 $\bar{x}$(克/吨)和品位标

表 1

岩体编号	$\bar{x}$	$\hat{S}$
1	16	10
2	20	10
3	22	30

准差 S。

如果除上述 Pt 的分布外，各岩体在所有其余方面都相同，那么，应选择哪一个岩体进行勘探？为了解决这一問題，必須确定置信区間，以便估計各个平均值之差（即 $\bar{x}_i-\bar{x}_j$）的参数。如果我們利用这一区間所确定的各个平均值之差的可靠程度小于0.999，则根据鉑的平均品位来估計，各个矿床相互无区别。当各个平均值之差大于可靠程度为0.999的置信区間时，各个矿床不一样，且所估計的可靠程度較高，则应将平均值較大的岩体交付勘探。

我們对正态分布函数❷进行計算后[1]，得出对差值 $\bar{x}_1-\bar{x}_2$ 所計算的置信区間，以大于0.999的可靠程度否定了关于 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$ 属于同一总体的假設。同时估計差值 $\bar{x}_1-\bar{x}_3$ 的置信区間，只能以小于0.95的可靠程度，否定了同一假設。

根据上述計算得出：2号矿床比1号矿床富，而3号矿床比1号矿床富是沒有証据的，因为观測次数只有50次，且方差較大，所以，較高的平均值可能是偶然的結果。因而，在选择勘探对象时，必須增加分析的数量，或者干脆就对2号矿体进行勘探。

上述实例表明，仅按金属的平均品位来比較矿床的质量是不行的。为了解决这一問題，必須了解金属品位的概率分布函数。应当指出，地球化学中也有类似的情况。在比較克拉克值（一般的和高的）时，应当考虑到观測次数和方差，考虑到分布函数的形状则更好。在作克拉克差值的曲綫图时，須要表示的不是克拉克值本身，而是用某种方法估計的，并且是建立在元素富集的概率特性基础上的差值。否則，在作地球化学的結論中可能造成严重的錯誤。

策略和凸集

地质人員經常不得不在不确定的条件下作出結論，例如，在根据伦琴射綫譜辨认粘土矿物或研究勘探工作是否继續或停止的問題时，討論的对象就是我們經常不能作出絕对判断的一些对象。这时可能有两种不确定的情况。

第一种情况的特点是实驗的結果带有偶然性，第二种情况产生的原因是不知道通过我們行动的結果，将会遇到什么样的对象，但是，可以預計到，会出现哪些对象。此外，地质方面的特点是，所研究的对象无論如何也不会反应在我們为了解释其特点所采取的行动上。

在不确定的条件下肯定解的理論是数学的另一个分支，即对策論。它具有发达的工具，它有可能在地质学的各方面获得广泛的应用。现以实例来說明。

长期以来，在花崗岩体中普查含鎢矿脉都毫无結果，迄今对这个普查工作的意見仍很分歧。在某一个地区工作的地质人員准备继續全面开展工作（把这称为行动 a_3）。苏联地质委員会的地质人員认为，这項工作是沒有前途的，建議停工（行动 a_1）。但根据某一地

❷ 从上述 $\hat{S}$ 值中实际上已經知道，Pt 的分布函数不对称，但考虑到实例的基本特性，我們仅探討簡化的情况。

质研究所的意見，应当继續这項工作，不过必須縮減工作量，山地工程也不必进行（行动 a_2）。假設有一个数学地质研究所（ИМПГ），他們請求这个研究所介紹如何客观地来解决这个問題。这个研究所便与財經部門联系，并建議財經部門引入赢得的概念，在假設能求得含鎢脉的 θ_1 或不含鎢脉的 θ_2 时，这一概念能全面地用数量单位来估計每一行动的效果。

应着重指出，赢得不是单純以貨币来衡量的。可能有这种情况，从其它矿区运进鎢比自己新开矿区要便宜，但是，从另一个角度来說，新矿区会大大地提高本区居民的福利。在这种情况下，新矿区的赢得可能很高。所以，赢得不应仅用貨币来衡量，而要用一种考虑到总效果的綜合特定单位去衡量。

当財經人員掌握了赢得的概念之后，数学地质研究所便請他們根据某些行动的結果所找到的含鎢脉或不含鎢脉的假設，編制赢得損失与各种不同行动的关系表（表 2）。

数学地质研究所协同勘探队的地质人員編制了发現含鎢脉和不含鎢脉的概率与普查标志（云英岩化类型的标志）的关系表。这时在該区可指望找到白云母云英岩 x_1（在这种岩石中找到矿体的机会最少）、云母石英云英岩 x_2（較有远景）和黄玉云英岩 x_3（在找到它时发現鎢的远景显著提高）。遇到含矿脉 θ_1 或非矿脉 θ_2 的概率与发現云英岩的关系示于表 3。

表 2

脉的类型	行动		
	a_1	a_2	a_3
θ_1	7	1	0
θ_2	2	4	5

表 3

脉的类型	根据标志发現的概率		
	x_1	x_2	x_3
含矿脉 θ_1	0.10	0.30	0.60
非矿脉 θ_2	0.80	0.15	0.05

数学地质研究所得到表 2 和表 3 的数据后，建議計算出最合适的行动方式，并取經过各种行动之后所得到的赢得損失的平均值作为标准。为了找到矿脉和非矿脉（与首先查明某种找矿标志有关），应該計算平均赢得損失❸。因为我們有三个找矿标志，而可能的行动也有三种，所以在形式上可从这两套“三”中編成 27 种組合。我們把这三种行动中的每一套称为純策略，并对其估計赢得損失值。因为必須分别对矿脉和非矿脉計算赢得損失，所以我們引入符号 $L(\theta_i, S)$ 和 $L(\theta_2, S)$，其中 S 为策略类型。

表 4 列出了所有 27 种可能的策略以及在含鎢脉和不含鎢脉的情况下，每一种策略的赢得損失的函数的平均值 $L(\theta_i, S)$。用对策論的一般方法进行了計算[8]。

从表 4 看出，表中所有的赢得損失的数据都可以画在坐标为 $L(\theta_1, S)$，$L(\theta_2, S)$ 的平面上。这时，我們可得到純策略集的图解。可以証明，策略集是凸集，也就是，其中任意两个点能直接联接起来，而不超出該集范围。

由此，将集的所有周边各点直接地联接起来，得到一个凸多边形，全部可能的策略点的位置都将在这范围內。这种策略为混合策略，也就是說集界左下部的策略，从赢得損失較小的观点来看，是可以接受的。从图 2 看出，其中包括策略 S_1, S_2, S_3, S_6, S_9, S_{18} 和 S_{27}。

❸ 用各个相应的概率与赢得損失值的乘积的代数和来进行計算。

表 4

策略編号	行动			$L(\theta_1, S)$	$L(\theta_2, S)$	策略編号	行动			$L(\theta_1, S)$	$L(\theta_2, S)$	策略編号	行动			$L(\theta_1, S)$	$L(\theta_2, S)$
	x_1	x_2	x_3				x_1	x_2	x_3				x_1	x_2	x_3		
1	a_1	a_1	a_1	7.0	2.0	10	a_2	a_1	a_1	6.4	3.6	19	a_3	a_1	a_1	6.3	2.15
2	a_1	a_1	a_2	3.4	2.1	11	a_2	a_1	a_2	2.8	4.1	20	a_3	a_1	a_2	2.7	4.5
3	a_1	a_1	a_3	2.8	2.15	12	a_2	a_1	a_3	2.2	3.15	21	a_3	a_1	c_3	2.1	4.55
4	a_1	a_2	a_1	5.2	2.5	13	a_2	a_2	a_1	4.6	3.9	22	a_3	a_2	a_1	4.5	4.7
5	a_1	a_2	a_2	1.6	2.4	14	a_2	a_2	a_2	1.0	4.0	23	a_3	a_2	a_2	0.9	4.8
6	a_1	a_2	a_3	1.0	2.45	15	a_2	a_2	a_3	0.4	4.05	24	a_3	a_2	a_3	2.7	4.85
7	a_1	a_3	a_1	4.9	2.65	16	a_2	a_3	a_1	4.3	4.05	25	a_3	a_3	a_1	4.2	4.85
8	a_1	a_3	a_2	1.3	2.55	17	a_2	a_3	a_2	0.7	3.55	26	a_3	a_3	a_2	0.6	4.75
9	a_1	a_3	a_3	0.7	2.6	18	a_2	a_3	a_3	0.1	4.2	27	a_3	a_3	a_3	0.0	5.00

这些策略称为基本策略。可以从中选出在給定形势下最优策略。什么是最优的形势呢？这一点尙不清楚，我們可以用数种处理方法来弄清楚。

假設最謹慎的处理方法是最优的，这时可出現贏得最大损失的极小值。为了找出相应的策略，必須画出 $L(\Theta_1, S)=L(\Theta_2, S)=C$ 的直綫。这些直綫在其与策略集边界接触处的交点，便是較优的策略点。在这种情况下，如图 2 所示，混合策略是最优的。在大多数情况下，遵照策略 S_3 是合理的，但也可能有时 S_6 更适当。换句話説，如果在追加的一月中所找到的是云母云英岩或云母石英云英岩区，则停工是合理的。如果找到的是黄玉云英岩露头，就应继續全面开展工作。

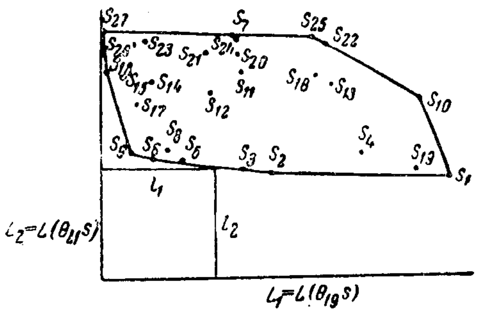

图 2 策略集

直綫 l_1 和 l_2 与集界的交点符合 minimax 混合策略。

这里所討論的是一个最簡单的情况，就是仅从两种可能的情况中选择一种找矿結果。实际工作中找矿結果是很多的，那时不得不依靠所求得的策略作为基本构架，綜合采用上述方法，作出直观解。

*　　　*　　　*

上述材料提供了有关在地质学中应用数学的基本方向的一般概念。

然而，除了基本的原则性方向之外，尙有一个广闊的，与上述任务的技术問題有关的科学領域。目前，这一技术基本上已联系到电子計算机和控制論的运用[5]。最后，应当指出，研究地质特征値的概率分布，近年来已形成一門专門的学科——数学地质学。它有着它自己的研究范围[2]。

結　論

大多数地质过程都是随机（概率）过程，为了研究这些过程，必須应用相应的数学方法。

在用数学研究地质問題的过程中，首先要注意到全面的，质量高的实际地质資料。数

学研究本身在于制定过程模型、在于从理論上根据地质資料估計所获得的过程参数，同时还在于在由估計质量所建立的不确定条件下作出的判断。

要推广数学方法，必須将地质学和地球化学的成因問題与儲量計算、普查和勘探等純应用問題有机地联系起来。

参考文献

1. Ван-дер-Варден Б. Л. Математическая статистика. Изд. иностр. лит-ры, 1960.
2. Вистелиус А. Б. Проблемы математической геологии. Геология и геофизика, вып. 12, 1962; вып. 7, 1963; вып. 12, 1963. Изд. Сибирского отделения АН СССР.
3. Вистелиус А. Б. Сульфаты кальция в палеозойских отложениях востока Русской платформы. ВНИГРИ, геохим. сб. № 1. Гостоптехиздат, 1949.
4. Вистелиус А. Б. и Сарманов О. В. Стохастическое обоснование одного геологически важного распределения вероятностей. Докл. АН СССР, т. 58, № 4, Изд-во АН СССР, 1947.
5. Вистелиус А. Б. и Яновская Т. Б. Программирование задач геологии и геохимии при использовании универсальных электронных вычислительных машин. «Геология рудных месторождений», вып. 3, 1963.
6. Колмогоров А. Н. О логарифмически-нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении. Докл. АН СССР, т. 31, № 2, Изд-во АН СССР, 1941.
7. Колмогоров А. Н. Решение одной задачи из теории вероятностей, связанной с вопросом о механизме слоеобразования. Докл. АН СССР, т. 65, № 6, Изд-во АН СССР, 1949.
8. Чернов Г. и Мозес Л. Элементарная теория статистических решений. Изд-во иностр. лит-ры, 1962.
9. Chayes F. The lognormal distribution of elements: a discussion Geochim et Cosmochim. Acta. v. 6, N 2/3, 1954.
10. Vistelius A. B. The skew frequency distribution and the fundamental Law of the Geochemical Processes. J. Geol., vol. 86, N 1, 1960.

译自 *Разведка и охрана недр*, 1964, № 6, 18—25.

李方錦 译
吳昌功 校

运用概率論分析勘探資料的原則

Л. И. 契特維里科夫

（国立沃龙涅什大学）

以最簡单的应用形式运用概率論[2,9] 来分析矿床的勘探資料已經作了許多尝試，然而却未获得令人滿意的結果，因为在大部分工作中都是机械地搬用数理統計的原理和公式，而未考虑到原始的地质勘探資料。虽然用数学来代替地质学是不行的，但是可以試用数学語言来表达地质規律。为了解决这个問題，我們认为应該明确下述問題。

1．論証高等数学的某一章节，特别是概率論，对分析勘探資料的适用性。

2．采用一种适合地质条件和地质規律的概率論方法。

3．然后，运用具体的数学分析原理和具体的公式来分析地质体。

本文将对上述第一个問題进行研究。

目前統計学的运用是建立在由 П. А. Рыжов 十分清楚闡明的原理[7]的基础上。

系統地測量矿体不同部位的参数（厚度，品位等）可以簡化勘探的过程。其中每个参数皆可視为"随机变量"[1,2,9]。因此，对整个矿体（甚至某几个矿体）来說，同一参数的一組測量值可視为一个随机变量的正态統計总体，而該参数的单个測量值則是該統計总体的变値。假設这个总体的所有变値是随机的，彼此完全沒有联系，則它們将在某一固定的平均值附近波动。

在我們看来，用上述的数学方法来解释矿体参数的特征与其地质基础有矛盾。在这方面最适用的是概率論的另一部分——随机函数論。为了闡明对我們有用的随机变量同随机函数在原則上的区别，我們不打算进行数学推导，而仅分析一下下面的三个例子。

例一 取任意一个长形容器，其中混合盛入两种颜色（深色和浅色）的圓珠(鈷粒)。設圓珠除颜色外，其它完全相同。很显然，容器經过多次搖动后，圓珠的分布純粹是随机的紊乱，即其分布甚至連极弱的規律性也沒有。如果我們希望知道每一色圓珠的数量，为此，在不同部位取一些样品，則在不同部位所取的样品中同一色圓珠的含量是不同的。并且，无論哪一部位所取的样品，其中某色圓珠的含量与整个容器中該色圓珠的眞实含量之間同样都可能存在着偏差，而与样品从容器的什么部位获取无关。只有所取的样品的体积才有意义。这种样品的体积愈小，就愈有把握地能預料到，每一样品的含量可能与整个容器中的眞实含量和邻近样品的可能含量不同。总之，如果能获得足够数量的样品，而每一样品又具有一定大小的体积，那末，在本实例的条件下，所获得的圓珠含量的数据将服从正态分布律。

因此，可以用同精度的两种方式来解决所提出的問題，或者获取数量多、規格小的样品，或者相反，获取数量少、規格大的样品。从精度观点来看，取样順序对于問題的解决沒有

意义，重要的在于样品的总数。

上述一切表明，如果获取一系列同类型的样品，这时从分析样品中所得到的数据将是一个随机变量的正态統計总体。

因此，对本例和与此类似的例子而言，不加任何条件和限制，考虑到简单和适用，則运用数理統計（正如我們現在所采用的数理統計）是正确的。

例二 容器中混合盛入形状和大小相同的鉛珠和鉄珠。不改变容器的空間方向搖动数次，然后观察其中圆珠的分布。显然，由于两种圆珠的比重不同，就不能认为它們的分布純粹是随机的紊乱。例如，沿容器的垂直軸一定会見到一种圆珠趋于富集，而另一种圆珠則有相对减少的傾向。

让我們来研究这样的圆珠分布。将容器內部划分为一系列仅包含一排圆珠的水平层，計算每一层中各种圆珠的数目，确定它們的含量(图 1，I)。再用曲綫图来表示所求得的結果，沿垂直軸繪出圆珠的分布曲綫(图 1，II)。严格地說，这种关系的精确形式（分布曲綫的类型及其斜率等）在不同的实驗中可能不同。但在所討論的情况下，这种精确形式对我們沒有意义，因为重要的是圆珠沿垂直軸（Z）的分布存在着一定的規律性这一事实本身。

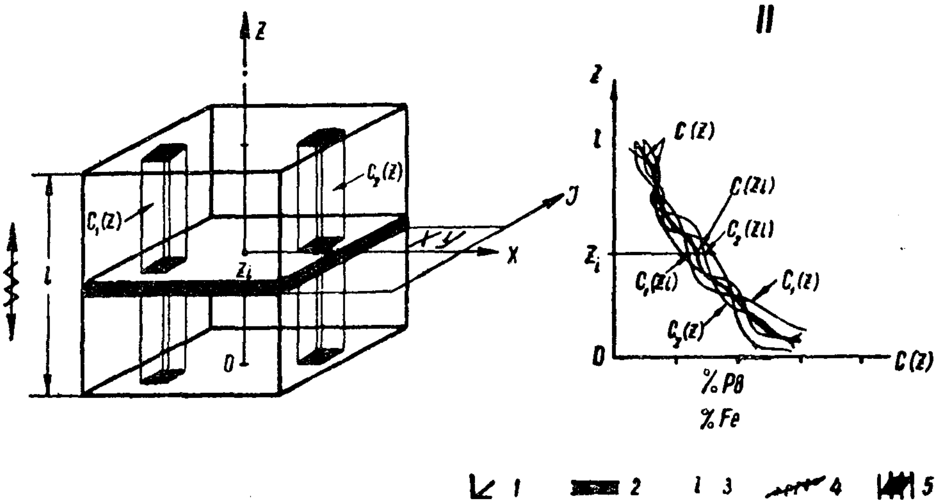

图 1 圆珠在容器中的可能分布(例二)

1—容器的輪廓；2—位于离容器底部高度为 Z 的圆珠水平层；3—所有圆珠在容器中的高度；4—搖动容器的方向；5—沿垂直棱柱所采取的样品。II $C(Z)$—圆珠垂直分布的平均值或随机函数的現实的平均值；$C_1(Z)$，$C_2(Z)$—圆珠在每个棱柱內的垂直分布或随机函数的現实族；$C_1(Z_1)$，$C_2(Z_2)$，$C_3(Z_3)$等—在相应座标值时現实族的截口。

現在来研究一下圆珠在所划分的任一水平层（xy）內的分布(图 1，I)。显然，該水平层內圆珠的分布与沿 Z 軸的分布不同而是另一种情形。因为 xy 平面垂直于 Z 軸，这时，圆珠比重的差异并不能决定圆珠分布中的規律性，因而，可以认为圆珠在每一水平层內的分布是随机的。

将容器划分成一些垂直的棱柱，从某一层棱柱范围內采取一些大小相同的样品。从这些样品的数据中，将会同时反映两种現象：圆珠沿垂直軸的分布是規律的，而在水平面上的分布却是随机的。如果将这些数据表示在图上(图 1，II)，那么，所得到的分布曲綫 $C_1(Z)$ 与前述的平均值有些不同。