双重丛书

概率论与数理统计

重点内容重点题

编著　赵彦晖　杨泮池　褚维盘
主审　崔荣泉

西安交通大学出版社

双重丛书

概率论与数理统计

重点内容重点题

编著　赵彦晖　杨泮池　褚维盘
主审　崔荣泉

西安交通大学出版社
·西安·

内容提要

本书是学习"概率论与数理统计"课程的辅导书，突出本课程的重点内容和重点习题是本书的特点。

本书主要由：重点内容提要、重点例题分析和精选考研试题解析，三部分组成。在各章重点内容部分，系统地归纳了本章所涉及的基本概念、基本理论和基本方法；在重点例题分析部分，选择了能巩固本课程内容的重点例题；在精选考研试题解析部分，挑选了历年硕士研究生入学考试的各种类型的试题。

本书适合学习"概率论与数理统计"课程的本、专科生使用。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计重点内容重点题 / 赵彦晖等编 .—西安：西安交通大学出版社，2004.4

(双重丛书)

ISBN 7-5605-1808-7

Ⅰ．概 ... Ⅱ．赵 ... Ⅲ．①概率论-高等数学-教学参考资料 ②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ．O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 127194 号

书　　名	概率论与数理统计重点内容重点题
编　　著	赵彦晖　杨泮池　褚维盘
出版发行	西安交通大学出版社
地　　址	西安市兴庆南路 25 号(邮编：710049)
电　　话	(029)82668357　82667874(发行部)
	(029)82668315　82669096(总编办)
印　　刷	陕西宝石兰印务有限责任公司
字　　数	174 千字
开　　本	890mm×1240mm　1/32
印　　张	5.875
版　　次	2004 年 4 月第 1 版　2004 年 4 月第 1 次印刷
印　　数	0 001～5 000
书　　号	ISBN 7-5605-1808-7 / O·205
定　　价	9.00 元

前 言

概率论与数理统计是理工科大学生的一门必修课，也是报考硕士研究生入学考试的重要内容之一（其中数学一占 20%，数学三占 25%，数学四占 25%）. 因此，能否学好概率论与数理统计这门课程直接影响着考研的成功.

由于随机现象的不确定性，使人感到把握不定，主要表现在概念难于建立，方法难于掌握. 为了切实帮助学生克服这方面的困难，我们编写了这本概率论与数理统计辅导教材，以帮助学生梳理所学的理论和方法，训练基本题型和考研题型，为学生学习和考研提供帮助. 本书内容由 8 章构成：随机事件及其概率，随机变量及其分布，随机向量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律与中心极限定理，样本与抽样分布，参数估计，假设检验. 每章由五部分构成：基本要求、重点内容提要、重点例题分析、精选考研试题解析、自测题及其答案与提示.

在重点内容提要部分，本书全面系统地总结了该章所涉及的基本概念、基本理论和基本方法，并用表格形式进行对比，以增强学生的记忆和理解，使读者在把书读厚的基础上再重新把书读薄，从而更好地掌握所学内容.

在重点例题分析部分，本书选择了能巩固所学知识的重点例题进行分析，使学生在掌握整体概念的基础上加深对所学知识的理解和运用.

在精选考研试题解析部分，本书精心挑选了历年硕士研究生入学考试的各种类型的试题，去掉了同类试题的重复出现，或把部分同类重复试题作为自测题，让读者练习，以节省读者复习的宝贵时间，因此，本书篇幅虽小，但题型全面，容易被学生掌握.

作者提倡独立思考，刻苦钻研，望读者不因本书而束缚自己的思想.

尽管作者于本书中力求概念之准确、过程之归范、技巧之突出，并希望借此以影响读者，然而限于水平，错误和疏漏之处在所难免，故请读者批评指正.

本书的宗旨是：**用较短的篇幅总结全面的内容，**

用较少的时间掌握较多的知识.

编　者

2004年3月

目　录

第1章 随机事件及其概率

1.1 基本要求

(1) 理解随机事件和样本空间的概念.熟练掌握事件之间的关系与基本运算.

(2) 理解事件频率的概念.了解随机现象的统计规律性.

(3) 理解古典概率的定义.了解几何概率的定义和概率的统计定义.知道概率的公理化定义.

(4) 掌握概率的基本性质(特别是加法定理).会应用这些性质进行概率计算.

(5) 理解条件概率的概念.掌握乘法定理、全概率公式和贝叶斯公式,并会应用这些公式进行概率计算.

(6) 理解事件独立性的概念.会应用事件的独立性进行概率计算.

1.2 重点内容提要

集合论是学习本章的基础.本章涉及的许多概念,如样本空间、随机事件、和事件、积事件等都是利用集合及其运算进行描述的.作为集合的函数,概率则反映了事件发生的可能性大小.作为概率的计算,本章着重介绍了古典概型的计算,并给出了计算概率的几个有力工具:加法公式、条件概率公式、乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式.

1.2.1 基本概念

随机现象:在一定条件下,可以重复试验或观察,但每次试验的结果不能预知,而大量重复试验的结果却能呈现出某种规律性的现象.

随机试验:对随机现象进行的观察或试验.

样本空间:试验的所有不同时出现的可能结果组成的集合.

样 本 点：构成样本空间的元素.

随机事件：样本空间的子集.

基本事件：由单个样本点组成的单点集.

必然事件：每次试验中必然发生的事件.

不可能事件：每次试验中都不发生的事件.

1.2.2 排列与组合

加法原理：完成一件事情有 n 类不同的方法,若第 1 类方法有 m_1 种,第 2 类有 m_2 种,…,第 n 类有 m_n 种,则完成这件事情共有 $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种不同的方法.

乘法原理：完成一件事情有 n 个步骤,若第 1 步有 m_1 种不同的方法,第 2 步有 m_2 种,…,第 n 步有 m_n 种,则完成这件事情共有 $m = m_1 m_2 \cdots m_n$ 种不同的方法.

排列：从 n 个不同元素中任取 $m(m \leqslant n)$ 个不同元素排成一列(与排列次序有关),称为排列,其不同的排列总数为:$\mathrm{P}_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

组合：从 n 个不同元素中任取 $m(m \leqslant n)$ 个不同元素构成一组(与排列次序无关),称为组合,其不同的组合总数为:$\mathrm{C}_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

1.2.3 事件间的关系与运算规律

【事件及事件间的关系】

随机事件：A（由样本点组成的集合）

必然事件：U（所有样本点组成的集合）

不可能事件：$\varnothing$（不含任何样本点的集合）

包含：$A \subset B$（指事件 A 发生必导致 B 发生）

相等：$A = B$（指 $A \subset B$ 且 $B \subset A$）

和事件：$A \cup B$（指 A, B 中至少有一个发生）

直和：$A + B = A \cup B$（A 与 B 互不相容时）

积事件：$A \cap B$ 或 AB(指 A 与 B 同时发生)

差事件：$A - B$(指 A 发生而 B 不发生)

互不相容(或互斥)：$A \cap B = \varnothing$（称 A 与 B 互不相容）

对立事件(或逆事件)：$\overline{A}=U-A$（称 $\overline{A}$ 为 A 的对立事件）

【事件间的运算规律】

交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

结合律：$A\cup B(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

分配律：$A(B\cup C)=AB\cup AC$

德·摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{k}\overline{A}_i$　（和之逆 = 逆之积）

$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{k}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{k}\overline{A}_i$　（积之逆 = 逆之和）

其它关系：$\overline{\overline{A}}=A$，$A+\overline{A}=U$，$A\overline{A}=\varnothing$，$A-B=A-AB=A\overline{B}$

当 $A\subset B$ 时，$A\cup B=B$，$A\cap B=A$，$A\overline{B}=\varnothing$，$\overline{B}\subset\overline{A}$

为了易于读者掌握事件间的关系与运算，我们将它们直观地绘制于图 1-1 中．在图 1-1 中正方形表示样本空间 U，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B，则阴影部分所表示的事件分别为：

(a) $A\cup B$：　事件 A 与 B 的和事件；

(b) $A\cap B$：　事件 A 与 B 的积事件；

(c) $A-B$：　事件 A 与 B 的差事件；

(d) $A+B$：　事件 A 与 B 的直和；

(e) $AB=\varnothing$：事件 A 与 B 互不相容；

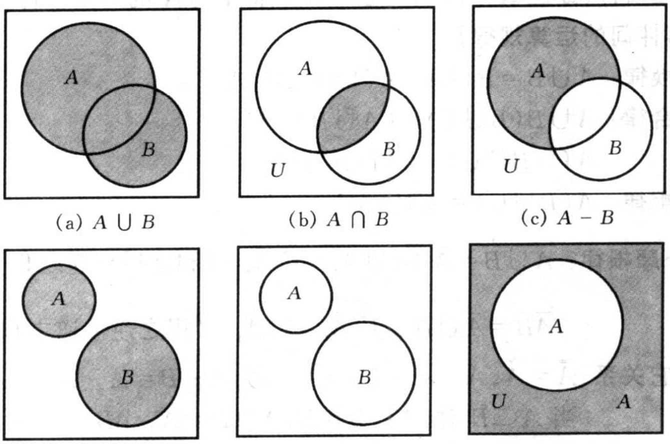
(f) $\overline{A}$：　事件 A 的对立事件．

注　事件间的关系与运算类似于集合．要善于将概率的应用问题用事件表示，再用事件的运算和概率公式计算之，这种转换可称为建立概率模型，它是解决概率问题的关键和前提．

1.2.4　事件的频率及其性质

【事件发生的频率】

设 n_A 为 n 次试验中事件 A 发生的次数，则 $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$



(a) $A \cup B$　(b) $A \cap B$　(c) $A-B$

(d) $A+B$　(e) $AB=\varnothing$　(f) $\bar{A}$

图 1-1　事件关系的文氏图

【频率的基本性质】

1°(非负性)　对于任一随机事件 A,有 $f_n(A)\geqslant 0$

2°(规范性)　对于必然事件 U,有 $f_n(U)=1$

3°(有限可加性)　若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 两两互斥,则

$$f_n\left(\sum_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k}f_n(A_i)$$

1.2.5　事件的概率及其性质

【概率的公理化定义】　称实值函数 $P(A)$为事件 A 的概率,如果 $P(A)$满足下述三条公理:

公理 1(非负性)　对于任一随机事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$

公理 2(规范性)　对于必然事件 U,有 $P(U)=1$

公理 3(完全可加性)　若 $A_1,A_2,\cdots$两两互斥,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

【概率的基本性质】

1°　$P(\varnothing)=0$;$0\leqslant P(A)\leqslant 1$;$P(\bar{A})=1-P(A)$

2° 若 $A \subset B$,则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$, $P(B) \geqslant P(A)$

3° (有限可加性)若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 两两互斥,则

$$P\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right)=\sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

注 ① 必然事件的概率为 1,但概率为 1 的事件未必是必然事件.

② 不可能事件的概率为 0,但概率为 0 的事件未必是不可能事件.

1.2.6 随机事件的概率计算

事件的概率计算是本章的重点.其简单事件的概率计算可用古典概率计算公式、几何概率计算公式和条件概率计算公式,而复杂事件的概率计算公式则有加法公式,乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式.使用这些公式的条件和结论见表 1.1.

表 1.1 随机事件的概率计算公式

名称	条件	计算公式
古典概率	E 是等可能试验,n 是其样本空间 U 包含的样本点数,A 是 E 的包含有 k 个样本点的随机事件	$P(A)=\frac{k}{n}$
几何概率	E 是按测度(如长度,面积或体积等)的等可能试验,$m(\cdot)$是相应的测度函数	$P(A)=\frac{m(A)}{m(U)}$
条件概率	A,B 为试验 E 的两个随机事件,$P(\cdot)$是 E 的概率函数,$P(A)>0$	$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$

续表 1.1

名称	条件	计算公式
加法公式	A,B 为试验 E 的任意两个随机事件	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
	$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为试验 E 的任意 n 个随机事件	$P(\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$
减法公式	A,B 为试验 E 的任意两个随机事件	$P(A-B)=P(A)-P(AB)$
乘法公式	A,B 为试验 E 的任意两个随机事件	$P(AB)=P(A)P(B\mid A)\xlongequal{A\text{ 与 }B\text{ 相互独立}}P(A)P(B)$
	$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为试验 E 的任意 n 个随机事件	$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})\xlongequal{A_1,\cdots,A_n\text{ 相互独立}}P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$
全概率公式	U 是试验 E 的样本空间，$B_1,B_2,\cdots$ 为 U 的一个划分，A,B是 E 的事件	$P(A)=P(B)P(A\mid B)+P(\bar{B})P(A\mid\bar{B})$ $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(B_i)P(A\mid B_i)$
贝叶斯公式	U 是试验 E 的样本空间，$B_1,B_2,\cdots$ 为 U 的一个划分，A 是 E 的任一事件	$P(B_i\mid A)=\dfrac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{\infty}P(B_j)P(A\mid B_j)}\quad(i=1,2,\cdots)$

注 当抽签问题为填空题或选择题时，可直接使用抽签原理：袋中有 n 个球，其中有 m 个黑球，$k(k\leqslant n)$个人依次随机地从中抽取一个，取后不放回，则每个人抽到黑球的概率都为 m/n.

1.2.7 关于事件独立性的定义与性质

【定义】 如果随机事件 B 发生与否并不影响 A 的发生，即

$$P(A\mid B)=P(A\mid\bar{B})$$

则称**事件 A 相对 B 独立**，此时事件 A 相对 $\bar{B}$ 也独立.

如果事件 A 相对 B 独立，事件 B 相对 A 也独立，则称它们是**相互独立的**.

如果事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件相互独立，则称事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两相互独立.

如果事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任一事件相对其它任意几个事件的积独立，则称事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

如果事件列 $A_1,A_2,\cdots$ 中任意多个事件构成的事件组都相互独立，则称事件列 $A_1,A_2,\cdots$ 相互独立.

【性质】 设 A 与 B 是两随机事件，那么

1° 如果事件 A 相对 B 独立，则事件 $\bar{A}$ 相对 B 也独立，并且

$$P(A\mid B)=P(A),P(AB)=P(A)P(B)$$

2° 如果 $0<P(A)<1,0<P(B)<1$，则

$$A\text{ 与 }B\text{ 相互独立 }\Leftrightarrow A\text{ 相对 }B\text{ 独立 }\Leftrightarrow B\text{ 相对 }A\text{ 独立}$$
$$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)\Leftrightarrow P(A\mid B)=P(A\mid\bar{B})\Leftrightarrow P(B\mid A)=P(B\mid\bar{A})$$

3° 如果事件 A 与 B 相互独立，则 $\bar{A}$ 与 B，A 与 $\bar{B}$ 以及 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立，且

$$P(AB)=P(A)P(B),\quad P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B)$$
$$P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B}),\quad P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})$$

注　由于在 $0<P(A)<1,0<P(B)<1$ 的条件下，A 与 B 相互独立等价于 $P(AB)=P(A)P(B)$，故为了推理简单，许多教科书也把该式作为定义 A 与 B 相互独立的条件. 因此，在证明 A 与 B 相互独立时，只要证明了 $P(AB)=P(A)P(B)$，就可以认为 A 与 B 相互独立. 但应当注意，这种定义不利于直接从实际问题判断事件 A 与 B 是否相互独立，从而利用独立性计算积事件的概率.

1.3 重点例题分析

例 1.1 设 A、B 为事件，则下列各事件所表示的意义为：

(1) $\bar{A}\cup\bar{B}$ 表示 ________________

(2) $\bar{A}B$ 表示 ________________

(3) $\bar{A}\bar{B}$ 表示 ________________

(4) $\bar{A}A$ 表示 ________________

解 由于 $\bar{A}\cup\overline{AB}$，$\bar{A}A=\varnothing$，所以题中四个事件表示的意义分别为：

(1) <u>A、B 不都发生</u>　　(2) <u>B 发生而 A 不发生</u>

(3) <u>A、B 都不发生</u>　　(4) <u>不可能事件</u>

【知识点】事件间的关系及意义.

例 1.2 设 A,B,C 表示三个事件，试将下列事件用 A,B,C 表示，并填入相应的括弧中.

(1) A,B,C 都发生 (　　　　)

(2) A,B,C 都不发生 (　　　　)

(3) A,B,C 不都发生 (　　　　)

(4) A,B,C 中至少有二个发生 (　　　　)

(5) A,B,C 中恰好有一个发生 (　　　　)

(6) A,B,C 中最多有一个发生 (　　　　)

解 由事件间的关系及意义知题中六个事件可用 A,B,C 分别表示为：

(1) (ABC)　　(2) ($\bar{A}\bar{B}\bar{C}$)

(3) ($\overline{ABC}$)　　(4) ($BC\cup CA\cup AB$)

(5) ($A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$)　　(6) ($\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}$)

【知识点】事件间的关系与表示.

例 1.3 判断下列命题的正确性

(1) $A\cup B=A\bar{B}\cup B$ (　　)

(2) 若 $AB=\varnothing$ 且 $C\subset A$，则 $BC=\varnothing$ (　　)

(3) $\overline{A\cup B}\,C=\bar{A}\ \bar{B}\ \bar{C}$ (　　)

(4) 若 $A\subset B$，则 $\bar{B}\subset A$ (　　)

解　由事件间的关系及意义知：

(1) (√) 因为 $A\cup B$ 与 $(A\bar{B})\cup B$ 均表示 A 与 B 中至少有一个发生.

(2) (√) 因为 $\varnothing\subset CB\subset AB=\varnothing$，所以 $BC=CB=\varnothing$

(3) (×) 因为 $\overline{A\cup B}\,C=\bar{A}\,\bar{B}\,C\neq\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$

(4) (×) 因为 $A\subset B$ 时 $\bar{B}\subset\bar{A}$，不能推出 $\bar{B}\subset A$

【**知识点**】事件间的关系与运算.

注　事件间运算的优先级(从高到低)为：逆运算→积运算→和、差运算.

例 1.4　化简下列各式

(1) $A\cup B-A$

(2) $(A\cup B)(A\cup\bar{B})$

(3) $(A\cup B)(B\cup C)$

(4) $(A\cup B)(A\cup\bar{B})(\bar{A}\cup B)$

解　由事件间的运算关系知：

(1) $A\cup B-A=(A\cup B)\bar{A}=A\bar{A}\cup B\bar{A}=B\bar{A}=B-A$

(2) $(A\cup B)(A\cup\bar{B})=AA\cup A\bar{B}\cup BA\cup B\bar{B}=A\cup\varnothing=A$

(3) $(A\cup B)(B\cup C)=AB\cup AC\cup BB\cup BC$

$$=(AB\cup BB\cup BC)\cup AC=B\cup AC$$

(4) 由(2)知 $(A\cup B)(A\cup\bar{B})(\bar{A}\cup B)=A(\bar{A}\cup B)=AB$

【**知识点**】事件间的运算关系.

注　对任意的事件 A,B,C，有 $AB\cup BB\cup BC=B$，同理 $AA\cup A\bar{B}\cup AB=A$

例 1.5　设 $P(A)>0,P(B)>0$，将下列四个数

$$P(A),P(AB),P(A\cup B),P(A)+P(B)$$

按由小到大的顺序排列 (用≤联系它们).

解　由事件关系 $AB\subset A\subset(A\cup B)$ 及加法公式

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

知

$$P(AB)\leqslant P(A)\leqslant P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$$

【知识点】概率的性质，加法公式.

例 1.6 设 A,B 是两个随机事件.已知

$$P(A)=0.3,P(B)=0.4,P(A\cup B)=0.5$$

求 $P(AB),P(\bar{A}B)$及 $P(A-B)$.

【分析】 由已知条件及所求概率 $P(AB)$可知本题需要用加法公式，求得概率 $P(AB)$后便可直接求得另两事件的概率.

解 由加法公式得

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.3+0.4-0.5=0.2$$

于是

$$P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=0.4-0.2=0.2$$

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3-0.2=0.1$$

【知识点】概率的性质，加法公式.

例 1.7 已知 $P(A)=0.6,P(B)=0.4,AC=\varnothing,B\subset C$，求 $P(C)$及 $P(C-A)$.

解 由 $AC=\varnothing$知

$$P(A)+P(C)=P(A\cup C)\leqslant P(U)=1$$

再由 $B\subset C,P(A)=0.6,P(B)=0.4$ 知

$$P(A)+P(C)\geqslant P(A)+P(B)=1$$

所以 $\qquad P(A)+P(C)=1$

于是 $\qquad P(C)=1-P(A)=1-0.6=0.4$

从而 $\qquad P(C-A)=P(C)-P(AC)=0.4-0=0.4$

【知识点】概率的性质，加法公式.

例 1.8 在一批 N 件产品中有 M 件次品，从中任取 $n(n\leqslant N-M)$ 件，求取出的 n 件产品中：

(1) 恰有 $m(m\leqslant M,m\leqslant n)$件次品的概率；

(2) 有次品的概率.

【分析】 这是一典型的抽球问题，其概率可由古典概率计算公式求得.