● 高校经典教材配套辅导系列

高等代数

习题精解

刘丁酉 主编

涵盖课程重点

精炼方法技巧

精解课后习题

中国科学技术大学出版社

高校经典教材配套辅导系列

高等代数习题精解

主编　刘丁酉

中国科学技术大学出版社

2004・合肥

图书在版编目(CIP)数据

高等代数习题精解/刘丁酉主编.—合肥:中国科学技术大学出版社,2004.9
(高校经典教材配套辅导系列丛书)
ISBN 7-312-01732-0

Ⅰ.高… Ⅱ.刘… Ⅲ.高等代数—高等学校—解题 Ⅳ.O15-14

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第093901号

中国科学技术大学出版社出版发行
(安徽省合肥市金寨路96号,230026)
华中师范大学印刷厂印刷
全国新华书店经销

开本:787×960/16 印张:24.25 字数:414千
2004年8月第1版 2004年9月第1次印刷
ISBN 7-312-01732-0/O·296 定价:27.80元

前　言

随着科学技术的迅速发展，特别是计算机网络的全面普及，知识经济已成为全球经济的主旋律，我国的高等教育也呈现出全日制、函授、夜大、自学考试等前所未有的多层次格局. 帮助理工科专业的众多学生顺利完成大学学习并进入自己理想的高校继续深造，已成为他们的迫切心愿.

高等代数是高等理工院校数学专业的一门重要基础课程，科学技术的发展使得理工科院校对该课程提出了更高、更新的要求. 例如北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组编著的《高等代数》甚至已修订第三版，再次由高等教育出版社出版，该书受到学生们的普遍青睐，更成为众多高等理科院校数学专业最受欢迎的课堂主教材或主要的教学参考书.

高等代数的特点是概念抽象，解题技巧灵活多变，尤其是证明题难以下手. 因此，初学者往往感觉对这门课程的学习难以适应. 为了帮助他们克服学习高等代数课程中的困难，提高解题与应试技巧，我们编写了这本《高等代数习题精解》.

本书以北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组编著的《高等代数》第三版为蓝本，按照高校经典教材配套辅导系列丛书的编写要求及高等代数课程学习的基本要求，结合作者教学中的体会编写而成. 全书共十章，分别是多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、λ -矩阵、欧几里得空间、双线性函数与辛空间. 各章按照重难点归纳与分析、习题精解、补充题精解三个部分编写，其中重难点归纳与分析又分别包括基本内容概述、重难点归纳、题型归类与分析、综合举例四节. 考虑到教科书往往受教学时数的限制，讲授时只能介绍基本理论和基本方法，我们在重难点归纳与分析中先对基本内容作了简要归纳，然后特别针对初学者在学习过程中难以把握重难点，逐章对重难点进行了归纳，并将各章的基本题型进行细致的分类与分析；综合举例中所列举的例子或一题多解，或说明重要的求解方法，或突出难点，给出证法，希望能给读者以启示.

本书的特点是起点低，有坡度，针对性强，适应面广，可供各类大学本科生、专科生、研究生及教师参考，也可供其他科教工作者阅读.

由于编者水平有限，书中的错误和疏漏之处敬请读者批评指正.

编　者

2004 年 6 月

目　　录

前言 …… I
第一章　多项式 …… 1
一、重难点归纳与分析 …… 1
二、习题精解 …… 6
三、补充题精解 …… 24
第二章　行列式 …… 37
一、重难点归纳与分析 …… 37
二、习题精解 …… 43
三、补充题精解 …… 59
第三章　线性方程组 …… 69
一、重难点归纳与分析 …… 69
二、习题精解 …… 75
三、补充题精解 …… 100
第四章　矩阵 …… 111
一、重难点归纳与分析 …… 111
二、习题精解 …… 117
三、补充题精解 …… 144
第五章　二次型 …… 153
一、重难点归纳与分析 …… 153
二、习题精解 …… 159
三、补充题精解 …… 183
第六章　线性空间 …… 204
一、重难点归纳与分析 …… 204

二、习题精解 …… 209
三、补充题精解 …… 227
第七章 线性变换 …… 232
一、重难点归纳与分析 …… 232
二、习题精解 …… 238
三、补充题精解 …… 273
第八章 λ-矩阵 …… 281
一、重难点归纳与分析 …… 281
二、习题精解 …… 289
三、补充题精解 …… 313
第九章 欧几里得空间 …… 314
一、重难点归纳与分析 …… 314
二、习题精解 …… 322
三、补充题精解 …… 351
第十章 双线性函数与辛空间 …… 360
一、重难点归纳与分析 …… 360
二、习题精解 …… 366

第一章 多 项 式

多项式理论是高等代数研究的基本对象之一,在整个高等代数课程中既相对独立,又贯穿其他章节.换句话说,多项式理论的讨论可以不依赖于高等代数的其他内容而自成体系,却可为其他章节的内容提供范例与理论依据.

本章主要讨论多项式的基本概念与基本性质,包括数域的概念、一元多项式的定义与运算规律、整除性、因式分解及根等概念.对于多元多项式,则主要讨论字典排列法与对称多项式.

一、重难点归纳与分析

(一) 基本内容概述

多项式理论又分为一元多项式与多元多项式两大部分,其中一元多项式主要讨论:

1.一元多项式的基本概念与基本性质:主要讨论数域的概念、一元多项式的定义与运算规律;

2.一元多项式的整除性理论:主要讨论带余除法与余数定理、整除的基本概念与基本性质、最大公因式和互素的基本概念与基本性质;

3.一元多项式的因式分解理论:主要讨论不可约多项式的基本概念与基本性质、因式分解及其惟一性定理、三个特殊数域上的多项式分解.

4.一元多项式的根与重根:主要讨论重因式的定义与性质、多项式的根、多项式根的个数定理.

多元多项式则主要讨论多元多项式的基本概念、字典排列法与对称多项式.

(二) 重难点归纳

本章的重点为一元多项式的概念,因式分解理论,多项式的根和对称多项式;难点为最大公因式的定义,一元多项式的整除性,一元多项式的整除、最大公因式、互素

及不可约多项式等概念间的联系与区别.

(三) 题型归类与分析

本章的基本题型主要有:

1.关于一元多项式的基本概念,通常有一元多项式的比较次数法、比较系数法,用以确定多项式的次数及证明有关命题.

2.关于一元多项式整除性理论,通常有多项式整除性的检验、最大公因式的求法、互素的判别、按幂展开等等,可采取综合除法、带余除法、辗转相除法、待定系数法、反证法及利用多项式的整除、最大公因式、互素等定义与性质求证有关命题.

3.关于一元多项式的因式分解理论,通常有多项式的可约性判别、因式分解、重因式的判别等等,可采取艾森斯坦判别法、克龙莱克尔分解法、求有理根的分解法、分离重因式法、辗转相除法以及利用不可约多项式的定义与性质求证有关命题.

4.关于一元多项式的根与重根,通常有根的检验及重根的判别、根与系数的关系以及求多项式的根与重根等等,可利用辗转相除法、结式判别法、分离重因式法、艾森斯坦判别法等进行讨论,以及利用某些基本定理求解.

5.关于多元多项式,通常有对称多项式化初等对称多项式的化法与对称多项式的应用,其中化对称多项式为初等对称多项式的方法主要有公式法、首项消去法及待定系数法;应用对称多项式,可以对具有对称多项式形式的线性方程组求解、进行因式分解、进行恒等式的证明及求多元多项式的零点.

(四) 综合举例

例 1 设 $f(x)$是一元多项式,a,b 是任意数,c 是非零数,试证:

1) $f(x-c)=f(x)\Leftrightarrow f(x)$是常数;

2) $f(a+b)=f(a)+f(b)\Leftrightarrow f(x)=kx$($k$ 为常数);

3) $f(a+b)=f(a)f(b)\Leftrightarrow f(x)=0$ 或 1.

证 上述命题的充分性显然,下证必要性.

1)证法 1 若 $f(x)$不是常数,因 $f(x)$是一元多项式,可设 $\partial(f(x))=n>0$,并设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是$f(x)$的 n 个根,则

$$f(x_i-c)=f(x_i)=0\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

于是 $x_1-c,x_2-c,\cdots,x_n-c$ 也是$f(x)$的 n 个根,再由韦达定理,有

$$(x_1-c)+(x_2-c)+\cdots+(x_n-c)=x_1+x_2+\cdots+x_n$$

从而 $c=0$,与假设矛盾.即证 $f(x)$是常数.

证法 2　分别令 $x=0,x=c,x=2c,\cdots$,可得

$$f(-c)=f(0)=f(c)=f(2c)=\cdots$$

即证 $f(x)$是常数.

2)证法 1　在 $f(a+b)=f(a)+f(b)$中,令 $b=0$,可得 $f(0)=0$,于是 $x_0=0$ 是 $f(x)$的一个根.从而有 $f(x)=xg(x)$.再令 $x=2t$,得

$$2tg(2t)=f(2t)=f(t+t)=f(t)+f(t)=2f(t)=2tg(t)$$
$$\Leftrightarrow\quad g(2t)=g(t)$$

即证 $g(x)$为一常数,设其为 k,代入 $f(x)=xg(x)$可得 $f(x)=kx$.

证法 2　由已知,得

$$f(2a)=2f(a)$$

于是,对任意常数 k,可得

$$f(ka)=kf(a)$$

即证 $f(x)=kx$.

3)若 $f(x)=0$,则结论成立.否则由

$$f(2x)=f(x+x)=f(x)f(x)$$

知 $f(x)$只能是常数,设其为 k,则

$$k=f(0)=f(0+0)=f(0)f(0)=k^2$$

又因假设,$k\neq0$,所以 $k=1$,即证 $f(x)=1$.

例 2　在 $P[x]$中,设 $g(x)\neq0,h(x)$为任意的多项式,试证:

$$(f(x),g(x))=(f(x)-h(x)g(x),g(x))$$

证　由已知,可设

$$(f(x),g(x))=d(x)$$

则

$$f(x)=q_1(x)d(x),\qquad g(x)=q_2(x)d(x)$$

于是

$$f(x)-h(x)g(x)=[q_1(x)-h(x)q_2(x)]d(x)$$

即 $d(x)$是 $f(x)-h(x)g(x)$与 $g(x)$的一个公因式.

若 $d_1(x)$是 $f(x)-h(x)g(x)$与 $g(x)$的任意一个公因式,则由多项式的整除性质,可得 $f(x)=q_3(x)d_1(x)$.这表明$d_1(x)\mid f(x)$.从而

$$d_1(x)\mid d(x)$$

即 $d(x)$还是 $f(x)-h(x)g(x)$与 $g(x)$的一个首项系数为 1 的最大公因式,故有

$$d(x)=(f(x),g(x))=(f(x)-h(x)g(x),g(x))$$

例 3　设 $f_1(x),f_2(x),g_1(x),g_2(x)$是实系数多项式,且

$$(x^2+1)f_1(x)+(x+1)g_1(x)+(x-2)g_2(x)=0 \tag{1}$$

$$(x^2+1)f_2(x)+(x-1)g_1(x)+(x+2)g_2(x)=0 \tag{2}$$

试证 $g_1(x),g_2(x)$皆能被 x^2+1 整除.

证　证法 1　由$(x-1)\times(1)-(x+1)\times(2)$可得

$$(x^2+1)[(x-1)f_1(x)-(x+1)f_2(x)]-6xg_2(x)=0$$

于是由$(x^2+1,6x)=1$,即知$(x^2+1)\mid g_2(x)$.

再由$(x+2)\times(1)-(x-2)\times(2)$,同理可证$(x^2+1)\mid g_1(x)$.

证法 2　将 $x=\pm\mathrm{i}$ 分别代入(1)、(2)两式,可解得

$$g_1(\mathrm{i})=g_2(\mathrm{i})=0,\qquad g_1(-\mathrm{i})=g_2(-\mathrm{i})=0$$

于是有

$$(x-\mathrm{i})\mid g_1(x),\quad (x-\mathrm{i})\mid g_2(x),\quad (x+\mathrm{i})\mid g_1(x),\quad (x+\mathrm{i})\mid g_2(x)$$

从而可证$(x^2+1)\mid g_1(x)$及$(x^2+1)\mid g_2(x)$.

例 4　试问:2 是否为一元多项式

$$f(x)=3x^4+4x^3-x^2+4x-4$$
$$g(x)=x^5-6x^4+11x^3-2x^2-12x+8$$

的根? 如果是,它是几重根?

解　考察 2 是否为 $f(x)$或者 $g(x)$蹬根时,可采用综合除法,得 $f(2)=80\neq0$, $g(2)=0$. 即知 2 不是 $f(x)$的根,但 2 是 $g(x)$的根.

若要进一步考察 2 是 $g(x)$的几重根,有以下三种方法:

解法 1　求 $g(x)$的各阶导函数. 因为

$$g(x)=x^5-6x^4+11x^3-2x^2-12x+8$$

所以

$$g'(x)=5x^4-24x^3+33x^2-4x-12$$
$$g''(x)=20x^3-72x^2+66x-4$$
$$g'''(x)=60x^2-144x+66$$

于是有

$$g(2)=g'(2)=g''(2)=0,\quad g'''(2)=18\neq0$$

从而知 2 是 $g(x)$ 的三重根.

解法 2　利用辗转相除法可求得多项式

$$g(x)=x^5-6x^4+11x^3-2x^2-12x+8$$

及其导函数

$$g'(x)=5x^4-24x^3+33x^2-4x-12$$

的最大公因式

$$d(x)=(g(x),g'(x))$$

即知 2 是 $d(x)$ 的二重根,从而可得 2 是 $g(x)$ 的三重根.

解法 3　对 $g(x)=x^5-6x^4+11x^3-2x^2-12x+8$ 及商关于除式 $x-2$ 逐次采用综合除法,可得

$$r_1(x)=r_2(x)=r_3(x)=0,\quad r_4(x)\neq 0$$

从而知 2 是 $g(x)$ 的三重根.

例 5　设有一个三阶行列式为

$$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}$$

试求此行列式,并将其表示成初等对称多项式的多项式.

解　直接展开此三阶行列式,可得

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3$$

再由初等对称多项式

$$\sigma_1=x_1+x_2+x_3$$

$$\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$$

$$\sigma_3=x_1x_2x_3$$

则所求多项式 f 中相应的初等对称多项式 $\sigma_i(i=1,2,3)$ 的方幂之积应满足下表:

指　数　组	对应的 σ_i 的方幂乘积
3　0　0	σ_1^3
2　1　0	$\sigma_1\sigma_2$
1　1　1	σ_3

若令

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = \sigma_1^3 + a\sigma_1\sigma_2 + b\sigma_3$$

并取值 $x_1=0, x_2=x_3=1$,代入上式可得

$$a = -3$$

同理,让 $x_1=x_2=1, x_3=-1$,代入上式可得

$$b = 0$$

从而所求初等对称多项式的多项式为

$$f=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2$$

例 6 求一个三元一次方程,使其三个根分别为另一个三元一次方程

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

的三个根的立方.

解 设 α,β,γ 分别为方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三个根,则

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 &= (\alpha+\beta+\gamma)^3-3(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)+3\alpha\beta\gamma\\ &= -a^3-3ab+3c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha^3\beta^3+\beta^3\gamma^3+\alpha^3\gamma^3 &= (\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)^3-3\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)\\ &\quad +3\alpha^2\beta^2\gamma^2\\ &= b^3-3abc+3c^2\end{aligned}$$

$$\alpha^3\beta^3\gamma^3=-c^3$$

于是由韦达定理,所求三元一次方程为

$$y^3 + (a^3 + 3ab - 3c)y^2 + (b^3 - 3abc + 3c^2)y + c^3 = 0$$

二、习题精解

1. 用 $g(x)$ 除 $f(x)$,求商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$:

1) $f(x)=x^3-3x^2-x-1$, $g(x)=3x^2-2x+1$

2) $f(x)=x^4-2x+5$, $g(x)=x^2-x+2$

解 1)由带余除法,可得 $q(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}$, $r(x)=-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}$

2)同理可得 $q(x)=x^2+x-1$, $r(x)=-5x+7$

2. m,p,q 适合什么条件时,有

1) $x^2+mx-1 \mid x^3+px+q$

2) $x^2+mx+1 \mid x^4+px^2+q$

解 1)

$$\begin{array}{l|l} x^3 \qquad\qquad + px + q & x^2 + mx - 1 \\ \underline{x^3 + mx^2 \qquad - x} & \overline{x - m} \\ \quad - mx^2 + (p+1)x + q & \\ \quad \underline{- mx^2 \qquad - m^2x + m} & \\ \qquad (p + 1 + m^2)x + (q - m) & \end{array}$$

由假设,所得余式为 0,即

$$(p + 1 + m^2)x + (q - m) = 0$$

所以当

$$\begin{cases} p + 1 + m^2 = 0 \\ q - m = 0 \end{cases}$$

时,有

$$x^2 + mx - 1 \mid x^3 + px + q$$

2)类似可得

$$\begin{cases} m(2 - p - m^2) = 0 & (1) \\ q + 1 - p - m^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

于是当 $m=0$ 时,代入(2)可得 $p=q+1$;而当 $2-p-m^2=0$ 时,代入(2)可得 $q=1$.

综上所述,当

$$\begin{cases} m = 0 \\ p = q + 1 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} q = 1 \\ p + m^2 = 2 \end{cases}$$

时,皆有

$$x^2 + mx + 1 \mid x^4 + px^2 + q$$

3.求 $g(x)$除 $f(x)$的商 $q(x)$与余式 $r(x)$:

1) $f(x)=2x^5-5x^3-8x$, $g(x)=x+3$

2) $f(x)=x^3-x^2-x$, $g(x)=x-1+2i$

解 1)因为

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -3 & 2 & 0 & -5 & 0 & -8 & 0 \\ & 2 & -6 & 18 & -39 & 117 & -327 \\ \hline & 2 & -6 & 13 & -39 & 109 & -327 \end{array}$$

所以

$$q(x)=2x^4-6x^3+13x^2-39x+109$$
$$r(x)=-327$$

2)因为

$$\begin{array}{r|rrrr} 1-2\mathrm{i} & 1 & -1 & -1 & 0 \\ & & 1-2\mathrm{i} & -4-2\mathrm{i} & -9+8\mathrm{i} \\ \hline & 1 & -2\mathrm{i} & -5-2\mathrm{i} & -9+8\mathrm{i} \end{array}$$

所以

$$q(x)=x^2-2\mathrm{i}x-(5+2\mathrm{i})$$
$$r(x)=-9+8\mathrm{i}$$

4.把 $f(x)$表成 $x-x_0$ 的方幂和,即表成

$$c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots+c_n(x-x_0)^n+\cdots$$

的形式:

1) $f(x)=x^5,\quad x_0=1$

2) $f(x)=x^4-2x^2+3,\quad x_0=-2$

3) $f(x)=x^4+2\mathrm{i}x^3-(1+\mathrm{i})x^2-3x+7+\mathrm{i},\quad x_0=-\mathrm{i}$

解 1)由综合除法,可得

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ & & 1 & 3 & 6 & & \\ \hline 1 & 1 & 3 & 6 & 10 & & \\ & & 1 & 4 & & & \\ \hline 1 & 1 & 4 & 10 & & & \\ & & 1 & & & & \\ \hline & 1 & 5 & & & & \end{array}$$

所以

$$f(x)=1+5(x-1)+10(x-1)^2+10(x-1)^3+5(x-1)^4+(x-1)^5$$

2)类似可得

$$x^4-2x^2+3=11-24(x+2)+22(x+2)^2-8(x+2)^3+(x+2)^4$$

3)因为

$$
\begin{array}{c|ccccc}
-\mathrm{i} & 1 & 2\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} & -3 & 7+\mathrm{i} \\
 & & -\mathrm{i} & 1 & -1 & 4\mathrm{i} \\
\hline
-\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} & -4 & 7+5\mathrm{i} \\
 & & -\mathrm{i} & 0 & -1 & \\
\hline
-\mathrm{i} & 1 & 0 & -\mathrm{i} & -5 & \\
 & & -\mathrm{i} & -1 & & \\
\hline
-\mathrm{i} & 1 & -\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} & & \\
 & & -\mathrm{i} & & & \\
\hline
 & 1 & -2\mathrm{i} & & &
\end{array}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
& x^4+2\mathrm{i}x^3-(1+\mathrm{i})x^2-3x+(7+\mathrm{i}) \\
= & (7+5\mathrm{i})-5(x+\mathrm{i})+(-1-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})^2-2\mathrm{i}(x+\mathrm{i})^3+(x+\mathrm{i})^4
\end{aligned}
$$

5.求 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式:

1) $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$, $f(x)=x^3+x^2-x-1$

2) $f(x)=x^4-4x^3+1$, $g(x)=x^3-3x^3+1$

3) $f(x)=x^4-10x^2+1$, $g(x)=x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}x+1$

解 1) $(f(x),g(x))=x+1$

2) $(f(x),g(x))=1$

3) $(f(x),g(x))=x^2-2\sqrt{2}x-1$

6.求 $u(x),v(x)$使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$:

1) $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$, $g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$

2) $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9$, $g(x)=2x^3-x^2-5x+4$

3) $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1$, $g(x)=x^2-x-1$

解 1)因为

	$f(x)$	$g(x)$	
$q_1(x)=1$	$x^4+2x^3-x^2-4x-2$	$x^4+x^3-x^2-2x-2$	$q_2(x)=x+1$
	$x^4+x^3-x^2-2x-2$	$x^4\quad -2x^2$	
$q_3(x)=x$	$r_1(x)=x^3-2x$	x^3+x^2-2x-2	
	x^3-2x	$x^3\quad -2x$	
	0	$r_2(x)=x^2-2$	

所以

$$(f(x),g(x)) = x^2 - 2 = r_2(x)$$

再由

$$\begin{cases} f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x) \\ g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x) \end{cases}$$

解得

$$\begin{aligned} r_2(x) &= g(x) - q_2(x)r_1(x) = g(x) - q_2(x)[f(x) - q_1(x)g(x)] \\ &= [-q_2(x)]f(x) + [1 + q_1(x)q_2(x)]g(x) \end{aligned}$$

于是

$$u(x) = -q_2(x) = -x - 1$$

$$v(x) = 1 + q_1(x)q_2(x) = 1 + 1\cdot(x+1) = x + 2$$

2)仿上面方法,可得

$$(f(x),g(x)) = x - 1$$

且

$$u(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3},\quad v(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$$

3)由$(f(x),g(x))=1$可得

$$u(x) = -x - 1,\quad v(x) = x^3 + x^2 - 3x - 2$$

7.设 $f(x)=x^3+(1+t)x^2+2x+2u$ 与 $g(x)=x^3+tx^2+u$ 的最大公因式是一个二次多项式,求 t,u 的值.

解 因为

$$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x) = (x^3 + tx^2 + u) + (x^2 + 2x + u)$$

$$\begin{aligned} g(x) &= q_2(x)r_1(x) + r_2(x) \\ &= (x + (t-2))(x^2 + 2x + u) - (u + 2t - 4)x + u(3 - t) \end{aligned}$$

且由题设知最大公因式是二次多项式,所以余式 $r_2(x)$为0,即

$$\begin{cases} -(u + 2t - 4) = 0 \\ u(3 - t) = 0 \end{cases}$$

从而可解得

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ t_1 = 2 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} u_2 = -2 \\ t_2 = 3 \end{cases}$$

8. 证明:如果$d(x)|f(x)$,$d(x)|g(x)$,且$d(x)$为$f(x)$与$g(x)$的一个组合,那么$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个最大公因式.

证　易见$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的公因式.另设$\varphi(x)$是$f(x)$与$g(x)$的任一公因式,下证$\varphi(x)|d(x)$.

由于$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个组合,这就是说存在多项式$s(x)$和$t(x)$,使

$$d(x)=s(x)f(x)+t(x)g(x)$$

从而由$\varphi(x)|f(x)$,$\varphi(x)|g(x)$可得$\varphi(x)|d(x)$,即证.

9. 证明:$(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x)$　($h(x)$的首项系数为1).

证　因为存在多项式$u(x)$和$v(x)$使

$$(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

所以

$$(f(x),g(x))h(x)=u(x)f(x)h(x)+v(x)g(x)h(x)$$

上式说明$(f(x),g(x))h(x)$是$f(x)h(x)$与$g(x)h(x)$的一个组合.

另一方面,由$(f(x),g(x))|f(x)$知

$$(f(x),g(x))h(x)|f(x)h(x)$$

同理可得

$$(f(x),g(x))h(x)|g(x)h(x)$$

从而$(f(x),g(x))h(x)$是$f(x)h(x)$与$g(x)h(x)$的一个最大公因式,又因为$(f(x),g(x))h(x)$的首项系数为1,所以

$$(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x)$$

10. 如果$f(x)$,$g(x)$不全为零,证明:

$$\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1$$

证　存在$u(x)$,$v(x)$使

$$(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

又因为$f(x)$,$g(x)$不全为0,所以

$$(f(x),g(x))\neq 0$$

由消去律可得

$$1=u(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}$$

所以