高等学校教材

高等数学

（一元微积分）

郝志峰　谢国瑞　汪国强　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是一部适用于大学非数学类本科各专业(主要是工科及经济、管理类专业)的高等数学课程教材，全书分两册出版，本册为一元微积分部分，主要由函数、极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、积分、定积分应用、微分方程、无穷级数等8章组成，另有两个附录及练习与习题答案。涉及内容的深、广度符合工学、经济各专业对相应课程内容的教学要求，也能达到全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲的相应要求。

本书的编写比较注重教学法，融入了编者们长期执教这一课程的经验，以及对时代发展与高等教育大众化进程对高等数学课程提出新挑战的认识，因而对内容的展开、描述比较注意激发学生的学习兴趣，力求符合多数学生的认识规律。全书注重基本概念、基本理论、基本运算，处理这些内容时均有一定特色，适宜作为课程教材或参考用书。

本书适用于普通高等学校非数学类的理工科及其他专业学生选用，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．一元微积分/郝志峰，谢国瑞，汪国强主编．—北京：高等教育出版社，2005.5

ISBN 7-04-016559-7

Ⅰ.高…　Ⅱ.①郝…②谢…③汪…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 031676 号

策划编辑 李艳馥　**责任编辑** 丁鹤龄　**封面设计** 张　楠
责任绘图 朱　静　**版式设计** 张　岚　**责任校对** 俞声佳
责任印制 孔　源

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京铭成印刷有限公司		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2005年5月第1版
印　　张	32	印　　次	2005年5月第1次印刷
字　　数	600 000	定　　价	33.10元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　16559-00

前　言

编写本书的目的是为大学非数学类本科专业(主要是工科及经济、管理类专业)的高等数学课程提供一本合适的教材，全书分两册出版，分别以“一元微积分”及“多元微积分”为副标题。

本书包括了传统高等数学课程的全部教学内容，一元微积分部分主要包括函数、极限、连续及一元函数的微积分、常微分方程及无穷级数等；多元微积分部分主要包括多元函数微分学、二重积分及曲面积分(第一型)、平面曲线积分、多重积分、第二型曲面积分及傅里叶级数等。涉及的深度大体与这些专业的高等数学课程的教学要求保持一致，并能达到全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲中相应部分的要求，一元微积分部分的附录1就是为此而设。

在本书中融入了编者长期执教这一课程的教学经验，又结合编者们对时代发展及高教大众化进程对高等数学课程提出新挑战的认识，力求使内容展开符合多数学生的认识规律，有利于激起学生对这一课程的学习兴趣。全书强调对基本概念的理解，除保持微积分教材传统的演绎与几何直观并重的特征，尽可能多地采用几何直观的描述外，还借助基本概念对多个领域实际意义的解释，并重视采用普通语言给出描述，以这种种努力来强化对概念的理解与提高其亲和力。全书对基本理论的要求是适度的，对定理都要求注重理解意义及掌握定理内容本身，而不只是它的证明(有个别定理没有给出证明或只指出参考书目),这样往往就对许多推论的证明及定理的其他应用给予了更多的注意，而在阅读教材时，对大多数定理越过其证明的细节，应该是无损于掌握内容的连贯性的。微积分是个伟大的思想宝库，从不同的层次或角度用心地去发掘都能得到大的收获。鉴于本书设定的读者，学习微积分主要是为更好地进入科学(包括社会科学、经济管理科学等)或工程在知识及能力两个层面上作准备的，书中在展开内容的同时穿插介绍了微积分是怎样分析和解决实际问题的，透视一些数字计算、几何量的计量及无穷级数求和等“常量问题”是怎样由认识其作为变量在某一时刻的值，并通过处理“变量数学”的微积分方法解决这些问题的。在基本运算方面，本教材中注意了导数与微分计算的互动(利用微分的运算法则、一级微分形式不变性等,从微分计算的途径求出导数及从全微分求出多个一阶偏导数)，微分与积分的互逆并注重将对基本概念、基本理论的理解融入提高运算技能之中(如数项级数的求和、曲线、曲面积分的计算、重积分之化归逐次积分等)。

例题和习题是教材的重要组成部分，本书的例题量多面广，在一些例题中给出的描述性分析过程及一例多解，目的是想对读者多作一些引导。演算一定数量的习题是学好高等数学的必由之路。为此，本书以两种不同的方式安排了相当数量的练习与习题供学生选用。每节后的练习题是每个学生都应独立完成的，而各章末的习题则可根据各自的具体情况或在教师指导下演算其中的部分或全部。

“大学教书不是照本宣讲”，按这种认识，更为了有利于学生在今后的自学扩展知识面，提高综合运用知识的能力，本书也包括了少量可教可不教的内容。如某些关于应用课题与个别应用数学概念的讨论及少数习题等(特别是那些带有 * 号的部分内容、节、段、定理或示例)。对于这些“不属”教学要求范围之内的题材，老师们在教学中可灵活掌握，或用作专题讲座的素材，也可指导学有余力的学生自学，等等。

为便于读者学习本书，我们同时出了配套的“高等数学学习指导”光盘(李大红负责)。内容包括课程学习、应用实例、有关的数学史及著名数学家拾零三部分。其主要内容是课程学习部分，系分章写出，每章均含有对内容要点、例题选讲、习题选解三个方面给出指导，与教材的主要教学内容配套。另外，也选编了一些在学习高等数学课程过程中，学生可能遇到的疑难问题的解析，并汇集了一些常用公式，以备查考。在学习本书的各阶段(预习、学习、复习)中，这些材料应能发挥一定的辅导作用。

最后，我们要对高等教育出版社的领导特别是理工分社的领导、数学策划部的领导以及有关专家给我们以编写此精品教材的荣誉和信任表示由衷的感谢。我们也要对华南理工大学、上海工商外国语学院、广东工业大学等许多高校的领导及老师们对编写本教材给予的大力支持表示感谢。参加本书编写工作的有郝志峰、谢国瑞、汪国强、李大红、孙薇荣、邵晓华、刘建强、陈士屏、陆履亨、冯家裕等，刘丽萍、王刚、乔琼等也协助做了不少工作。整个教材建设项目由郝志峰等三人全面负责规划、设计和组织实施，本书的文字稿最后由谢国瑞统稿、定稿。囿于编者们的水平和见闻，书中难免留存错、漏、欠妥之处，敬祈专家、读者批评指正。

编　者

2005 年元月

目　录

第 1 章　函数 ………………………………………………………… 1

1.1　函数概念 ………………………………………………………… 1

1.1.1 集合(1)　1.1.2 映射　函数(5)　1.1.3 函数的表示　分段函数(7)

练习 1 ~ 8 (12)

1.2　函数的几个特性 ………………………………………………… 13

1.2.1 有界性(13)　1.2.2 单调性(14)　1.2.3 奇偶性(14)　1.2.4 周期性(15)

练习 9 ~ 12 (16)

1.3　复合函数　反函数 ……………………………………………… 16

1.3.1 复合函数(16)　1.3.2 反函数(19)

练习 13 ~ 18 (21)

1.4　初等函数 ………………………………………………………… 21

1.4.1 基本初等函数(21)　1.4.2 初等函数概念(24)　1.4.3 双曲函数与反双曲函数(25)

练习 19 ~ 20 (26)

1.5　改变量 …………………………………………………………… 26

1.5.1 概念与记号(26)　1.5.2 常量与变量(29)

练习 21 ~ 23 (30)

1.6　建立函数关系的例 ……………………………………………… 31

1.6.1 举例(31)　1.6.2 经济中的几个常用函数(33)

练习 24 ~ 25 (34)

习题 1 ……………………………………………………………… 34

第 2 章　极限 ………………………………………………………… 38

2.1　数列极限 ………………………………………………………… 38

2.1.1 数列　子数列(38)　2.1.2 数列极限的概念(40)　2.1.3 收敛数列(42)　2.1.4 极限运算法则(45)

练习 1 ~ 8 (50)

2.2　函数极限 ………………………………………………………… 51

2.2.1 函数极限概念(51)　2.2.2 无穷小　无穷大(61)　2.2.3 函数极限的性质

两个重要极限(64) 2.2.4 无穷小的比较 符号“o”、“~”、“O”(73)
练习 9~24 (77)
2.3 连续函数 …… 79
2.3.1 函数的连续性(79) 2.3.2 函数的间断点(83) 2.3.3 闭区间上连续函数的性质(86)
练习 25~32 (90)
习题 2 …… 90
第 3 章 导数与微分 …… 93
3.1 导数的概念 …… 93
3.1.1 两个等价问题(93) 3.1.2 可微函数(96) *3.1.3 导数的意义(100)
练习 1~7 (105)
3.2 微分法 …… 106
3.2.1 四则运算法则(106) 3.2.2 链式法则 对数微分法(108) 3.2.3 隐函数微分法(113) 3.2.4 反函数微分法(115) 3.2.5 由参数方程表示函数的微分法(117) 3.2.6 微分法小结(120)
练习 8~18 (121)
3.3 高阶导数 …… 123
3.3.1 二阶导数(123) 3.3.2 高于二阶的高阶导数(126)
练习 19~22 (127)
3.4 微分 …… 128
3.4.1 线性主部 线性近似(128) 3.4.2 微分 微分形式不变性(131)
练习 23~31 (135)
习题 3 …… 136
第 4 章 微分中值定理与导数的应用 …… 140
4.1 中值定理 …… 140
4.1.1 极值点的必要条件(140) 4.1.2 中值定理(143)
练习 1~14 (148)
4.2 泰勒公式 …… 150
4.2.1 泰勒多项式(150) 4.2.2 泰勒公式(152)
练习 15~24 (158)
4.3 利用导数研究函数 …… 159
4.3.1 函数为常数的条件(159) 4.3.2 单调性(161) 4.3.3 局部极小和极大(163) 4.3.4 凸性(169) 4.3.5 洛必达法则(173) 4.3.6 函数图形的描绘(185)
练习 25~55 (191)

4.4 微分学应用的另一些例 …… 194

4.4.1 最大值、最小值问题(194) 4.4.2 变化率问题(201) 4.4.3 列微分方程(205) *4.4.4 近似计算(209) 4.4.5 平面曲线的曲率(214)

练习 56 ~ 88 (219)

习题 4 …… 222

第 5 章 积分 …… 227

5.1 定积分概念 …… 227

5.1.1 两个等价问题(227) 5.1.2 定积分概念(229) 5.1.3 基本性质 几何意义(231)

练习 1 ~ 17 (235)

5.2 微积分基本定理 …… 237

5.2.1 变上限定积分(237) 5.2.2 原函数 不定积分(243) 5.2.3 牛顿-莱布尼茨公式(248)

练习 18 ~ 39 (251)

5.3 基本积分法 …… 253

5.3.1 凑微分法(253) 5.3.2 换元积分法(262) 5.3.3 分部积分法(265) 5.3.4 几类特定函数的积分法(269)

练习 40 ~ 53 (277)

5.4 定积分计算法 …… 280

5.4.1 定积分的基本积分法(280) *5.4.2 定积分的近似计算法(287)

练习 54 ~ 64 (295)

5.5 反常积分 …… 297

5.5.1 无穷区间上的反常积分(297) 5.5.2 无界函数的反常积分(300)

练习 65 ~ 69 (302)

习题 5 …… 303

第 6 章 定积分应用 …… 310

6.1 几何应用 …… 310

6.1.1 平面图形的面积(310) 6.1.2 平面曲线的弧长(316) 6.1.3 体积(318) 6.1.4 旋转体的侧面积(324)

练习 1 ~ 14 (326)

6.2 物理应用 …… 326

6.2.1 功(326) 6.2.2 侧压力(330) *6.2.3 一阶矩 重心(331) *6.2.4 动能 转动惯量(333)

练习 15 ~ 30 (335)

6.3 其他应用 …… 337

6.3.1 函数平均值的概念(337) 6.3.2 均方根(339) 6.3.3 在经济中的应用(340)

练习 31 ~ 39 (343)

习题 6 …… 344

第 7 章 微分方程 …… 346

7.1 基本概念 …… 346

7.1.1 定义(346) 7.1.2 建立微分方程举例(348)

练习 1 ~ 9 (350)

7.2 一阶方程 …… 351

7.2.1 可分离变量的方程(351) 7.2.2 线性方程(354) 7.2.3 齐次型方程 伯努利方程(359)

练习 10 ~ 22 (361)

7.3 可降阶的高阶方程 …… 363

7.3.1 形如 $y^{(n)}=f(x)$的方程(363) 7.3.2 不显含因变量的方程(363)
7.3.3 不显含自变量的方程(365)

练习 23 ~ 27 (367)

7.4 线性微分方程 …… 368

7.4.1 二阶线性方程及其解的结构(368) 7.4.2 二阶线性常系数方程(372)
7.4.3 欧拉方程及高于二阶的方程(380)

练习 28 ~ 42 (385)

*7.5 微分方程近似解法简介 …… 387

7.5.1 数值解：龙格-库塔型解法(387) 7.5.2 近似解析解：迭代法(390)

练习 43 ~ 45 (392)

*7.6 几个实例 …… 393

7.6.1 中间贮槽的容积(393) 7.6.2 间壁式换热器的温差方程(394)
7.6.3 放射性废物的处理(396) 7.6.4 弹性横梁的振动(397) 7.6.5 桥墩形状问题(399)

习题 7 …… 400

第 8 章 无穷级数 …… 402

8.1 数项级数 …… 402

8.1.1 无穷级数(402) 8.1.2 正项级数(407) 8.1.3 绝对收敛级数(414)
8.1.4 交错级数(417) 8.1.5 数项级数小结(421)

练习 1 ~ 22 (424)

8.2 幂级数 …… 428

8.2.1 引言(428) 8.2.2 收敛半径(430) 8.2.3 微分、积分、连续性(434)

练习 23 ~ 35 (438)
8.3 幂级数(续)：函数的幂级数展开与应用 …………………………… 440
8.3.1 泰勒级数(440) 8.3.2 数项级数的求和(446) 8.3.3 其他应用(448)
练习 36 ~ 46 (452)
习题 8 ……………………………………………………………………… 454
练习与习题答案……………………………………………………… 456
附录 1 差分、差分方程 ……………………………………………… 487
附录 2 二阶与三阶行列式 …………………………………………… 494
参考书目 ……………………………………………………………… 498

第1章 函 数

函数是微积分的研究对象，作为全书的简短引论，本章从复习函数的定义开始，讨论函数的表示法及函数记号的运用，描述函数在微积分中的一些有用性质，指出函数间一些能用来简化微积分讨论的关系(复合函数与反函数)，并且罗列基本初等函数的性质与图形.

1.1 函数概念

1.1.1 集合

1.1.1.1 变量 集合 区间

在研究实际问题、观察各种现象的过程中，如果关注事物的数量侧面，就会涉及各种各样的量. 如长度、面积等几何量；速度、温度等物理量以及人数、金额等等. 在过程中有些量的取值是可变的，也有一些则是保持恒定的. 例如，一架民航客机在离港起飞执行某一航班飞往某目的地的过程中，飞机在空中的飞行时间、距目的地的距离、飞机位置离地面的高度，以及机上所载燃料的重量等等都是在不断变化的，而机上所载旅客的人数、所接受托运的行李总重量则是保持恒定的. 我们将这些在考察过程中始终保持恒定值的量称为**常量**，而将能取不同数值的量称为**变量**. 由于在数学中常抽去常量或变量的具体意义，只从数值方面关注. 这样，今后处理的就分别是实常数或实变数，但仍分别称为常量或变量. 习惯上，常用字母 a，b，c，……表示常量，而用 x，y，……表示变量.

为描述一个变量，常需指出它的变化范围，这就要用到集合，特别是区间的概念. 故先复习一下有关集合与区间的概念.

一组对象的汇集或总体，称为**集合**或**集**.

例如，生长在某座山上的所有树木；在某块草地上放牧的所有鹅以及所有自然数等等都是集合.

常用大写英文字母 A，B，……来记集合，而称集 A 中的任一对象 x 为集合 A 的元素，记为 $x\in A$，而 y 不是 A 中的元素这一事实，可用 $y\notin A$ 或 $y\,\overline{\in}\,A$ 来表示.

例如，若用 $\mathbf{N}$ 表示全体非负整数的集合，而用 $\mathbf{N}_+$ 表示全体正整数的集

合，则 $3\in\mathbf{N}$，$5\in\mathbf{N}$，而 $0\notin\mathbf{N}_+$ 等等．

集合的常用表示法有两种：**列举法**和**描述法**．将集合中的所有元素一一列于一个大括号之内来表示集合的方法叫做**列举法**．如将由数 3，5 组成的集合表示为

$$A=\{3,5\}.$$

对于一个给定的集合，元素的排列次序是无关的，而且集合中元素是互异的，也就是说同一个对象，只能称作集合的一个**元素**．即，集合

$$\{3,5,3\};\ \{5,3\}$$

都表示上述集合 A．

把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法叫做**描述法**．一般可写成

$$\{x\mid P\},\tag{1-1}$$

这里 x 是元素的一般形式，而 P 表示集合中的每个 x 都具有的属性．

例 1 集合 $B=\{x\mid x^2-8x+15=0\}$ 表示满足方程 $x^2-8x+15=0$ 的数 x 的集合，而 $D=\{(x,y)\mid x-y=0\}$ 表示平面直角坐标系中第Ⅰ、Ⅲ象限角平分线上全体点(的坐标)所成的集合．

如果根本不存在具有性质 P 的元素，那么形如式(1－1)的集合就称为**空集合**，记为$\varnothing$．称至少有一个元素的那种集合为**非空集合**．引进空集的概念在逻辑上会带来一些便利．

今后常要用到的几个数集是实数集 $\mathbf{R}$，有理数集 $\mathbf{Q}$，整数集 $\mathbf{Z}$，自然数集即非负整数集 $\mathbf{N}$，正整数集 $\mathbf{N}_+$ 及非零实数集 $\mathbf{R}_+$ 等，它们可分别记为

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\},$$

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\},$$

$$\mathbf{Q}=\{x\mid x\text{ 是有理数}\},$$

$$\mathbf{R}=\{x\mid x\text{ 是实数}\},$$

以及

$$\mathbf{R}_+=\{x\mid x\in\mathbf{R},\text{且 }x\neq0\},$$

$$\mathbf{N}_+=\{1,2,3,\cdots\}.$$

由于实数和数轴上的点可建立一一对应关系，故今后常把实数称为(实轴上的)**点**，有时也反过来称点为**数**．这样，可把实数集 $\mathbf{R}$ 称作数直线 R，等等．

区间(interval)是一种特殊的实数集．当 $a<b$ 时，我们把满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的数 x 的集合称为**闭区间**，记作$[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

点 a 和 b 被分别称为该区间的**左端点**及**右端点**，而集合中其他点 x 称为区间的**内点**，闭区间是数轴上包括两个端点在内的线段(图 1－1(a))．我们又称满

足不等式$a<x<b$的数x的集合为**开区间**，记作(a,b)，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

端点a和b都不包括在开区间内，所以开区间内的任一点皆为内点(图1-1(b)). 类似的还可以有左闭右开区间$[a,b)$或左开右闭区间$(a,b]$:

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},$$

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

除了以上这些有限区间外，我们还会遇到无穷区间：$(-\infty,+\infty)$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,b)$，$[a,+\infty)$，$(a,+\infty)$. 其中$(-\infty,+\infty)$就是$\mathbf{R}$.

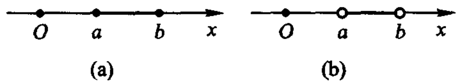


图 1-1

将包含点x_0在内的任一开区间(a,b)，称为点x_0的**邻域**(Neighborhood)，记为$N(x_0)$，特别称开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$为点$x_0$的**$\delta$邻域**，记为$N(x_0,\delta)$，这是邻域的对称表示，称$x_0$为此邻域的**中心**，而称正数$\delta$为其**半径**(见图1-2(a)). 今后我们常要用到x_0点的**去心δ邻域**，即从邻域$N(x_0,\delta)$中去掉中心x_0点后所得到的集合，记为$\mathring{N}(x_0,\delta)$，即

$$\mathring{N}(x_0,\delta)\xlongequal{\text{def}}\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

它在数轴上的表示见图1-2(b). 今后还以$\mathring{N}(x_0)$记从$N(x_0)$中去掉点x_0的集合.

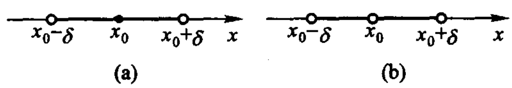


图 1-2

1.1.1.2 集合运算

子集 对于两个给定的集合A和B，若A的任何一个元素x，都有$x\in B$，则称集合A是集合B的**子集**(图1-3(a))，记作

$$A\subset B \quad 或 \quad B\supset A,$$

读作"A含于B"或"B包含A". 例如实数集$\mathbf{R}$，有理数集$\mathbf{Q}$以及自然数集$\mathbf{N}$之间有如下包含关系

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}.$$

两集合相等 对于两个集合A与B，如果$A\subset B$与$B\subset A$同时成立，就称

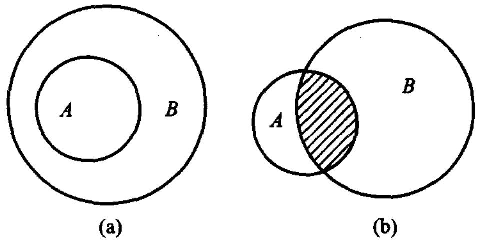


图 1－3

集合 A 与 B **相等**，记作 $A=B$. 例如，集合

$$A=\{3,5\},\ B=\{x \mid x^2-8x+15=0\}$$

是相等的，因为 A 的元素 3 和 5，都是方程 $x^2-8x+15=0$ 的解，即都是 B 的元素，从而有 $A\subset B$；另一方面，B 的元素，即方程 $x^2-8x+15=0$ 的解只有 3、5 两个，它们都是 A 的元素，从而有 $B\subset A$，由此可知 $A=B$.

两集合的交 对于两个给定的集合 A 和 B，由同时属于这两个集合的元素组成的集合，叫作集合 A 和 B 的**交**(或**积**)**集**，记作 $A\cap B$ 或 AB，即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A, \text{且 } x\in B\}.$$

例 2 $[0,2]\cap[1,3]=[1,2]$；$\{1,2,3,4\}\cap\{2,4,6,8\}=\{2,4\}$.

图 1－3 (b)中的阴影部分，表示集合 A 与 B 的交集 $A\cap B$. 由定义可知

$$A\cap B=B\cap A,\ A\cap A=A,\ A\cap\varnothing=\varnothing.$$

两集合的并 对于两个给定的集合 A 和 B，由这两个集合的所有元素组成的集合，叫作集合 A 和 B 的**并**(或**和**)**集**，记作 $A\cup B$ 或 $A+B$，即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

例 3 $[0,2]+[1,3]=[0,3]$，$\{1,2,3,4\}\cup\{2,4,6,8\}=\{1,2,3,4,6,8\}$，

$\mathbf{R}_+=(-\infty,0)+(0,+\infty)$.

图 1－4 (a)中的阴影部分，表示集 A 与 B 的并集 $A\cup B$. 由定义可知

$$A\cup B=B\cup A,\ A\cup A=A,\ A\cup\varnothing=A.$$

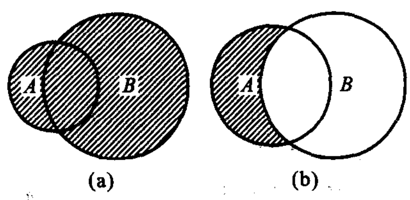


图 1－4

例 4 $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}(k,k+1]=(0,1]\cup(1,2]\cup(2,3]\cup\cdots\cup(k,k+1]\cup\cdots=(0,+\infty)$.

两集合的差 对于两个给定的集合 A 和 B，由属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**差集**，记作 $A-B$，即

$$A-B=\{x \mid x\in A, \text{且 } x\notin B\}.$$

图 1－4 (b)中的阴影部分，表示集 A 与 B 的差集 $A-B$.

例 5 $[0,2]-[1,3]=[0,1)$，$\{1,2,3,4\}-\{2,4,6,8\}=\{1,3\}$，

$N(x_0)-\{x_0\}=\mathring{N}(x_0)$，

1.1.2 映射 函数

定义 1 设 A 和 B 是两个非空集合，如果按照某种规则 f，使对于集合 A 中的任一元素 a，可在 B 中确定唯一的元素 b 与它对应，就称 f 是从 A 到 B 的**映射**，记为

$$f:A\to B \quad 或 \quad f:a\mapsto b;\ b=f(a),a\in A.$$

元素 b 称为元素 a 在映射 f 下的**像**，记为 $b=f(a)$. 对于元素 $b\in B$，称

$$\{x\mid f(x)=b,\ x\in A\}$$

中的 x 为元素 $b\in B$ 在映射 f 下的**原像**.

若在上述定义 1 中，A 是个实数的集合 E，而 B 为实数集 $\mathbf{R}$，那么映射 f 就是(一元)[1]函数，即有

定义 2 设 E 是一个实数的集合，若根据某个确定的规则 f，使对于 E 中的每一个数 x，都有(唯一)确定的实数 y 与之对应，就说在 E 上给定了一个**(单值)函数**(function)，记作

$$f:E\to\mathbf{R} \quad 或 \quad f:x\mapsto y,\ x\in E.$$

今后，更常记作 $\qquad y=f(x)$，$(x\in E)$

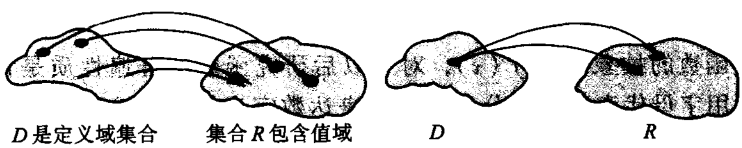
称集合 E 为函数 $f(x)$ 的**定义域**(domain)，通常记为 $D(f)$. 称集合

$$E_1=\{y\mid y=f(x),\ x\in E\}$$

为函数 $f(x)$ 的**值域**(range)，常记为 $R(f)$. 有时也将定义域是 D 的函数 f 的**值域** R 简记成

$$R=f(D).$$

对照以上定义，可以发现图 1－5 (a)给出的从集合 D 到 R 的对应规则是个映射(函数)，而图 1－5 (b)所示的对应规则不是映射(函数).



(a) (b)

图 1－5

① 在行文中写在括号内的文字表示可以略去或不读.

微积分是关于运动和变化的数学，探究运动和变化着量之间的关系，所用的数学就会有微积分. 这样，在微积分中，较为自然地是用变量语言来描述函数概念，故也可将函数定义写成：

定义 2′ 设 x 和 y 是同一变化过程中的两个变量，如果对于变量 x 取其变化范围 D 内任一个值时，按某种规则 f，变量 y 总有唯一确定的值与之对应，便称 y 是 x 的**函数**，记作

$$y=f(x),$$

并称 x 为**自变量**，y 为**因变量**，表示对应规则的 f 是函数的记号，而 D 是函数的定义域.

当 $x_0\in D$ 时，称 $y=f(x)$在 x_0 处有定义.

由函数定义可知，定义域与对应规则是函数概念的两大要素，而**值域**是由定义域 D 及对应规则f所确定的

$$R(f)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

有
$$R(f)\subset \mathbf{R}.$$

两个函数 f 和 g，如果它们有相同的定义域及相同的对应规则，即对于定义域 D 内每一个 x 有相同的函数值 y，则这两个函数是同一个函数(此时,这两个函数的值域也一定相同).

对于用算式表示的函数，除非另作说明，今后总认定其定义域是使算式有意义的范围，称为函数的**自然定义域**.

例 6 对给定的三个函数：

(1) $y=\lg x^2$， (2) $y=2\lg|x|$， (3) $y=2\lg x$.

可以看出，函数(1)和(2)的定义域均为 $\mathbf{R}_+$，即$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而函数(3)的定义域是$(0,+\infty)$.

又由于对每一 $x\neq0$，$\lg x^2=2\lg|x|$成立. 故知(1)和(2)表示的是同一个函数，而(3)则是不同于(1)、(2)的另一函数.

在进一步讨论之前，对函数记号作些必要的说明. 通常，单个字母 f 被用来表示由 $x\in D$ 确定数 y 的对应规则，而符号 $f(x)$则表示根据该规则，对应于 $x\in D$ 的数 y. 但本书一般不对这两者作严格的区分.

引进函数的抽象记号 $f(x)$，对于以后研究函数的普遍性质是很有必要的. 这同用字母代表数能充分地研究并表达数字运算的普遍规律的情形是类似的.

在讨论函数的普遍性问题时，$f(x)$可泛指任何合乎条件的函数，但在具体问题中，它就代表了某个确定的函数. 例如，设 $y=f(x)$，其中

$$f(x)=x^3-2x^2+3x-1.$$

这里 $f(x)$就是一个确定的函数，它具体给出了由 x 的值确定对应值 y 的方法.

这里 $f(\quad)$表示了对括号中的数应作$(\quad)^3-2(\quad)^2+3(\quad)-1$这样一些运算. 因此当 $x=2$ 时，就有

$$\begin{aligned}f(2)&=(2)^3-2(2)^2+3(2)-1\\&=8-8+6-1=5.\end{aligned}$$

同样，对于任一常数 x_0，有

$$f(x_0)=(x_0)^3-2(x_0)^2+3(x_0)-1\ .$$

这里 $f(2)$和 $f(x_0)$分别表示函数 $y=f(x)$在 $x=2$ 和 $x=x_0$ 处的函数值. 有时也表示为 $y|_{x=2}$和 $y|_{x=x_0}$(或 $y|_{x_0}$)等.

例 7 已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(-x)$，$f(1-x)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

解 按表达式知，函数定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，而对应规则为

$$f(\quad)=\frac{1-(\quad)}{1+(\quad)},$$

故有，当 $-x\neq-1$ 即 $x\neq1$ 时，

$$f(-x)=\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\frac{1+x}{1-x},$$

当 $1-x\neq-1$ 即 $x\neq2$ 时，

$$f(1-x)=\frac{1-(1-x)}{1+(1-x)}=\frac{x}{2-x},$$

当$\dfrac{1}{x}\neq-1$ 及 $x\neq0$ 即 $x\neq-1$ 及 $x\neq0$ 时，

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)}=\frac{x-1}{x+1}.$$

在函数定义中，也可用其他字母代表对应规则，而把函数记作

$$y=g(x),\ y=\varphi(x),\ y=y(x),\ \cdots$$

或用同一字母时以下标区别不同的函数，如

$$y=f_1(x),\ y=f_2(x),\ \cdots.$$

1.1.3 函数的表示　分段函数

1.1.3.1 函数表示法

为了研究函数，首先必须采用适当的形式把函数表示出来，即把自变量和因变量之间的对应关系表示出来. 表示函数的方法常见的是下列三种：

(1) 图形表示法. 即用坐标平面上的曲线来表示函数，一般自变量用横坐标表示，因变量用纵坐标表示. 自变量 x 和因变量 y 的每一对值，对应于坐标平面上的一个点(x,y)，这些点的全体通常会形成一条曲线.

例如图 1-6 中的曲线，就表示了一个函数 $y=f(x)$. 这时直线 $x=a$，与曲线 $y=f(x)$交点 P 的纵坐标 b 就是函数值$f(a)$，即 $b=f(a)$.

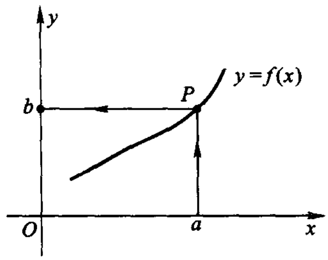


图 1-6

有一些函数是自然地由图形形式给出的. 例如图 1-7 的心电图(EKG)是把一个显示电流变动的变数表成时间的函数. 在这两个图形表示的函数中，显示了两位被检查者的心率模式：一位正常，另一位不正常. 虽然可以构造出心电图函数的近似公式，但很少这样做. 因为医生从这些图形法给出的函数能容易地得到所需要的信息. 这比从公式去看是否出现这些重复图形要容易得多.

(2) 列表表示法. 即把一系列自变量值与其对应的因变量值，列成表格形式来表示函数，如平方根表、对数表、三角函数表等，它们就是最常见的列表表示的函数. 科学实验中记录的实验数据就是以这种方法来表示函数关系的.

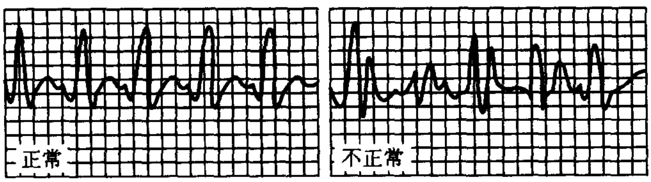


图 1-7　心电图

(3) 解析表示法. 即用具体的数学运算式(公式)表达自变量与因变量之间的关系.

在微积分中讨论的函数，大都是由公式的形式给定，但为了帮助直观地理解讨论的概念及结果，常要借助图形来说明. 这样，对于公式给出的函数，常要在坐标平面作出其图形，而对坐标平面上可以看成是某个函数图形(平行于纵轴的直线与曲线至多只有一个交点)的曲线，也常要能从其几何特征看出函数的对应特性. 正确地使用函数的图形，能有效地帮助理解微积分的概念；反过来，在掌握了微积分的概念和方法之后，也将有助于画出函数图形的本质面貌. 所以，在对给定函数 $y=f(x)$讨论有关问题时，常要综合运用这几种表示法，特别是函数图形表示法能直观地显示出函数值随自变量的变化而变化的性状特点，从而对处理问题常会有很大的帮助.

1.1.3.2 分段函数

在实践中，有时需要在定义域的不同范围用不同的运算式来描述一个函数关系.