数学竞赛培训教程

小学册

周春荔、周国镇、孔令颐、周沛耕、何裕新 编著

高等教育出版社

封面设计：杨志清

ISBN 7-04-002717-8/O·865
定价：3.15元

数学竞赛培训教程

小 学 册

周春荔 周国镇 孔令颐 周沛耕 何裕新 编著

高等教育出版社

一九八九年

内容简介

本书由三部分组成：1.专题培训：包括11个专题，对于每一个专题，都详细地介绍了基本知识，分析了多方面的典型问题，配备了相当数量的习题，并给了提示和答案，是全书的入门部分、基础部分；2.综合训练，这一部分编入了100个难度较大，并且综合性较强的题目，所有题目都附有提示和解答，是本书的提高部分；模拟赛题部分包括10组赛题，是本书的实践演习部分。本书可以使准备参加小学数学竞赛，并想在竞赛中获得优胜的少年数学爱好者们得到足够的知识、方法、技巧，并且从中大大提高自己的数学修养。

数学竞赛培训教程

小 学 册

周春荔 周国镇 孔令颐 周沛耕 何裕新 编著

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京顺义牛栏山一中印刷厂印刷

开本850×1168 1/32 印张7.75 字数202.5千字
1989年10月第1版 1989年10月第1次印刷
印数2001—7000

ISBN 7-04-002717-8/O·865

定价：3.15元

前　　言

第31届国际数学奥林匹克（IMO）将于1990年夏在北京举行。为了迎接这一届国际中学生的数学大赛，我们五个人应高等教育出版社之约，合作编写了这一套<数学竞赛培训教程>，包括三个分册：小学分册、初中分册、高中分册。

本书是小学分册。

本人作为这个分册的主编，受另外四位作者之托，向少年读者朋友们简要地介绍一下这本书的使用方法，以求得到尽可能好的学习效果。

这本书，是专为准备参加各个级别的小学数学竞赛（本校的、本地区的乃至全国的竞赛，如“华杯”赛）的小学高年级学生编写的。我们认为书中已经包容了足够的知识、方法、技巧和训练题目。本书的行文力求通俗易懂，即使是三、四年级的小学生，只要数学基础比较好，也能掌握书中的某些内容，推算书中的部分习题。

对于指导自己的学生、作参加竞赛准备的小学数学老师，这本书将是一个得力的助手。

本书共包括三个部分：

1. 专题培训：这一部分包括十一个专题。对于每一个专题，都详细地介绍了基本知识、分析了多方面的典型例题、配备了相当数量的习题并给了提示和答案。这是全书的入门部分、基础部分、学习这一部分的时候，可以不按标题顺序，先从自己感兴趣的或觉得比较容易的专题开始。

2. 综合训练：这一部分编入了一百个难度较大，并且综合性较强的题目，所有题目都附有提示和解答。这是本书的提高部分。读者在学完第一部分的十一个专题并做完所附的习题之后，

就可以尝试着一道一道地独立地解这些习题，有的题目一时想不出来，不要急于查看书上的答案，要多想些时候，这样的学习效果要好一些。

3. 模拟赛题：这一部分包括十组模拟赛题，这是本书的实战演习部分。学习这一部分时，要象正式参加竞赛一样，事前不要看题，用两个小时独立地做其中的一份试题，两个小时下来，可以对照书上的答案，看看自己做出了其中的多少题，并且比较自己和书上的解法有什么异同，只有这样，才能检验自己的实际水平，训练自己的能力，提高参加比赛的心理素质。

书中各部分列入的习题，一部分是从历年来国内外数学竞赛中选出，或直接引用、或加以改编，一部分是作者从培训自己的竞赛选手时用过的练习题中精选出来的。

作者衷心地希望使用这本书的少年读者，对于书中的每一个题目，都要尽可能独立地求解，要刻苦钻研，要有韧劲，“百思以后方得其解”不但是很高的精神享受，并且能从中获得鼓舞、信心和力量，这是比做题本身更重要的东西。

作者特别期望少年朋友们对于书中的题目能提出新的不同于书中给出的解法，或指出书中的不恰当之处，如果作者能收到来自于少年朋友的这样内容的信件，作者不但感到十分欣慰，而且将赠给来信的少年朋友一个小小的纪念品，以表示作者的诚挚谢意。

高等教育出版社的副编审张月娥老师审阅了全书，该社的章美钰、杨丽莉两位老师精心绘制了全书的插图，中国人民大学附中的杨志清老师为本书设计了别致、新颖、寓意深长的封面，本书的五位作者向以上的四位老师表示衷心的感谢！

周 国 镇

1989年9月于北京

数学竞赛培训教程

小学册

目　录

Ⅰ、专题培训

§1 数字问题

1. 基本知识

数字问题是指与十进制数字有关的一类智趣问题，主要类型是依据问题条件确定未知数字或填写有关数字算式，经常用到的知识有以下几方面.

（1）1，2，3，4，5，6，7，8，9，0，称为阿拉伯数字，这是当今世界各国通用的数字.十进制记数法就是用上述十个数码来写数.同一个数字由于它在所记的数中的位置不同，所表示的数值也不同，也就是说，每个数字除了本身的值外，还有一个“位置值”.例如88，右边的8代表8个1，左边的8代表8个十，这就是所谓的位值原则.

（2）应用位值原则，各个不同的计数单位所占的位置叫做数位，一个自然数含有数位的数目，叫做位数.含有一个数位的数，如7，是一位数；含有两个数位的数，如89，是两位数；依此类推.例如2089是个四位数，它的个位数字是9，十位数字是8，百位数字是0，千位数字是2.

（3）最大的一位数是9，最小的一位数是1，最大的两位数是99，最小的两位数是10，最大的三位数是999，最小的三位数是100，依此类推.

（4）a，b，c，d，…表示阿拉伯数字，则

$\overline{ab}=a\times10+b$（$a\neq0$）表示一个二位数；

$\overline{abc}=a\times10^2+b\times10+c$（$a\neq0$）表示一个三位数；

$\overline{abcd}=a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d$（$a\neq0$）表示一个四位数；

……

一般地，一个n位的自然数A，记作

$$A=\overline{a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{n-1}a_n}.$$
$$=a_1\times10^{n-1}+a_2\times10^{n-2}+a_3\times10^{n-3}+\cdots+a_{n-1}\times10+a_n.$$

其中 $a_1\neq0$，a_2，a_3，…，a_n都是阿拉伯数码.

（5）A是一个n位自然数，则

$$10^{n-1}\leqslant A\leqslant\underbrace{999\cdots99}_{n个9}<10^n.$$

并且经常应用 $\underbrace{999\cdots99}_{n个9}=10^n-1$.

一个n位数必定大于它的所有数字的乘积.

（6）两个n位数的和，最多为$n+1$位数，最少是n位数，两个n位数的差，最多是n位数，

如 $123+100=223$，$123+901=1024$，

$999-110=889$.

两个n位数的积，最多是$2n$位数，最少是$2n-1$位数.

一个m位数与一个n位数的积，最多是$m+n$位数，最少是$(m+n-1)$位数.

一个m位数除以一个n位数，当商是一个自然数时，它最多是$m-n+1$位数，最少是$m-n$位数（其中$m>n$，m、n都是自然数）.

特殊地，两个n位数的商，当商是自然数时，它必是一位数.

（7）若干个末位数字为1的数相乘，其积的末位数字仍为1；若干个末位数字为5的数相乘，其积的末位数字仍为5；若干个末位数字为6的数相乘，其积的末位数字仍为6；若干个末位数字为0的数相乘，其积的末位是0，且其积末尾0的个数不少于因数的个数.

（8）完全平方数的个位数字只能是0，1，4，9，6，5，也就是说，凡是个位数是2，3，7，8的自然数一定不是

完全平方数.

完全平方数的个位数字为1，5，9时，它的十位数字一定是偶数.因此，一个自然数的个位数字和十位数字都是奇数时，这个数一定不是完全平方数.当一个平方数的末位数字是6（4）时，它的十位数字一定是奇（偶）数.

2. **例题**

例1 将1，2，3，4，5，6，7，8八个不同的数字填入图中八个标有字母的格中(图Ⅰ-1)，使图中四边正好组成加、减、乘、除四道算式.

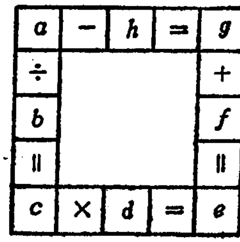


图 Ⅰ-1

分析：图中有八个空格，要填八个数字，如果用凑的方法，即使凑出来了，但也不能判断答案的唯一性.因此，用分析推理，排除一些不可能的情形，缩小“侦破”范围就非常重要了.

从加、减两式看：$a>h$，$a>g$，$e>f$，$e>g$，因此，a、e是不小于4的数.

从乘、除两式看：$e=c\times d$，$a=b\times c$，又b、c、d均不能为1（不然的话，比如$c=1$，则有$d=e$，与每个数码使用一次的要求矛盾）.所以a与e应是合数，并且是两个不同因数的积，因此a与e只能分别取6和8，这样就找到了问题的突破口，从而使问题获解.

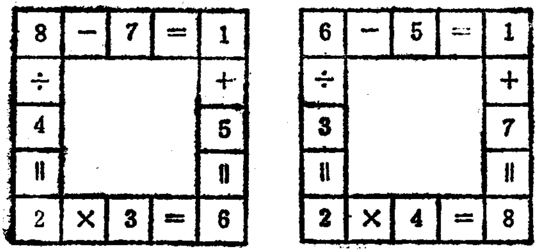
解：由上述分析可见，a与e都是由两个不同因数相乘而得到的合数，在1—8这八个数中，只有$6=2\times3$，$8=2\times4$合于要求.

（1）设$a=8$，$e=6$；（2）设$a=6$，$e=8$

分别得出两组答案，且只有这两个答案(见图Ⅰ-2).

例2 将数码1—9填在图中的九个圆圈内(图Ⅰ-3)，使得三角形每边上的四个数之和都等于20.设三个顶点的数码分别为

a、b、c，如果$b=8$，若$x<y$，问x处填加的数码是几？



a　　　　b

图 I-2

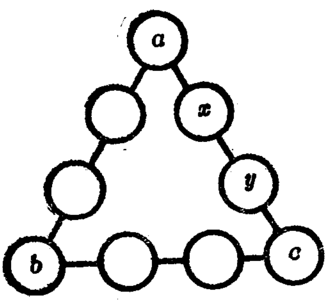


图 I-3

分析：本题又是依条件填数的问题，显然$a+x+y+c=20$，如果能确定$a+c$，则$x+y$之值即可确定，这样依$x<y$就可以试验定出x的值，所以确定$a+c$的值是个突破口，也就是算出$a+b+c$的值是关键，我们注意到在三角形三边上诸数和相加应得60，其中a、b、c、都重复加了一次.因此，由$60-(1+2+3+4+5+6+7+8+9)=15$，就是$a+b+c$的值，从而问题可解。

解：三角形每边四数之和为20，所以三边上诸数和应为60，这时发现，a、b、c重复计算了一次，所以

$a+b+c=60-(1+2+3+4+5+6+7+8+9)=15$，又$b=8$，

所以　$a+c=7$.因此，b、c可取1，6；2，5；3，4三组可能的值.

若a，b，c为8，1，6，这时，6、8为顶点的一边上只

能填2，4，而1、8为顶点的一边将无数可填，所以$a.b,c$为8，1，6应排除.

若a，b，c为8，3，4，这时3、4为顶点的一边上只能填6、7，而8、4为顶点的一边将无数可填，所以a，b，c为8，3，4的情况应予排除.

这时只剩下a，b，c为8，2，5的情形，依据每边四数之和为20，以及a、c的对称性，所以$x+y=20-2-5=13$，经试验知，x与y只能分别取4和9，由$x<y$可知x处填的数码是4（图Ⅰ-4）.

例3 填出下面加法竖式中用字母表示的数字，假定不同的字母代表着不同的数字

$$\begin{array}{r} F\ O\ R\ T\ Y \\ T\ E\ N \\ +\quad T\ E\ N \\ \hline S\ I\ X\ T\ Y \end{array}$$

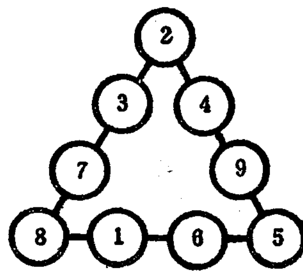


图 Ⅰ-4

分析：这是美国数学月刊中发表的一道很精彩的数字问题，其算式的英文原意40加10加10等于60，也恰符合加法竖式，真是妙到好处！

式中共有10个不同的英文字母，它们恰代表10个阿拉伯数码，相同的字母代表相同数码，不同字母代表不同的数码，这是解题中要利用的一个重要条件.

观察算式，易知$F\neq 0$，$S\neq 0$，$S>F$.由第4列O、I知，由第三列相加进位1或2.由于F与S不同，知第4列向第5列也进位1，因此$S=F+1$.并且判定O只能取8或9，再分析第1列，$Y+2N=Y$或$10+Y$，但观察第2列时知由第一列不能进位，所以$N=0$，进而由第2列知$E=5$，以下就不难突破了.

解：分析第1列，$Y+2N=Y$，或者$Y+2N=10+Y$（向上

进位1)但由第二列知，不可能由第1列有进位1，所以$Y+2N=Y$，得$N=0$，由第2列，$2E=10$，$E=5$，即第2列向第3列进1.

再分析第4列，由于O、I不同，知第3列一定向第4列有进位，而且第4列也一定向第五列有进位1，所以$S=F+1$，这时O只能取8或9.若$O=8$，第3列进1得I为9不能向第5列进1，矛盾；若第3列进2则$I=0$，与$N=0$矛盾，所以O不能取8，只能取值9.

当$O=9$，若第3列进1，则$I=0$又与$N=0$矛盾，所以只能第3列进2，这时$9+2=11$，即$I=1$，向第5列进1，于是$N=0$，$E=5$，$O=9$，$I=1$.

由第3列向第4列进2，而X不能是0和1，所以$R+2T\geqslant 22$，这时T必是7或8.

如果T是7，R必是8，X将等于3（加上第2列进位1），这时F与S为相邻数字，这在所余的数码2，4，6中是无法取到的，所以T是7的情况应予排除.

如果T是8，R可能是6或7，当R取6时，又得$X=3$，这时，所余数码为2，4，7，也不能选到F与S两个相邻数码之值，所以R一定取7，这时$X=4$，所余数码有2，3，6，其中可取$F=2$，$S=3$，此时$Y=6$，组成算式：

$$\begin{array}{r}29786\\850\\+\quad 850\\\hline 31486\end{array}$$

为问题的唯一解.

例4 所有的自然数由1开始写成一列，

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13…

问第34788个位置上的数码是多少？

分析：这是一个数数确定数码的问题.注意，前9个数码第1个位置数码是1，第2个位置数码是2，……，第9个位置数码是9，

然而第10个位置数码为1，第11个位置数码为0，……，原因是从第10位开始都是两位数10，11，……，开始发生的变化到99截止，共占了90×2=180个位置，下面接着写三位数100，101，……，999，共占900×3=2700个位置.找到了如上的规律，任何一个位置上的数码是几就都可以确定了.

解：所有一位数有9个，两位数有99－9＝90个，三位数有999－99＝900个，四位数共有9000个，依此类推.

写出全部一位数共9个，两位数共占90×2=180位数，三位数的数码个数为900×3=2700，总计全部一位、两位、三位的数数码个数共9＋2×90＋3×900＝2889.写出全部一位、二位、三位、四位的数的数码个数等于9＋2×90＋3×900＋4×9000＝38889个，而34788＜38889因此第34788个位置是某个四位数的数码.

到号码34788的属于四位数的所有数码，包含34788－2889＝31899个，这些数码个数除以4，由于31899＝4×7974＋3，于是在第34788个位置是第

7975个四位数的第三个数码，这数是：

999＋7975＝8974，其第3个数码为7，

所以所求的数码是7.

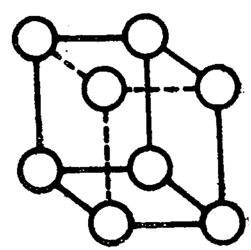


图 Ⅰ-5

例5 在一个立方体顶点标上1—9的数码中的8个（图Ⅰ-5），使得每个面上四个顶点所标数码之和彼此相等，并且这个和数不能被那个未被标上的数码整除.

试求：未被标上的数码是几？并给出一种填数的方法.

分析：设a是没有被标出的数码，S是每个面上四个顶点上的数码之和.由于每个顶点都属于3个面，所以

$$6S=3\times(1+2+3+4+5+6+7+8+9)-3a$$