数学分析的思想与方法

明清河 著

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

山东大学出版社
Shandong University Press

数学分析的思想与方法

明清河　著

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析的思想与方法/明清河著．—济南：山东大学出版社，2004.7（2005.1 重印）

ISBN 7-5607-2801-4

Ⅰ．数…　Ⅱ．明…　Ⅲ．数学分析　Ⅳ．017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 064671 号

山东大学出版社出版发行

（山东省济南市山大南路 27 号　邮政编码：250100）

山东省新华书店经销

安丘意中印务有限责任公司印刷

850×1168 毫米　1/32　10.5 印张　273 千字

2004 年 7 月第 1 版　2005 年 1 月第 2 次印刷

印数：2001—3000 册

定价：18.80 元

序　言

数学方法论是研究数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新法则的一门学问。关于数学发展规律的研究属于宏观数学方法论的研究范畴，关于数学思想方法以及数学发现、发明与创新的研究则属于微观数学方法论的研究范畴。

微观的数学方法论，对数学的研究、教学和学习，都有重要的指导意义。对研究来说，数学方法论对各种方法进行分析、比较、评论，从而引导人们作出更深刻、更重要的发现和发明；对教学而言，数学方法论的意义在于将思想、方法与具体的内容有机地结合起来，使学生不只停留在形式上的推演，而且能深入地理解数学的本质和意义，知其然，而且知其所以然；用数学方法论来指导学习，不仅学习知识、理论，而且可以学习前人进行科学创造的思想方法，领会前人是怎样工作的，这对培养独立创新能力至关重要。

研究数学思想方法的书籍并不多见，明清河同志撰写的专著《数学分析的思想与方法》是对数学学科思想方法所做的积极的、有意义的探索，是将数学方法论应用于高等数学的研究、教学与学习的创新性成果。

明清河同志从事数学分析的教学工作已 20 年，对数学方法论的研究也近 15 年。在这期间，一直致力于数学教育的教学改革、课程改革研究，曾在北京师范大学系统地学习和研究

"数学方法论"，参加过教育部"师范教育发展"项目、"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"等多项课题的研究。在数学教育的教学、改革和科学研究诸方面，都有着丰富的经验。为了更好地进行本学科的教学改革，他精心地撰写了本书。

本书是作者在认真学习国内外数学科学方法论的基础上，结合自己多年的数学教学和科学研究的实践，经过长时间探讨的辛勤劳动的成果。其显著特点是系统性、深刻性与思辨性，它的内容翔实丰富，结构清新独特，笔调简洁流畅，叙述通俗易懂有启发性.将数学分析的本质、内容、思想、方法以及发展历史有机地融合在一起，既有对数学分析重要思想方法本质的深层次探讨，又有对有关哲学思想的深入分析，还有对美学思想、发展过程中数学家思想过程等的详细论述。

我认为《数学分析的思想与方法》是一本难得的好书，它不仅适用于数学分析的教学研究人员和理工科专业的学生，而且对从事数学史、数学哲学、数学方法论的研究人员来说也有很好的参考价值。希望通过这本书的出版，能对数学学习、数学教育、数学研究、数学发现与发明起到应有的推动作用。

王梓坤

（中国科学院院士、原北京师范大学校长）

2004.3.2

作者的话

数学分析是高等数学的一门重要基础课，是进一步学习各有关后续课程的阶梯。这门课程经过近三个多世纪的发展和完善，形成了一套严密的、抽象的、形式化和逻辑性很强的理论体系。学习这门课程通常会遇到较大的困难。作为每一位从事数学分析教学的教师，都面临着“教师如何教”、“学生如何学”的问题。

1990 年在“全国数学方法论与数学教育研讨会”上，聆听了王梓坤等著名专家的精彩报告，从此踏入了“数学方法论”这一研究领域。1996 年在北京师范大学师从曹才翰先生、丁尔升先生、钱佩玲教授系统地学习了“数学方法论”的理论知识，为教学和研究打下了较坚实的理论基础。特别是通过承担国家级和省级有关数学方法论立项课题的研究，积累了较丰富的实践经验。在此基础上产生了系统研究数学分支学科思想方法的想法和动力。通过大量资料的查阅、专家的咨询、同行的商榷，形成了本书的编写思路与结构框架。

《数学分析的思想与方法》一书通过多角度、深层次、全方位地探讨了数学分析学科的思想与方法，全书共分为六个部分：第一部分对数学分析内容体系中所体现的重要思想进行了探讨与分析；第二部分对数学分析内容体系中所蕴含的哲学思想进行了挖掘与分析；第三部分通过大量的事例对数学分析内容中所常用的数学思想进行了举例与分析；第四部分对数学美

与数学分析中的美学思想进行了论述与分析；第五部分对微积分创立过程中数学家的思想和方法进行了整理与分析；最后一部分以附录的形式将古代数学家解决问题的方法进行了举例与说明。

在本书的写作过程中，著名数学家、中科院院士王梓坤先生给予了充分肯定和亲切鼓励，并为本书撰写了序言，这将成为我继续致力于对数学思想方法研究的动力，在此表示衷心的感谢。牛家骥教授审阅了全书并对本书的体系、内容都给予了具体的指导；刘永辉教授也对本书提出了建设性的建议；作者还参阅了许多专家学者的研究成果，在此一并表示感谢。在本书付梓之时，还要感谢山东大学出版社社长孔令栋教授、刘旭东主任及编辑同志们，是他们的大力支持才能使本书得以出版。

对数学分析学科思想方法的研究，本书作了一些尝试，希望能起到抛砖引玉的作用。限于作者的水平有限，本书一定有许多缺点和错误，恳请前辈、同行及读者批评指正。

明清河

2004年4月

目　录

第一章　数学分析中体现的数学思想

数学分析的研究对象是函数,研究方法是极限法,主要内容为微分学、积分学和级数理论.本章将对数学分析内容中体现的函数思想、极限思想、连续思想、导数思想、微分思想、积分思想、级数思想的产生与发展、本质与意义、认识与应用进行分析和探讨.

一、函数的思想

“用函数来思考”是大数学家克莱因领导的数学教育改革运动的口号.函数是数学中最重要的基本概念,也是数学分析的研究对象.函数的思想,就是运用函数的方法,必要时引入辅助函数,将常量视为变量、化静为动、化离散为连续,将所讨论的问题转化为函数问题并加以解决的一种思想方法.

1. 函数概念的产生与发展

(1) 函数概念的起源

函数概念的萌芽,可以追溯到古代对图形轨迹的研究.随着社会的发展,人们开始逐渐发现,在所有已经建立起来的数的运算中,某些量之间存在着一种规律:一个或几个量的变化,会引起另一个量的变化.这种从数学本身的运算中反映出来的量与量之间的相互依赖关系,就是函数概念的萌芽.在代数学的方程理论中,对不定方程的求解,使得人们对函数概念逐步由模糊趋向清晰.

(2) 函数概念的产生

恩格斯指出:“数学中的转折点是笛卡儿的变数,有了变数,运动进入了数学;有了变数,辩证法进入了数学.”笛卡儿在 1637 年

出版的《几何学》中第一次涉及到变量，并称之为“未知和未定的量”，同时也引入了函数的思想.英国数学家格雷果里在1667年给出的函数的定义，被认为是函数解析定义的开始.他在“论圆和双曲线的求积”中指出：从一些其他量经过一系列代数运算或任何其他可以想象的运算而得到的一个量.这里的运算指的是五种代数运算以及求极限运算，但这一定义未能引起人们的重视.

一般认为，最早给出函数定义的是德国数学家莱布尼兹.他在1673年的一篇手稿中，把任何一个随着曲线上的点变动而变动的几何量，如切线、法线、点的纵坐标都称为函数；并且强调这条曲线是由一个方程式给出的.莱布尼兹又在1692年的论文中，称 x 幂的 x，x^2，x^3 等为 x 的幂数，把幂与函数看作同义语，以后又用“函数”表示依赖于一个变量的量.

(3) 函数概念的扩张

函数概念被提出后，由于微积分学的发展，函数概念也不断进行扩张.致使函数概念日趋精确化、科学化.函数概念在发展过程中，大致经过了以下几个阶段的扩张.

函数概念的第一次扩张主要是解析扩张，提出了“解析的函数概念”.瑞士数学家约翰·伯努利于1698年给出了函数新的定义：由变量 x 和常量用任何方式构成的量都可以叫做 x 的函数.这里的“任何方式”包括了代数式子和超越式子.1748年欧拉在《无穷小分析引论》中给出的函数定义是：“变量的函数是一个解析表达式，它是由这个变量和一些常量以任何方式组成的.”1734年欧拉还曾引入了函数符号 $f(x)$，并区分了显函数和隐函数、单值函数和多值函数、一元函数和多元函数等.在18世纪占主要地位的观点是，把函数理解为一个解析表达式(有限或无限的).

函数概念的第二次扩张是从几何方面的扩张，提出了“几何的函数概念”.18世纪中期的一些数学家发展了莱布尼兹将函数看作几何量的观点，而把曲线称为函数(因为解析表达式在几何上表

示为曲线).达朗贝尔在1746年研究弦振动问题时,提出了用单独的解析表达式给出的曲线是函数,后来欧拉发现有些曲线不一定是由单个解析式给出的,因此提出了一个新的定义,函数是“xy平面上随手画出来的曲线所表示的y与x的关系.”即把函数定义为由单个解析式表达出的连续函数,也包括由若干个解析式表达出的不连续函数(不连续函数的名称是由欧拉提出的).

函数概念的第三次扩张,朴素地反映了函数中的辩证因素,体现了“自变”到“因变”的生动过程.形成了“科学函数定义的雏形”.1775年,欧拉在《微分学》一书中,给出了函数的另一定义:“如果某些变量,以这样一种方式依赖于另一些变量,即当后者变化时,前者也随之变化,则称前面的变量为后面变量的函数.”值得指出的是,这里的“依赖”、“随之变化”等等的含义仍不十分确切.这个定义限制了概念的外延,它只能算函数概念的科学雏形.在这次函数概念的扩张中,19世纪最杰出的法国数学家柯西在1821年所著的《解析教程》中,给出了如下函数定义:“在某些变量间存在着一定的关系,当一经给定其中某一变量的值,其他变量的值也随之确定,则将最初的变量称为自变量,其他各个变量称为函数.”这个定义把函数概念与曲线、连续、解析式等纠缠不清的关系给予了澄清,也避免了数学意义欠严格的“变化”一词.函数是用一个式子或多个式子表示,甚至是否通过式子表示都无关紧要.

函数概念的第四次扩张,可称为“科学函数定义”进入精确化阶段.德国数学家狄利克雷于1837年给出了函数定义:“若对$x(a\leqslant x\leqslant b)$的每一个值,$y$总有完全确定的值与之对应,不管建立起这种对应的法则的方式如何,都称y是x的函数.”这一定义彻底地抛弃了前面一些定义中解析式的束缚,强调和突出函数概念的本质,即对应思想,使之具有更加丰富的内涵.因而,此定义才真正可以称得上是函数的科学定义,为理论研究和实际应用提供了方便.狄利克雷还给出了著名的函数(人们称为狄利克雷函数),