★ 奥林匹克系列丛书

数学奥林匹克

SHUXUE OLYMPIC COMPETITION

初中二年级

吉林教育出版社

奥林匹克系列丛书

数学奥林匹克

（初中三年级）

吉林教育出版社

丛书主编 阚秀敏 张劲松

主　　编 钱万增 杨晓民

副 主 编 宋万华

数学奥林匹克（初中二年级）　　钱万增　杨晓民　主编

责任编辑：王世斌　　封面设计：王康

出版：吉林教育出版社　880×1230 毫米　32 开本　10.375 印张　292000 字

发行：吉林教育出版社　2000 年 10 月第 1 版　2001 年 2 月第 3 次印刷

印数：20001－33000 册　定价：11.00 元

印刷：长春市东方印刷厂　ISBN 7－5383－4173－o/G·3794

奥林匹克

前言

为了扩大广大学生的知识面，增加知识储备，激发学生学习的兴趣，有效地培养科学的思维方法和综合解题能力，我们编写组的全体成员经过艰苦工作，历时一年多的时间在“春绣人间千里绿肥红壮艳，歌传广宇万家书灿墨浓香”的氛围中和广大的热心读者见面了。

本丛书旨在开启学生的心扉，震撼学生的心灵，挖掘深层信息，架设由已知、经可知、达未知的桥梁，运用发散思维“进行思维与灵魂的对话”，使学生真正体味“纸上得来终觉浅，心中悟出方知深”的真谛。

致天下之治者在人才，成天下之才者在教化。奥林匹克丛书是一种把过去和现在联系起来的多媒体。本丛书在如林的教辅材料中，博采众家之长，自成完整的知识体系。是望子成龙、望女成凤的家长的理想选择。是莘莘学子的好帮手。“诗也，书也，文也，无非心其得也，知之，好之，牙之，当从学而习之”。

寸有所长，尺有所短，由于我们水平有限，书中不足之处在所难免，敬请各位不吝赐教。

奥林匹克

目录

代数部分

第一章　因式分解……………………………………(1)
第一讲　因式分解的常用方法……………………………(1)
第二讲　换元法……………………………………(28)
第三讲　配方与拆添项法……………………………(38)
第四讲　综合除法和因式定理…………………………(49)
第五讲　待定系数法…………………………………(55)
第六讲　对称多项式的因式分解………………………(61)
第二章　分式……………………………………(69)
第一讲　分式的概念…………………………………(69)
第二讲　分式运算中的若干技巧………………………(73)
第三章　根式……………………………………(93)
第一讲　一般二次根式………………………………(93)
第二讲　二次根式的大小比较…………………………(114)
第三讲　有关共轭根式的化简求值问题…………………(120)
第四讲　复合二次根式的化简…………………………(129)
第五讲　二次根式的整数部分与小数部分………………(139)
第六讲　根式综合题…………………………………(145)
第四章　代数式的恒等变形…………………………(153)
第一讲　关于无条件等式的证明………………………(153)
第二讲　关系条件等式的证明…………………………(166)
第三讲　求式子的值…………………………………(191)

几何部分

第一章 三角形……（207）

第一讲 三角形的基本知识……（207）

第二讲 三角形的全等及其应用……（212）

第三讲 等腰三角形……（224）

第四讲 直角三角形……（234）

第二章 四边形……（243）

第一讲 平行四边形……（243）

第二讲 梯 形……（254）

第三章 三角形和梯形中位线……（262）

第四章 平行线分线段成比例……（274）

第五章 相似三角形……（286）

第六章 面积问题与面积方法……（299）

第七章 图形的折叠……（308）

第八章 几何变换……（315）

代数部分

奥林匹克

第一章 因式分解

第一讲　因式分解的常用方法

▲知识要点

因式分解是中学数学中最重要的一种恒等变形，是解决许多数学问题的有力工具．在代数、几何、三角等的解题与证明中起着重要作用．同时，因式分解的方法灵活多变，技巧性强，因此，对培养学生的解题能力，提高数学水平十分有益．本讲我们将对教材讲过的因式分解方法进行加深拓宽．同时还要补充换元法、拆项法、添项法、待定系数法、双十字相乘法、轮换对称式法和用综合除法分解因式等方法．

▲典型例题解析

(一)提取公因式法

提取公因式法是进行因式分解时，首先要考虑的方法．

提取公因式法的基本思维方式是“求同”，为了“求同”，常要对给定的多项式进行适当的恒等变形，创造提取公因式的条件．

例 1　分解因式：$-\frac{1}{3}x^{2n+2}+\frac{1}{27}x^{2n}-\frac{2}{9}x^{2n+1}$

➡**解**：原式 $=-\frac{1}{3}x^{2n}[x^2-\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2]$

$=-\frac{1}{3}x^{2n}(x-\frac{1}{3})^2$

➡**解题剖析**:原式也可以提取公因式 $-\frac{1}{27}x^{2n}$,这时每个因式的系数都可化为整数,所得结果是 $-\frac{1}{27}x^{2n}(3x-1)^2$

例 2 分解因式:$x(a-b)^{2n}+y(b-a)^{2n+1}$

➡**解**:
$$\begin{aligned}原式&=x(b-a)^{2n}+y(b-a)^{2n+1}\\&=(b-a)^{2n}[x+(b-a)y]\\&=(b-a)^{2n}(x-ay+by)\end{aligned}$$

➡**解题剖析**:关键是:
$$(b-a)^{2n}=(a-b)^{2n}$$
$$(b-a)^{2n+1}=-(a-b)^{2n+1}$$

例 3 分解因式 $(ax+by)^2+(ay-bx)^2+c^2y^2+c^2y^2$

➡**解题剖析**:将原式前两个二项式平方展开后,它们的中间项可以互相抵消,原式将变形为关于 x^2、y^2 的齐次式,即可提取公因式.

➡**解**:
$$\begin{aligned}原式&=a^2x^2+2abcxy+b^2y^2+a^2y^2-2abcxy+b^2x^2+c^2x^2+c^2y^2\\&=a^2x^2+b^2x^2+c^2x^2+a^2y^2+b^2y^2+c^2y^2\\&=(a^2+b^2+c^2)x^2+(a^2+b^2+c^2)y^2\\&=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2)\end{aligned}$$

(二)应用公式法

常用的公式有:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b) \tag{1}$$
$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2) \tag{2}$$
$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2 \tag{3}$$
$$a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3 \tag{4}$$
$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2 \tag{5}$$
$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \tag{6}$$

当 n 为正奇数时,

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1}) \tag{7}$$

当 n 为正整数时,

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \qquad (8)$$

当 n 为正偶数时,

$$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + ab^{n-2} - b^{n-1}) \qquad (9)$$

➡**注:**公式 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

证明如下:$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$$=(a^2+b^2+2ab)+(2ac+2bc)+c^2$$
$$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=(a+b+c)^2$$

公式 $a^3+b^3+c^3-3abc$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

证明如下:

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc$$
$$=[(a+b)^3+c^3]-(3a^2b+3ab^2+3abc)$$
$$=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]-3ab(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab]$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

在特殊情况下,当 $a+b+c=0$ 时,有

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0,\text{即 } a^3+b^3+c^3=3abc \qquad (10)$$

这就是说:当三个整式的和为零时,这三个整式的立方和等于这三个整式乘积的三倍.

这是一个重要公式.

例 1 分解因式:$(c^2-b^2+d^2-a^2)^2-4(ab-cd)^2$

➡**解:**原式 $=[(c^2-b^2+d^2-a^2)+2(ab-cd)]\cdot[(c^2-b^2+d^2-a^2)-2(ab-cd)]$

$$=[(c^2-2cd+d^2)-(a^2-2ab+b^2)][(c^2+2cd+d^2)-(a^2+2ab+b^2)]$$
$$=[(c+d)^2-(a-b)^2][(c+d)^2-(a+b)^2]$$
$$=(c-d+a-b)(c-d-a+b)(c+d+a+b)(c+d-a-b)$$

例 2 分解因式:$a^4+a^3+2\frac{1}{4}a^2+a+1-b^2$

➡**解**:原式$=a^2[(a^2+2+\frac{1}{a^2})+(a+\frac{1}{a})+\frac{1}{4}]-b^2$

$=a^2[(a+\frac{1}{a})^2+(a+\frac{1}{a})+\frac{1}{4}]-b^2$

$=a^2(a+\frac{1}{a}+\frac{1}{2})^2-b^2$

$=(a^2+\frac{1}{2}a+1)^2-b^2$

$=(a^2+\frac{1}{2}a+1+b)(a^2+\frac{1}{2}a+1-b)$

例 3 分解因式 $x^{2n}+x^n-\frac{1}{9}y^2+\frac{1}{4}$

➡**解**:原式$=(x^{2n}+x^n+\frac{1}{4})-(\frac{1}{3}y)^2$

$=(x^n+\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{3}y)^2$

$=(x^n+\frac{1}{3}y+\frac{1}{2})(x^n-\frac{1}{3}y+\frac{1}{2})$

例 4 分解因式:$6x-6y-9x^2+18xy-9y^2-1$

➡**解法 1**:原式$=6(x-y)-9(x^2-2xy+y^2)-1$

$=6(x-y)-9(x-y)^2-1$

$=-[9(x-y)^2-6(x-y)+1]$

$=-[3(x-y)-1]^2$

$=-(3x-3y-1)^2$

➡**解法 2**:利用公式(5)

原式$=-(9x^2+9y^2+1-18xy-6x+6y)$

$=-[(3x)^2+(3y)^2+1^2+2\cdot 3x\cdot(-3y)+2\cdot(3x)\cdot(-1)+2(-3y)\cdot(-1)]$

$=-(3x-3y-1)^2$

例 5 分解因式:$5a^{2n+11}x^{4m+6}-20a^{n+8}x^{2m+4}y+20a^5x^2y^2$

➡**解**:原式$=5a^5x^2(a^{2n+6}x^{4m+4}-4a^{n+3}x^{2m+2}y+4y^2)$

$=5a^5x^2[(a^{n+3}x^{2n+2})^2-4a^{n+3}x^{2m+2}y+(2y)^2]$

$=5a^5x^2(a^{n+3}x^{2m+2}-2y)^2$

例 6 分解因式$(x^2+y^2)^3+(z^2-x^2)^3-(y^2+z^2)^3$

➡**解题剖析**:式中(x^2+y^2)与(z^2-x^2)的和等于y^2+z^2所以考虑用立方和公式$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$变形后,再分解.

➡**解**:原式$=(x^2+y^2+z^2-x^2)^3-3(x^2+y^2)(z^2-x^2)(x^2+y^2+z^2-x^2)-(y^2+z^2)^3$

$=(y^2+z^2)^3-3(x^2+y^2)(z^2-x^2)(y^2+z^2)-(y^2+z^2)^3$

$=3(x^2+y^2)(y^2+z^2)(x+z)(x-z)$

例 7　分解因式$(a+2b+c)^3-(a+b)^3-(b+c)^3$

➡**解法 1**:$(a+2b+c)^3-(a+b)^3-(b+c)^3$

$=(a+2b+c)^3-[(a+b)^3+(b+c)^3]$

$=(a+2b+c)^3-(a+2b+c)[(a+b)^2-(a+b)(b+c)+(b+c)^2]$

$=(a+2b+c)[(a+2b+c)^2-(a+b)^2+(a+b)(b+c)-(b+c)^2]$

$=(a+2b+c)[(2a+3b+c)(b+c)+(a+b)(b+c)-(b+c)^2]$

$=(a+2b+c)(b+c)(2a+3b+c+a+b-b-c)$

$=3(a+2b+c)(b+c)(a+b)$

➡**解法 2**:利用公式(10),原式可以写成

$(a+2b+c)^3+[-(a+b)]^3+[-(b+c)]^3$

由于$(a+2b+c)+[-(a+b)]+[-(b+c)]=0$

所以原式$=3(a+2b+c)[-(a+b)][-(b+c)]$

$=3(a+2b+c)(a+b)(b+c)$

➡**解法 3**:利用"代换"方法分解

设$a+b=A,b+c=B$,则$a+2b+c=A+B$

原式$=(A+B)^3-A^3-B^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3-A^3-B^3$

$=3A^2B+3AB^2=3AB(A+B)$

$=3(a+b)(b+c)(a+2b+c)$

例 8　因式分解$(xy-1)^2+(x+y-2)(x+y-2xy)$

➡**解题剖析**:本题需要乘开再分解,乘开时,要把 $x+y$ 看成一个整体.

➡**解**:原式 $=x^2y^2-2xy+1+(x+y)^2-2(x+y)-2xy(x+y)+4xy$

$$=[x^2y^2-2xy(x+y)+(x+y)^2]+[2xy-2(x+y)]+1$$
$$=[xy-(x+y)]^2+2[xy-(x+y)]+1$$
$$=[xy-x-y+1]^2$$
$$=(x-1)^2(y-1)^2$$

例 9　已知三角形的三边 a、b、c 适合等式 $a^3+b^3+c^3=3abc$,证明这个三角形是等边三角形

➡**证明**:已知 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

亦即 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

$\because\quad a+b+c\neq0$

$\therefore\quad a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

则 $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$

$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)$

$\therefore\quad (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

又 $(a-b)^2\geqslant0,(b-c)^2,(c-a)^2\geqslant0$

$\therefore\quad (a-b)^2=(b-c)^2=(c-a)^2=0$

$\therefore\quad a=b=c$

$\therefore$　此三角形为等边三角形

(三)分组合解法

把多项式的项通过适当分组来分解因式的方法,叫做分组分解法.

运用分组分解法分解因式时,对多项式恰当分组的要求是:分组后各组能分解因式,并且在各组分解因式的基础上,能完成对整个多项式的因式分解,分组是为进行因式分解创造条件,是搭桥,所以在考虑如何适当分组时,通常要进行尝试和估算.分组的基本方向是"求同".

例 1　分解因式 $a^3+a^2+a+b^3-b^2+b$

➡**解**:原式 $=(a^3+b^3)+(a^2-b^2)+(a+b)$

$$=(a+b)(a^2-ab+b^2)+(a+b)(a-b)+(a+b)$$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2+a-b-1)$

例2 分解因式 $ax^2-a^2x+bx^2-2abx+a^2b-b^2x+ab^2$

➡**解**:原式 $=(ax^2+bx^2)-(a^2x+2abx+b^2x)+(ab^2+a^2b)$

$=x^2(a+b)-x(a+b)^2+ab(a+b)$

$=(a+b)[x^2+(a+b)x+ab]$

$=(a+b)(a+x)(b+x)$

例3 $1+a+b+c+ab+bc+ac+abc$

➡**解**:原式 $=(1+c)+(b+bc)+(a+ab+ac+abc)$

$=(1+c)+b(1+c)+a(1+b+c+bc)$

$=(1+c)(1+b)+a(1+b)(1+c)$

$=(1+c)(1+b)(1+a)$

例4 分解因式 $(x^2+1)^2-x^2+x(x-2)(x^2+x+1)$

➡**解题剖析**:此题无论是整体还是局部,公因式都不明显.可以先将已知整式展开为单项式的代数和形式,然后再分解因式.

➡**解**:原式 $=x^4+2x^2+1-x^2+x^4-x^3-x^2-2x$

$=2x^4-x^3-2x+1$

$=2x(x^3-1)-(x^3-1)$

$=(x^3-1)(2x-1)$

$=(x-1)(x^2-x+1)(2x-1)$

➡**注**:如果原式中前两项用平方差公式分解,得出的一个因式恰是 x^2+x+1,然后再用提取公因式法继续分解,也是一种解法.

例5 分解因式:

$(ab+cd)(a^2-b^2+c^2-d^2)+(ac+bd)(a^2+b^2-c^2-d^2)$

➡**解题剖析**:将原式展开后,式中 a^2、b^2、c^2、d^2 的差数分别为 $(ab+cd)$ 与 $(ac+bd)$ 的代数和,而 $(ab+cd)+(ca+bd)$ 或 $(ab+cd)-(ac+bd)$ 都可用分组分解法分解,因此将原式按 a^2、b^2、c^2、d^2 的系数进行整理并分组即可得解.

➡**解**:原式 $=(ab+cd+ac+bd)a^2+(ac+bd-ab-cd)b^2+c^2(ab+cd-ac-bd)-(ab+cd+ac+bd)d^2$

$=(ab+cd+ac+bd)(a^2-d^2)+(ac+bd-ab-cd)(b^2-c^2)$

$$=(a+d)^2(b+c)(a-d)-(b+c)(a-d)(b-c)^2$$
$$=(b+c)(a-d)[(a+d)^2-(b-c)^2]$$
$$=(b+c)(a-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)$$

例 6　分解因式 $x^3(a+1)-xy(x-y)(a-b)+y^3(b+1)$

➡**解题剖析**：原式中含有字母 a 与字母 b 的项基本类似，故可按 a 项和 b 项分组分解.

➡**解**：原式 $=a[x^3-xy(x-y)]+b[xy(x-y)+y^3]+x^3+y^3$
$$=ax(x^2-xy+y^2)+by(x^2-xy+y^2)+(x+y)(x^2-xy+y^2)$$
$$=(x^2-xy+y^2)(ax+by+x+y)$$

例 7　分解因式 $xyz(x^3+y^3+z^3)-y^3z^3-z^3x^3-x^3y^3$

➡**解题剖析**：原式去括号后，第一项与第四项为，$x^4yz-y^3z^3=yz(x^4-y^2z^2)=yz(x^2+yz)(x^2-yz)$，其余各项两两分组即可得解.

➡**解**：原式 $=x^4yz+xyz(y^3+z^3)-y^3z^3-z^3x^3-x^3y^3$
$$=(x^4yz-y^3z^3)+xyz(y^3+z^3)-x^3(z^3+y^3)$$
$$=yz(x^2+yz)(x^2-yz)+x(y^3+z^3)(yz-x^2)$$
$$=(x^2-yz)[yz(x^2+yz)-x(y^3+z^3)]$$
$$=(x^2-yz)(x^2yz+y^2z^2-xy^3-xz^3)$$
$$=(x^2-yz)[z^2(y^2-xz)-xy(y^2-xz)]$$
$$=(x^2-yz)(y^2-xz)(z^2-xy)$$

例 8　分解因式 $(1+x+x^2+x^3)^2-x^3$

➡**解题剖析**：本题，显然无因式可提，又无乘法公式可利用，必须考虑先将式子乘开，再重新分组. 此式乘开也要技巧.

➡**解**：原式 $=(1+x+x^2)^2+2x^3(1+x+x^2)+x^6-x^3$
$$=(1+x+x^2)^2+2x^3(1+x+x^2)+x^3(x^3-1)$$
$$=(1+x+x^2)[(1+x+x^2)+2x^3+x^3(x-1)]$$
$$=(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4)$$

（四）十字相乘法及广义十字相乘法

十字相乘法对二次三项式，包括广义二次三项式，分解因式具有简洁、迅速、方便之功效，只要熟练掌握其要领，即可得到事半功倍的效果.

它的一般方法是：

$$acx^2+(ab+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$$

例 1　把下列各式分解因式

(1) $2(a-b)^2+(a-b)-6$

(2) $(a^2-b^2)x^2-4ab-a^2+b^2$

(3) $x^2-(p^2+q^2)x+pq(p+q)(p-q)$

(4) $x^4+x^3+6x^2+5x+5$

➡**解**：(1)

$$\because \begin{array}{ll} 2(a-b) & -3 \\ a-b & 2 \end{array}$$

$$4(a-b)-3(a-b)=a-b$$

$$\therefore\ 2(a-b)2+(a-b)-b=(2a-2b-3)(a-b+2)$$

➡**解**：(2)先把原式化为：

$(a^2-b^2)x^2-4abx-(a^2-b^2)$

(2)

$$\because \begin{array}{ll} (a+b) & a-b \\ a-b & -(a+b) \end{array}$$

$$-a^2-2ab-b^2+a^2-2ab+b^2=-4ab$$

$\therefore\ -(a^2-b^2)x^2-4abx-a^2+b^2=[(a+b)x+a-b][(a-b)x-(a+b)]=(ax+bx+a-b)(ax-bx-a-b)$

➡**解**：(3)

➡**解题剖析**：原式的第三项中 p 与 $p-q$ 及 q 与 $p+q$ 相乘可得到 p^2 与 q^2，所以可用十字相乘法.

➡**解**：原式 $=x^2-(p^2+q^2)x-p(p-q)\cdot[-q(p+q)]$

$$\because \begin{array}{ll} 1 & -p(p-q) \\ 1 & -q(p+q) \end{array}$$

$$-q(p+q)-p(p-q)=-(p^2+q^2)$$

∴ 原式 $=(x-p^2+pq)(x-q^2-pq)$

➡**解**:(4)

➡**解题剖析**:把 x^4+x^3 写成 $x(x+1)x^2$,$6x^2+5x$ 写成$(6x+5)x$,故可用十字相乘法

➡**解**:原式 $=x(x+1)x^2+(6x+5)x+5$

∵
$$\begin{array}{ccc} x & & 5 \\ & \times & \\ x+1 & & 1 \end{array}$$

∴ 原式 $=(x^2+5)(x^2+x+1)$

例 2 把 $2x^2+xy-y^2-4x+5y-6$ 分解因式

➡**解法 1**:∵ $2x^2+xy-y^2=(2x-y)(x+y)$

$$\begin{array}{ccc} 2x-y & & +2 \\ & \times & \\ x+y & & -3 \\ \hline \end{array}$$

$-3(2x-y)+2(x+y)=-4x+5y$

∴ 原式 $=(2x-y+2)(x+y-3)$

➡**解法 2**:把原多项式按 x 降幂排列,变成关于 x 的二次三项式,再进行分解.

原式 $=2x^2+(y-4)x-(y^2-5y-6)$

$=2x^2+(y-4)x-(y-2)(y-3)$

$$\begin{array}{ccc} 2x & & -(y-2) \\ & \times & \\ x & & y-3 \\ \hline \end{array}$$

$2x(y+3)+x[-(y-2)]=(y-4)x$

∴ 原式 $=(2x-y+2)(x+y-3)$

➡**注**:在二元二次多项式中,为了能运用十字相乘法分解因式,一般情况下要经过两个步骤:

1. 固定一个字母为主要字母，把原式看成关于这个字母的多项式(广义二次三项式)，这时另一个字母看作是常数；
2. 按这个主要字母将多项式降幂排列，再用十字相乘法尝试能否分解以及怎样分解(有时需要反复运用十字相乘法).

例 3　分解因式：$x^2-408x-124848$

➡解题剖析：当二次三项式的系数的绝对值较大时，有两个办法可供考虑，一个是用“短除法”先将常数项分解质因数，再凑两数，使其和等于一次项系数；另一个办法是先将系数分解质因数，然后用换元法.第二种方法解法如下：

➡解：$x^2-408x-124848$

$$=x^2-2(2^2\cdot3\cdot17)x-3(2^2\cdot3\cdot17)^2$$

改 $2^2\cdot3\cdot17=a$，则原式 $=x^2-2ax-3a^2$

$$=(x-3a)(x+a)$$
$$=(x-3\cdot2^2\cdot3\cdot17)(x+2_2\cdot3\cdot17)$$
$$=(x-612)(x+204)$$

例 4　分解因式 $x^4-2ax^2+x+a^2-a$

➡解题剖析：把原式按字母 a 整理，变为关于 a 的二次三项式，然后用“十字相乘法”.

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & -(x^2+x) \\ 1 & & -(x^2-x+1) \end{array}$$

➡解：原式 $=a^2-(2x^2+1)a+(x^4+x)$

$$=a^2-(2x^2+1)a+x(x+1)(x^2-x+1)$$
$$=a^2-(2x^2+1)a+(x^2+x)(x^2-x+1)$$
$$=(a-x^2-x)(a-x^2+x-1)$$
$$=(x^2+x-a)(x^2-x-a+1)$$

▲竞赛训练

1. 分解因式

(1)$3a^2x^3y+6ax^2y^2-12ax^2y^3$